Libros de Cátedra

Álgebra y Geometría

Una manera de pensar

Natalia Ferre, Adriana Claudia Galli
y Elena Beatriz Guzmán Mattje

FACULTAD DE
CIENCIAS EXACTAS

e
exactas





ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA
UNA MANERA DE PENSAR

Natalia Ferre
Adriana Claudia Galli
Elena Beatriz Guzmán Mattje

Facultad de Ciencias Exactas





Para mis profesores y alumnos,
Adriana

A mis padres. a Diego, Ignacio y Luciano.
A mis compañeras algebraicas
Beatriz

A mis padres, a Henry, Cata y Nico por acompañarme siempre.
Natalia

Advertencia

Como sugerimos usar el libro a los alumnos de las distintas carreras:

Para ***Algebra, Cálculo Numérico y Geometría Analítica***:
Capítulo 1: 1.1 y 1.2
Capítulo 2: 2.1.1 y 2.2.1
Capítulo 3: 3.1, 3.2.1 y 3.3.2
Capítulo 5: completo
Capítulo 6: completo
Capítulo 7: completo
Capítulo 8: 8.1, 8.2, 8.3.1 y 8.3.2
Capítulo 9: 9.1.1, 9.1.2, 9.2, 9.3, 9.4 y 9.5
Capítulo 10: completo
Capítulo 11: completo
Capítulo 12: completo

Para ***Algebra***:
Sin los Capítulos 6 y 7, los restantes Capítulos con todos sus incisos en el orden propuesto.

Para ***Matemática I***:
Capítulo 5: 5.1, 5.2 y 5.3
Capítulo 2: 2.1.1 y 2.2.1
Capítulo 4: 4.1
Capítulo 3: 3.1, 3.2.1 y 3.3
Capítulo 10: completo
Capítulo 11: completo
Capítulo 12: 12.1 y 12.2
Capítulo 13: 13.1

Índice

Capítulo 11

Capítulo 12

Capítulo 13

CAPÍTULO 1

Elementos de Lógica (Informalmente)

Comentario histórico y algo más...

Los Elementos de Euclides es un clásico de la matemática de Occidente que ha sido escrito aproximadamente en el año 300 antes de Cristo. En este trabajo Euclides presenta en forma ordenada, en una colección de 13 Libros, los "elementos" o las partes introductorias a la Matemática que se estudiaba en Alejandría en ese entonces. Los resultados presentados en los Elementos, no todos son obra de Euclides, es una recopilación ordenada y metódica. La mayor contribución de Euclides es la organización axiomática de la obra y que cada resultado es rigurosamente deducido de un número pequeño de suposiciones y definiciones. Este tipo de organización fue modelo luego para varias otras obras posteriores.

En la actualidad hay distintas presentaciones de la fundamentación de la Matemática, en su mayoría se basan en la teoría de conjuntos o la teoría de los números naturales, la presentación de Euclides comenzó con puntos y rectas. Él expresó las leyes de la Aritmética geométricamente.

Euclides comienza los Elementos con una lista de 23 definiciones, seguida de 5 postulados (axiomas) que gobiernan todo lo que puede ser construido y que tienen "existencia" matemática. Luego Euclides da sus 5 "nociones comunes" o "verdades lógicas" que tienen relación con las propiedades de la igualdad. Los primeros seis Libros son relativos a la Geometría (plana), en el final del Libro I se incluye la demostración del teorema de Pitágoras (570-500 a.C) y su recíproco.

Cabe aclarar que "el teorema de Pitágoras" se atribuye a Pitágoras por ser probablemente el matemático que obtuvo su primera demostración, pero la relación que plantea ya era conocida por los babilonios.

En los Libros VII, VIII y IX se desarrolla todo lo relativo a la teoría de números enteros (positivos, en esa época no se trabajaba con negativos). En el Libro X se investigan expresiones de cierta complicación con raíces cuadradas tratando de reducirlas a expresiones más simples. Los restantes Libros son estudios sobre Geometría del espacio.

El proceder de Euclides se basa en la propuesta de Aristóteles (384-322 a.C) de teoría axiomática dada en los Segundos Analíticos, donde formula el método deductivo.

Este método consiste en partir de proposiciones llamadas axiomas ó postulados, probar otras proposiciones llamadas teoremas. Cada proposición en la prueba debe estar justificada por un axioma, un teorema previamente probado o por un principio lógico. Esa prueba es la demostración del teorema

(*Sería importante* que usando Internet, con un buscador rápido averigüe e investigue sobre Euclides, Aristóteles, Pitágoras y algo sus obras, es muy interesante además de instructivo).

Una diferencia sustancial entre la teoría dada por Euclides en sus Elementos y las teorías axiomáticas actuales es que Euclides consideraba a sus puntos de partida como verdaderos, no como en la actualidad que las teorías consideran los puntos de partida como hipótesis, sin atribuirles un valor de verdad. Considerar los axiomas de la Matemática como verdaderos es también una idea que Euclides toma de Aristóteles.

Euclides no incluyó en su trabajo un informe del desarrollo de los resultados matemáticos que llevaron siglos para que puedan ser presentados como un cuerpo organizado como el que él presenta.

El trabajo creativo del matemático no procede paso a paso en un razonamiento lógico, esa será la justificación necesaria. El trabajo creativo requiere de pensar, conjeturar y hacer hipótesis, luego de dar una demostración, cosa que también requiere de la intuición , percepción profunda, asociación de ideas, suerte, mucho trabajo y mucha paciencia.

Las matemáticas ya establecidas fueron objeto de distintas formulaciones deductivas. Ellas tuvieron por objeto lograr una presentación coherente y también de comprobar los pasos de una demostración. A través de los siglos (entre los años 3000 antes de Cristo hasta el 1900 después de Cristo) los matemáticos han elaborado los distintos tipos de números y las operaciones con esos números que constituyen el sistema de los números complejos. En cada momento del desarrollo y ampliación de estos números, los matemáticos, sabían precisamente cuales eran estos números y las propiedades que cumplían. En las últimas décadas del siglo XIX los matemáticos decidieron construir un desarrollo lógico del sistema de los números complejos. Para ello trataron de construir axiomas de los que se pudieran deducir las propiedades de los números que ellos ya conocían.

Este tipo de fundamentación se pretendió para todas las ramas de la Matemática (sea el Algebra, la Geometría, el Análisis, etc.) y consistiría en axiomas enunciados con completa exactitud y demostraciones explícitas de todos los resultados, aun de aquellos que pudieran pensarse obvios para la intuición. En lugar de la verdad se pedirá compatibilidad lógica o consistencia.

La axiomatización de la Matemática se llevó adelante y en un congreso internacional de matemáticos que se realizó en París en 1900, Henri Poincaré (uno de los matemáticos más importantes de su tiempo) proclamó que "el rigor había sido alcanzado". En realidad en ese intento se habían usado aspectos que no tenían la consistencia deseada; surgieron así otras formulaciones de la fundamentación que se basan en distintos puntos de partida y posiciones filosóficas sobre ¿qué es la Matemática?

En 1931, Kurt Gödel demostró lo que se conoce con el nombre de *teorema de incompletitud de Gödel*, que demuestra que no existe axiomatización consistente posible de abarcar todas las verdades de la Matemática clásica, inclusive de la aritmética. Este teorema afirma que hay verdades de la aritmética que no son demostrables.

Ante la pregunta ¿qué son los números? Muchos matemáticos darán por respuesta en términos axiomáticos: "unos entes u objetos que cumplen los siguientes axiomas....."
A fines del siglo XIX Giusepppe Peano proporcionó una descripción de los números naturales en término de cinco axiomas. En ellos se pueden interpretar los aspectos familiares de los números naturales. Hay quienes le atribuyen la formulación a Richard Dedekind (1831-1916), pero estos axiomas se conocen vulgarmente como "los axiomas de Peano".
Uno de los aspectos más importantes de esta formulación es el quinto axioma que convalida un método de demostración muy importante y de gran utilidad, pues su uso permite demostrar la validez de proposiciones universales relativas a los números naturales.
El método de inducción y uso es anterior a Peano. Pareciera que el primer europeo que lo usó fue el veneciano Francesco Maurocylus (1491-1575) , está en su libro de aritmética publicado en 1575. Ese método está presente y mejorado en obras de Pierre de Fermat (1601-1665) y Blaise Pascal (1623-1662). El nombre de inducción matemática es usado por primera vez en 1838 por Augustus De Morgan (1806-1871) que hace una descripción detallada del proceso.

1. Rudimentos de Formalización del Lenguaje

Una de las primeras cosas que el ser humano ha aprendido a hacer es hablar.
Para hablar y que eso permita la comunicación con el resto de los hombres tuvo que idear un lenguaje. Por supuesto que hay varios lenguajes. Pasaron miles de años para que se pudiera pasar del lenguaje oral al lenguaje escrito. Se hubieron de crear y convenir en la aceptación de símbolos apropiados para la representación de las ideas.

Todo esto hoy, a la mayoría de la gente le pasa desapercibido. No es así para aquellos que trabajamos en disciplinas que vulgarmente se dicen "exactas" y para los usuarios y creadores de tecnologías muy sofisticada como son las computadoras y los lenguajes de programación.

Reflexionemos un poco sobre nuestras costumbres al expresarnos

En muchas situaciones nuestra expresión es imprecisa. Esto sucede cuando describimos aconteceres de manera subjetiva (es decir cada individuo lo puede interpretar a su modo), en general, cuando expresamos sentimientos u opiniones.
Hay otras situaciones en que nuestro hablar debe ser preciso. Esto es, no debe dejar posibles interpretaciones que distorsionen lo que realmente queremos expresar.
Como una de las soluciones para que no haya ambigüedades, el hombre recurrió a la Matemática para cuantificar algunos conceptos y así dotarlos de objetividad. Se han ideado aparatos para medir las cosas más dispares. Se logró así una asignación de números a hechos o cosas. Es una idea arraigada que los números traen con ellos objetividad, trasparencia **y exactitud.**
Además es importante convenir en valores de aceptación a algunas formas del lenguaje coloquial. Lo que se pretende es encontrar una estructura en el lenguaje que nos permita descartar las ambigüedades.

- ¿Qué pasa con los reglamentos?

Sean éstos de un juego o de algo muy serio (como ser el específico para el Ingreso a la Facultad) tratarán de contemplar todas las posibilidades y ser "claros" (no ambiguos) para que de su lectura y su aplicación se desprenda quién juega, gana o quién entra.

EJEMPLO 1.1.1

Analicemos la implicancia de un artículo del reglamento de la Copa Libres de América (C.L), organizada en América por la F.I.F.A. (Federation International Football Assosiations). Es una Copa que podría existir, pues hay tantas!

- Participarán en la C.L. del año en curso equipos de un país asociado a la F.I.F.A. que haya resultado primero o segundo en el torneo de primera división del fútbol profesional del año anterior.

La A.F.A. (Asociación del Fútbol Argentino) está asociada a la F.I.F.A..

a) De acuerdo al artículo precedente analizar si alguno de los siguientes equipos argentinos pueden participar en C.L. a iniciarse:
   - Defensores de Cambaceres.
   - Estudiantes de La Plata.
   - Rosario Central

Justifique su respuesta.

b) Supongamos que parte de la tabla siguiente es la definitiva del Torneo Fútbol de Primera División de la A.F.A. (en un año imaginario):
   1. Gimnasia y Esgrima de la Plata
   2. Boca Junior.
   3. River Plate

   ....

   ……………….

Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas de acuerdo al artículo dado y la tabla anterior, justifique su respuesta.

i) Gimnasia y Esgrima de La Plata disputa la próxima C.L.

ii) Gimnasia y Esgrima de La Plata y Boca Junior disputan la próxima C.L.

iii) Gimnasia y Esgrima de La Plata y River Plate disputan la próxima C.L.

iv) Estudiantes no juega la próxima C.L.

v) Gimnasia y Esgrima de La Plata no juega la C.L. o Boca Junior juega la C.L.

vi) Gimnasia y Esgrima de La Plata no juega la C.L. y Boca Junior no juega la C.L.

EJEMPLO 1.1.2

Si los artículos de la Reglamentación del Ingreso a la Facultad son:

- Los aspirantes deberán rendir una evaluación diagnostica. La evaluación tendrá un resultado de aprobado o desaprobado.
- La pruebas diagnosticas no son eliminatorias, ni se exige aprobarlas
- La calificación obtenida por el aspirante en cada evaluación, será puesta en conocimiento a través de las carteleras correspondientes
- Los aspirantes deberán acreditar el ochenta por ciento (80%) de asistencia al curso.

Suponga que el número de clases de la asignatura Matemática en las que se computa asistencia es 20. Al final del curso parte de la lista del Ayudante Antonio registra lo siguiente:

APELLIDO y NOMBRE	Asistencia	Prueba
Ferrari, C	90%	Aplazado
González, M	60%	Ausente
Martegani, A	85%	Aprobado
Martínez, M	80%	Aprobado
Robles, A	82%	Ausente
Sollivella, G	100%	Aprobado

¿Cuáles de los alumnos que figuran en este fragmento de lista, están en condiciones de ingresar?

Justifique.

También en las discusiones de todos los días, en la lectura de las noticias y en nuestro diario vivir es importante tener claro como usar el lenguaje y el razonamiento (esto es el obtener conclusiones a partir de algunos datos) de manera adecuada. También importa en el estudio, sobre todo en Matemática.

La idea de esta introducción a la Lógica es dar herramientas que nos permitan decir cuando algunos razonamientos que desarrollamos en nuestras actividades se pueden justificar desde el punto de vista lógico. Ese es interés de la Lógica: hallar **formas** absolutamente verdaderas, que **convaliden los razonamientos.**

Hay argumentos de la vida diaria como:

Voy al cine o al teatro.
Si voy al cine encuentro a María.
No encuentro a María.
―――――――――――――
Voy al teatro

Es claro que de este argumento se pueden extraer las oraciones:

Voy al cine
Voy al teatro.
Encuentro a María

y que el argumento está formado por oraciones que son combinaciones apropiadas de ellas.

Es nuestro interés justificar éstos argumentos o similares, independientemente de las oraciones que lo formen sino por la forma de los mismos.

Podemos representar las oraciones por letras:

p: Voy al cine
q: Voy al teatro.
r: Encuentro a María

y el argumento por:

p o q
Si p entonces r
No es el caso que r
―――――――――――
q

Vamos a dar un sentido más preciso a nuestra discusión.

2. Cálculo Proposicional (Clásico)

Definiciones Básicas en Lógica

Cuando se habla de Lógica moderna se usa referirse a ella como “Lógica Formal”, “Lógica Simbólica”, “Lógica Matemática”. Históricamente la terminología ha aparecido en ese orden.

Lógica Formal es por lo menos tan antigua como los escritos de Arist6teles, en donde ya se observa que la validez de los silogismos depende de su forma y no del significado particular de las proposiciones que los componen

La *Lógica Simbólica* tiene su precursor en Leibnitz (uno de los creadores del Cálculo Infinitesimal) quién se interesó por el problema de descubrir una “characteristica universalis”, es decir un método para simbolizar proposiciones y argumentos de Matemática y Metafísica y "calcular" con las formas simbólicas para averiguar su verdad o validez. Este deseo se cristaliza, apoyado por los progresos del llamado “*método axiomático”*, en el siglo XIX con los trabajos de Boole, De Morgan, Frege, Shröeder, Pierce, y Peano. Puede decirse que esta etapa culmina en

1910 - 1913 con la monumental *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell, en donde una gran parte del raciocinio matemático se reduce a un cálculo simb6lico.
(*Vale la misma sugerencia buscar en las redes*, sobre Boole, Frege, Peano y Russell, son muy importantes sus aportes a la cultura general además de a la Lógica y la Matemática).

El desarrollo posterior corresponde *Lógica Matemática,* cuando los sistemas formales mismos se convierten en objetos de estudio por métodos matemáticos (Metamatemática). Son Hilbert, Löwenheim, Skolem, Gödel, y Tarski, entre otros, los principales propiciadores en la primera mitad del siglo XX de este desarrollo, el cual ha dado resultados muy profundos en los Fundamentos de la Matemática y en la Teoría de Calculabilidad Efectiva, resultados que inciden radicalmente en áreas que van desde la pura especulación filos6fica hasta las aplicaciones prácticas de la Matemática.

La Lógica se ha convertido en un instrumento poderosísimo para el estudio de las Matemáticas mismas, ha llegado a conformar una de las grandes áreas en que se divide su estudio, junto con las tradicionales de Análisis y Algebra. Sus aplicaciones más interesantes son en la Informática, especialmente en Programación y distintos aspectos de lo conocido como Inteligencia Artificial.

Se trabajará con proposiciones y conectivos, razonamientos y deducciones. Estos temas permiten dos acercamientos desde el punto de vista de la forma o la estructura (sintáctico) y desde el punto de vista de su verdad o falsedad (semántico). La Lógica que se presentará en este Curso admite una formalización que escapa a nuestras intenciones y esa formalización garantiza que todo lo que es demostrable sintácticamente (esto es que depende de la estructura de las fórmulas y de las reglas específicamente dadas para deducir) es lógicamente verdadero. El tratamiento en este Curso será ingenuo y se apelará a la intuición aun para las formalizaciones.

Las **proposiciones** son las expresiones a las cuales se puede asignar un valor de verdad.
Admitimos sólo dos posibles **valores de verdad**: verdadero (V) o falso (F).

Por ejemplo, *son proposiciones*:

El número 1 es positivo.

$\sqrt{2}$ es irracional y positivo.

5 divide a 4 ó 5 divide a -6435.

0 es un número primo.

La cifra que ocupa el lugar $10^{-567890214876546789032987654321138767543213457687909 0}$ de π es 3.

Discuta el valor de verdad de cada una de ellas. Es decir, ¿es verdadera o falsa?
Por otra parte, *no son proposiciones:*

Hola, qué tal?

Ufa!

Hurra!

A estas expresiones no se les asigna un valor de verdad.

EJERCICIO 1.2.1

Escriba 5 expresiones que sean proposiciones y 5 expresiones que no lo sean.

Hay **proposiciones atómicas** (que son aquellas que no se pueden descomponer en proposiciones más simples) y que simbolizaremos con letras*: p, q, r,* etc. También usaremos esas letras para referirnos a proposiciones genéricas, es decir ninguna en particular, por eso también *p, q,...,* se llaman **letras** o **variables proposicionales**.

Hay ciertas partículas del lenguaje que conectan (llamados **conectivos**) las proposiciones atómicas, que también tienen simbolizaciones especiales, para formar las proposiciones compuestas.

En el lenguaje cotidiano (o también llamado lenguaje natural) hay muchas expresiones que usamos para "unir" proposiciones y así formar nuevas proposiciones, pero desde cierto punto de vista todas esas expresiones son sustituibles por un número pequeño de ***conectivos***. Dichos conectivos poseen una simbolización (también de las varias maneras que se usan, adoptaremos una de las más usuales) que está dada en la siguiente tabla. La expresión de **operación lógica**, se debe a que a partir de la combinación, usando conectivos, de letras proposicionales se obtiene una nueva proposición. Hay una similitud con el cálculo aritmético en algunos aspectos.

lenguaje natural	simbolización	operación lógica
p y *q*	$p \wedge q$	**conjunción**
p ó *q*	$p \vee q$	**disyunción**
no *p* no es el caso de *p* no es cierto que *p* es falso que *p*	$\sim p$	**negación**
si *p* entonces *q* de p se sigue q *p* implica *q*	$p \rightarrow q$	**condicional**
p si y solamente si *q* *p* equivalente a *q*	$p \leftrightarrow q$	**bicondicional**

Consideremos los siguientes ejemplos de proposiciones:

Mi gato no tiene hambre.
Los gatos son felinos.
La mayoría de los gatos tienen cuatro patas.

Ellas involucran el concepto de gato. Los conceptos identifican una cierta clase de cosa y agrupan a objetos similares, acciones, propiedades y relaciones, pero los conceptos no completan el pensamiento. Las unidades del pensamiento y el discurso son las proposiciones.

Entender proposiciones es una habilidad importante en el razonar. Cuando se toma una posición en una discusión se está aceptando que cierta proposición es válida.

Si no podemos distinguir entre proposiciones que son similares pero no idénticas entonces no seremos capaces de defender nuestros argumentos y podríamos no darnos cuenta si la posición del otro contradice la nuestra. Para la evidencia o para sacar una conclusión es necesario el uso de algunos principios de la Lógica que involucran relaciones entre las proposiciones. Ese será el camino que tomaremos.
Hay palabras que no son idénticas pero expresan el mismo concepto, ellas son sinónimos. De manera semejante dos estructuras gramaticales distintas pueden expresar proposiciones equivalentes (más adelante daremos una definición formal). Por ejemplo:

Juan estuvo mejor que Pedro en el examen.
Pedro estuvo peor que Juan en el examen.

Otro más complejo:
Argentina venció a Brasil en la clasificación.
Brasil fue vencido por Argentina en la clasificación.

EJERCICIO 1.2.2
Determinar si los siguientes pares de oraciones establecen proposiciones equivalentes.

i) La puerta está al lado de la ventana.
La ventana está al lado de la puerta.

ii) El té está preparado.
Yo preparé el té.

iii) El muchacho que cortó el árbol del frente es hermano de mi mejor amiga.
El hermano de mi mejor amiga cortó el árbol del frente.

EJERCICIO 1.2.3

Hacer una lista con las proposiciones componentes de las siguientes proposiciones.

i) Ella llegó a tiempo, pero ella estaba cansada.

ii) Juan vive en una casa blanca y María vive en el bosque.

Estrategia para identificar proposiciones en una oración: preguntarse qué hechos son afirmados.

EJERCICIO 1.2.4

Las siguientes oraciones son declaraciones hechas ante una compañía de seguros por personas que han sufrido accidentes; identificar las proposiciones afirmadas y escribirlas utilizando letras proposicionales y conectivos convenientes

i) Un peatón me chocó y se cayó bajo mi automóvil.

ii) Yo iba por mi mano y el micro me encandiló.

iii) Yo iba por mi mano y el micro me encandiló, entonces choqué el auto que estaba estacionado.

Las proposiciones compuestas y sus valores de verdad

El valor de verdad de una proposición depende del valor de verdad de sus componentes.

Así como una proposición genérica que simbolizamos con la letra p admite uno de los dos posibles valores de verdad V o F, cuando combinamos letras proposicionales con conectivos la forma proposicional resultante tendrá un valor de verdad. Si el conectivo involucra dos letras proposicionales habrá 4 casos de combinación de valores de las componentes. ¿Por qué?

ACTIVIDAD 1.2.5

Discuta el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

i) El número 4 es par y el número 8 es impar.

ii) El número 5 es raíz cuadrada de 25 y el número -5 es raíz cuadrada de 25.

iii) El número 5 es raíz cuadrada de 25 o el número -3 es raíz cuadrada de 25.

iv) El número 4 es raíz cuadrada de 25 o el número -3 es raíz cuadrada de 25.

v) El conjunto de los números naturales está contenido en el conjunto de los números irracionales.

vi) El 0 es el menor número real.

vii) El cuadrado de -8 es 64 y el cuadrado de 4 es 8.

Para que una **conjunción** se verifique, es decir se considere verdadera, deben ser verdaderas cada una de las proposiciones que la forman.

Para que una **disyunción** se verifique, es decir sea verdadera, debe ser verdadera alguna de las proposiciones que la forman.

- Un tipo importante de proposición que se obtiene a partir de una sola proposición es la **negación**.

Son ejemplos:

1. No es cierto que 3 sea un número par.
2. El cuadrado de -1 no es 7.
3. Gimnasia no le ganó a Estudiantes el último domingo.
4. El -2 al cuadrado no es 4.

Por reglas gramaticales del idioma castellano se coloca “no” delante del verbo o núcleo del predicado de la oración.

La proposición dada en 1. es la negación de “3 es un número par”, 1. dice lo mismo que: “NO 3 es un número par”.

Se acostumbra a simbolizar la negación de una proposición anteponiéndole alguno de los símbolos: -, $\sim$ *o* $\neg$. En lo que sigue usaremos $\sim$ para indicar negación.

En este caso 1. lo anotaremos: $\sim$ (3 es un número par)

Vale comentario similar para los otros ejemplos. Observar que la negación por la gramática del idioma castellano, el “no” se coloca por lo general delante del verbo de la oración.

ACTIVIDAD 1.2.6

Explique porqué no es atómica:

1. No es cierto que 3 sea un número par.
2. El cuadrado de -1 no es 7.
3. Gimnasia no le ganó a Estudiantes el último domingo.
4. El -2 al cuadrado no es 4.

EJERCICIO 1.2.7

i) Qué relación hay entre el valor de verdad de una proposición y el valor de verdad de su negación?

ii) Cuál es el valor de verdad de las proposiciones del ejemplo anterior.

iii) Negar las proposiciones de 4.2.6.

- Otra forma de proposición compuesta muy usual en Matemática es el **condicional**.

Son ejemplos:

1. Si 2 divide a 6 entonces 6 es un número par.
2. Si la recta r_1 es paralela a la recta r_2 entonces o son coincidentes o no tienen puntos en común.
3. Si 2 es la distancia entre los puntos P y Q entonces - 2 es la distancia entre Q y P.
4. Si 3 + 4 = 8 entonces 5 es un número primo.
5. Si 2 + 3= 8 entonces 3 es un número par.

Estas proposiciones tienen la estructura “si ***p*** entonces ***q***”.

La proposición que se ubica entre “si” y “entonces” se denomina ***antecedente*** y la que está después de “entonces” se llama ***consecuente***.

Las formas más corrientes de simbolizarlas es utilizando $\rightarrow$, $\supset$, para el conectivo. En lo que sigue se usará $\rightarrow$.

Por ejemplo 1. se simboliza

2 divide a 6 $\rightarrow$ 6 es un número par

Para que un **condicional** se verifique, es decir sea una proposición verdadera, no se debe dar el caso de antecedente verdadero y consecuente falso, o sea para toda otra alternativa de valores de verdad el condicional es verdadero.

EJERCICIO 1.2.8

i) ¿Cuál es el valor de verdad de las proposiciones del ejemplo anterior?

ii) Simbolizar cada una de ellas.

- Más sobre las proposiciones **Condicionales**.

Estas proposiciones también son llamadas hipotéticas. En el lenguaje corriente estas proposiciones se usan para identificar una relación de dependencia entre hechos. Por ejemplo:

Si Juan es alumno de segundo año de la Facultad entonces Juan cumplió las condiciones del ingreso.

Pero formalmente esa dependencia entre antecedente y consecuente no tiene por qué darse.

Hay otras maneras de expresar la misma proposición:

Juan cumplió las condiciones del ingreso si Juan es alumno de segundo año de la Facultad.

En ambos casos sea p: Juan es alumno de segundo año de la Facultad
q: Juan cumplió las condiciones del ingreso

La forma es: Si p entonces q, simbolizando también el conectivo se tiene: $p \rightarrow q$.

De la misma manera se simboliza:

Siempre que Juan sea alumno de segundo año de la Facultad, Juan cumplió las condiciones del ingreso.

También:

Juan es alumno de segundo año de la Facultad, sólo si Juan cumplió las condiciones del ingreso.

Juan cumplió las condiciones del ingreso es condición necesaria para Juan sea alumno de segundo año de la Facultad.

En el lenguaje corriente también se usa esta forma de proposición para indicar asombro, perplejidad o descrédito como en el siguiente caso:

Si Juan es buen jugador, yo soy Maradona.

Dé algunos ejemplos similares a este último uso.

Resumen

lenguaje natural	simbolización	operación lógica
Si p **entonces** q p, **sólo si** q q, **si** p p es **condición suficiente** para q q es **condición necesaria** para p	$p \rightarrow q$	**condicional**

EJERCICIO 1.2.9

Para cada una de las siguientes proposiciones identificar las componentes y los conectivos. Poner la proposición en forma simbólica.

i) María escuchó la historia y ella se enojó.

ii) Los jugadores están cansados, pero ellos están muy felices.

iii) Ganar no es todo.

iv) Juan termina el partido u Osvaldo reemplaza a Juan en el segundo tiempo..

v) Pedro es un excelente cocinero aunque odia la comida.

vi) Si los zapatos están en liquidación, me compraré dos pares.

vii) El es un loco o un genio.

viii) Usted va a triunfar sólo si usted trabaja mucho.

ix) Tener el 80% de asistencia es condición necesaria para entrar a la Facultad.

x) Si Guillermo ganó la final entonces Guillermo ganó la semifinal.

xi) Guillermo ganó la semifinal si Guillermo ganó la final.

xii) Guillermo ganó la semifinal es condición necesaria para que Guillermo haya ganado la final.

xiii) Guillermo ganó la final es suficiente para que Guillermo haya ganado la semifinal.

xiv) David perdió un partido entonces David no llego al puntaje que quería en el ranking.

Tablas de verdad

Recapitulando los comentarios sobre los valores de verdad de las proposiciones, podemos presentar los valores de verdad de las formas proposicionales compuestas en tablas, que se llaman **tablas de verdad.**

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	$\sim p$
V	F
F	V

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- Consideremos un caso particular para hacer algunos comentarios sobre la tabla de verdad del condicional:

Si Juan estudió mucho entonces Juan aprobó el examen.

El antecedente, *p*: Juan estudió mucho

el consecuente, *q*: Juan aprobó el examen

¿Cuáles combinaciones de la tabla de verdad son consistentes con su opinión y la tabla dada?

Supongamos que: Juan estudió mucho (*p*) y que Juan aprobó el examen (*q*).
Entonces *p* y *q* son ambas verdaderas al igual que lo dado en la primera línea de la tabla del condicional.

También resultará aceptable que si Juan **no** estudió mucho y Juan **no** aprobó el examen, sea verdadera y concordante con lo que afirma el condicional. Es la línea 4 de su tabla.

Supongamos que Juan **no** estudió mucho y que Juan (igual) aprobó el examen.
¿Esto hace que el condicional sea falso? No. La proposición "Si *p* entonces *q*" no dice que la única manera de aprobar el examen sea estudiando mucho, el examen puede ser muy fácil (nadie sospecha que haya copia...). Esto es la 3° línea de la tabla del condicional.

En el caso que Juan estudió mucho y Juan **no** aprobó el examen, allí diremos que lo que dice el condicional "Si *p* entonces *q*" es falso. Es la 2° línea de su tabla de verdad.

El ejemplo presenta un condicional que establece una relación entre causa y efecto.

Se pueden considerar condicionales abstractamente con *p* y *q* sin ninguna relación, y por lo tanto no tiene porqué resultar tan explicable ni aceptable su tabla de verdad, pero es una definición que así resulta muy útil para sus aplicaciones. Piense un análisis sobre el siguiente condicional: *Si 2 es un número irracional entonces el Papa saldrá al balcón.*
Es muy posible que la tabal dada no lo convenza!!!

Observación: El valor de verdad de una proposición compuesta, dado por su tabla de verdad, es una asignación de verdad a la fórmula proposicional, que depende de cual es el conectivo y de los valores de verdad de las componentes de la fórmula. La manera que se ha definido esa asignación se adecua a la interpretación en el lenguaje corriente de los conectivos, pero recordar que vale para cualquier interpretación de las letras proposicionales.

EJERCICIO 1.2.10

i) Escriba proposiciones que respondan a las formas:

$$(p \wedge q) \vee r$$

$$p \wedge (q \vee r)$$

ii) Ídem para:

$$p \to (q \to r)$$

$$(p \to q) \to r$$

- Otro conectivo que es importante considerar es el **bicondicional**.

Este conectivo se puede definir en términos de la conjunción y el condicional.
Un ejemplo es:

El agua está en ebullición si y sólo si la temperatura del agua es de 100° C.

e: el agua está en ebullición
t: la temperatura del agua es de 100° C.

Esta proposición se simboliza por

$(e \to t) \wedge (t \to e)$ o por $e \leftrightarrow t$

La tabla de verdad del **bicondicional**:

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Observar que el **bicondicional** $p \leftrightarrow q$ es verdadero si p y q tienen el mismo valor de verdad y falso si los valores de verdad son diferentes.

Cuál es el valor de verdad de:

Los pájaros vuelan si y sólo si La Plata es la Capital de la Pcia. de Bs. As..
Sarmiento escribió Martín Fierro si y sólo si 3+2=7.

EJEMPLO 1.2.11

Explicar los pasos a seguir para construir una tabla de verdad para la forma proposicional:

$p \to (q \wedge r)$.

Solución**:** Para eso se debe analizar cuáles son las letras proposicionales intervinientes, una columna para cada letra y dar la posibilidad de la combinación de todas las alternativas de verdad para cada letra. Se hará una columna por cada componente de la forma proposicional:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	V
V	V	F	F	F
V	F	F	F	F
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

EJERCICIO 1.2.12

Construir la tabla de verdad para las formas proposicionales:

$i)$ $p \vee (q \vee p)$

$ii)$ $\sim r \leftrightarrow s$

$iii)$ $((\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q))$

$iv)$ $\sim (p \wedge q) \rightarrow (q \vee r)$

$v)$ $((p \wedge q) \rightarrow (q \vee r))$

EJERCICIO 1.2.13

a) Escribir cada una de las siguientes proposiciones en forma simbólica, reemplazando las palabras y signos de puntuación por correctivos y paréntesis.

Cuál es el valor de verdad si p es V y q es F?

i) *p si q.*

ii) *bien p o q.*

iii) *No es el caso que r*

iv) *Ninguno de ambos p y q.*

v) *p o q si y solo si r.*

vi) *Si p o bien q o r, entonces s.*

b) De un ejemplo de proposición para cada una de las formas proposicionales dadas.

Equivalencia Lógica

Analicemos la siguiente proposición:

María aprobó el examen de francés.

Y comparemos con:

No es cierto que María no aprobó el examen de francés.

¿Qué puede decir respecto de lo que dicen?
Formalmente ellas son proposiciones distintas, como claramente lo vemos al simbolizarlas:

a : *María aprobó el examen de francés.*

$\sim(\sim a)$: *No es cierto que María no aprobó el examen de francés.*

Pero ***expresan lo mismo.*** Eso puede pasar con muchas proposiciones.
Consideremos dos fórmulas proposicionales que indicaremos por P y Q que estén formadas por las mismas letras proposicionales.
En el ejemplo anterior, P es a y Q es $\sim(\sim a)$,

otro caso podría ser P: $p \to q$ y Q : $\sim p \vee q$;

otro P: $p \to (q \wedge r)$ y Q : $(p \wedge q) \to (r \wedge p)$

P y Q (que involucran las mismas letras proposicionales) son ***lógicamente equivalentes*** si el bicondicional $P \leftrightarrow Q$ es verdadero para todos los valores de verdad de sus componentes.
Por simplicidad también se dice P y Q ***equivalentes***.

Lo anotaremos $P \Leftrightarrow Q$

Observar que hemos usado una doble flecha $\Leftrightarrow$.



También es usual encontrar el símbolo $\equiv$, para indicar equivalencia. Este es claramente una deformación del símbolo de igualdad, pero hay que tener muy presente que las proposiciones ***no son iguales*** aunque “digan lo mismo”.

La equivalencia lógica es más que un bicondicional entre proposiciones.
Analicemos exhaustivamente que significa la exigencia “$P \leftrightarrow Q$ es verdadero para todos los valores de verdad de sus componentes”, si pensamos en la tabla de verdad del bicondicional:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Luego se rescatan los casos en que P y Q tienen igual valor de verdad, además deben estar formadas por las mismas letras proposicionales y no necesariamente los mismos conectivos !!!

Es claro que en una discusión es posible "cambiar" una proposición por otra lógicamente equivalente sin alterar el sentido del discurso, esto también es posible en los razonamientos que veremos luego. Por eso el interés de encontrar formas proposicionales equivalentes.

EJERCICIO 1.2.14

Si dos fórmulas atómicas son equivalentes, ¿cómo son?

La misma definición nos sugiere un método efectivo para analizar la equivalencia de formas proposicionales. ¿***Cuál es la estrategia?***

Hacer tablas de verdad, que pueden ser trabajosas, pero es un proceso efectivo para dilucidar la cuestión.

Por lo general requiere de paciencia….

EJEMPLO 1.2.15:

Comprobemos que para toda variable proposicional p, $p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$

Solución: Analizando la tabla de verdad correspondiente:

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$	$p \leftrightarrow \sim(\sim p)$
V	F	V	V
F	V	F	V

A esta equivalencia se le da el nombre de **regla (de equivalencia) de la doble negación**

Luego esto vale para cualquier proposición, un caso de ello es el ejemplo dado inicialmente.

EJEMPLO 1.2.16

¿Son equivalentes $p \to q$ y $\sim p \vee q$?

Solución: Analizando la tabla de verdad correspondiente al bicondicional entre ambas

p	q	$p \to q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$(p \to q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

- Por definición son equivalentes. Esta equivalencia está estableciendo que es posible escribir un condicional en términos de negación y disyunción, pero como vale la regla de la doble negación también permite expresar una disyunción en términos de un condicional.

EJERCICIO 1.2.17
Escriba una fórmula equivalente a $p \vee q$ en términos de $\to$.

EJEMPLO 1.2.18
¿Son equivalentes $p \to (q \wedge r)$ y $(p \wedge q) \to (r \wedge p)$?

Solución: Para resolverlo hacemos la tabla del bicondicinal entre ambas formas

p	q	r	$p \to (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \to (r \wedge p)$	$(p \to (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \to (r \wedge p))$
V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V

Como se destaca, en las líneas 2 y 6 en la columna del bicondicional hay F, por lo cual no son equivalentes.

EJERCICIO 1.2.19:
Estudiar la equivalencia lógica de las fórmulas proposicionales que se dan en cada caso:

i) $p, \quad p \wedge p, \quad p \vee p$

ii) $p \wedge (q \wedge r), \quad (p \wedge q) \wedge r$

iii) $p \vee (q \vee r), \quad (p \vee q) \vee r$

iv) $p \wedge q, \quad q \wedge p$

v) $p \vee q, \quad q \vee p$

vi) $p \wedge (q \vee r), \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

vii) $p \vee (q \wedge r), \quad (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

viii) $\sim (p \wedge q), \quad \sim p \vee \sim q$

ix) $\sim (p \vee q), \quad \sim p \wedge \sim q$

¿Qué sugieren las equivalencias comprobadas en ii) y iii) ? ¿Les pondría algún nombre?
¿Qué sugieren las equivalencias comprobadas en iv) y v)? ¿algún nombre? ¿Y para vi) y vii)?

Las equivalencias comprobadas en viii) y ix) dan una "herramienta" para negar conjunciones y disyunciones. Se llaman **reglas o leyes de De Morgan**.

EJERCICIO 1.2.20
Escriba proposiciones que sean instancias de cada una de las formas dadas en el ejercicio anterior. ¿Le convence que son equivalentes?

1. Analice las siguientes proposiciones:

Si subió la marea entonces hay almejas en la costa.
No hay almejas en la costa entonces no subió la marea.

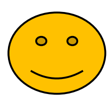
Suponga que el valor de verdad de la primera es V, ¿qué puede decir del valor de verdad de la segunda?
Simbolice cada una de ellas.
Eso le ayudara para razonar y contestar esa pregunta más rápidamente.

2. Analice las siguientes proposiciones:

Si en Internet está el reglamento entonces José sabe las condiciones para entrar.
José no sabe las condiciones para entrar entonces en Internet no está el reglamento.

Suponga que el valor de verdad de la primera es F, ¿qué puede decir del valor de verdad de la segunda?
Simbolice cada una de ellas.
¿Se anima a conjeturar algo?

Conjetura: algo que se cree que es válido, pero todavía no se probó que vale….



EJERCICIO 1.2.21

Estudiar la equivalencia lógica de las fórmulas proposicionales que se dan en cada caso:

i) $p \to q, \quad \sim q \to \sim p$

ii) $p \to q, \quad \sim p \vee q, \quad \sim (p \wedge \sim q)$

iii) $p \to (q \to r), \quad (p \wedge q) \to r$

iv) $p \to q, \quad q \to p$

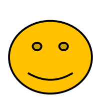
La equivalencia que probó en i) se llama regla de la **contrarecíproca.**
Muy importante de recordar.

EJERCICIO 1.2.22

Escriba proposiciones que sean instancias de cada una de las formas dadas en el ejercicio anterior.

¿Le convence que son equivalentes?

Todas las equivalencias que ha demostrado es muy útil tenerlas presente.



Por ello se sugiere el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 1.2.23

Hacer un cuadro resumen donde estén las equivalencias todas juntas (Si recuerda el nombre mejor).

$p \Leftrightarrow (p \vee p) \Leftrightarrow (p \wedge p)$	$(p \wedge (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$
.... …………………………….	.... …………………………..

3. Demostraciones

➢ Análisis de argumentos o razonamientos

Hay cosas que se saben por simple observación. Uno puede decir acertadamente si está lloviendo simplemente mirando para afuera. También puede decidir si el agua es fría o templada simplemente poniendo la mano en el agua. Nuestra propia experiencia y la memoria de las cosas que percibimos en el pasado son cosas que sabemos. A esto hay que agregar también la experiencia de otros. Por ejemplo: cómo sabemos el día que nacimos? La experiencia propia de haber nacido no alcanza, nuestros padres nos han dicho y le hemos creído. De la misma manera aceptamos de los historiadores y ellos de otras personas, en un camino hacia el pasado hasta llegar a contemporáneos al 25 de mayo de 1810, que ese día asumió el Primer Gobierno Patrio. Pero hay conocimiento que trasciende la experiencia colectiva. Se saben cosas de los orígenes de la Tierra, de las dimensiones del Universo o de los componentes del átomo que no han sido observados directamente por nadie. Para estos casos procedemos por medio de razonamientos. Cuando razonamos se usan relaciones entre proposiciones para sacar nuestro conocimiento de todo lo que se ha podido experimentar directamente y otras se dan por ciertas.
Considerar la siguiente proposición:

Las piedras en la China ruedan por la ladera de la montaña.

Dé razones por las cuales Ud. piensa que la afirmación anterior es verdadera.
La proposición "Las piedras ..." es la **conclusión** de una serie de otras proposiciones (las dadas por usted para convalidarla) que consideramos como dadas y se llaman **premisas**.

Por sí misma una proposición no es una premisa ni tampoco conclusión. Una proposición es premisa o conclusión con respecto a otras proposiciones.

¿Cierto????

El conjunto de premisas junto con la conclusión es llamado **argumento** o **razonamiento**.
Las proposiciones que llamamos premisas son el soporte o evidencia para la proposición que se llama conclusión.
Una manera común de decir es que la conclusión se **deriva** o **infiere** de las premisas.

EJEMPLOS

¿Qué conclusión infiere de las siguientes proposiciones?

(Se supone que las dice una persona que no miente):

Justifique su respuesta, intuitivamente.

Si hace menos de 28^0C entonces salgo a correr

Hace menos de 28^0 C

Voy al teatro o me quedo en casa mirando televisión.

No me quedo en casa mirando televisión.

EJERCICIO 1.3.1

En cada argumento identificar la conclusión y numerar cada una de las premisas.

i) *Para ser informático se debe ser muy reflexivo y detallista, y Pedro no lo es, luego él no se recibirá de informático.*

ii) *Manuel Belgrano fue una persona muy importante para la Argentina. Belgrano trabajó en el Consulado, además fue secretario de la Primera Junta de Gobierno. Después en Tucumán condujo como general el Ejército y además había creado la bandera nacional.*

iii) *Como mi auto no arranca, tendré que tomar el micro, entonces necesito cambio para el pasaje.*

EJERCICIO 1.3.2

Arme un razonamiento donde cada una de las siguientes proposiciones sea:

a) Conclusión.
b) Premisa

i) *Los jugadores de fútbol profesional ganan mucho más que un docente universitario.*
ii) *Los adultos son responsables de sus acciones.*
iii) *A la democracia vale la pena defenderla.*

➢ Formalicemos lo formal

Se quiere, mediante definiciones poder analizar si una determinada derivación (arribar a una conclusión) a partir de hipótesis dadas (lo que se tiene como dato o sabido) es una *buena manera de razonar.*

Un argumento o razonamiento es **lógicamente válido** si de premisas verdaderas no se puede deducir una conclusión falsa.

- **¿Cómo se convalida un razonamiento?**

Una manera muy clara y efectiva es por tablas de verdad.

Si el razonamiento es de la forma: $P_1,\ P_2,\ P_3,...,\ P_n, C,$ donde $P_1,...,\ P_n$ son las premisas y C la conclusión, se acostumbra escribir:

$P_1, P_2, .., P_n /\ \ C$, o también

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline C \end{array}$$

Ambas maneras expresan que de $P_1,...,\ P_n$ se deduce C.

Para que esto sea correcto lógicamente, debe cumplirse lo siguiente:

$(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n)\ \rightarrow C$ sea un condicional "siempre verdadero".

Esto es, para todos los valores de verdad que puedan darse como combinación de los valores de las letras proposicionales que componen las premisas $P_1,...,\ P_n$ y la conclusión *C,* el valor de verdad del condicional sea V.

- Se construye el condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \rightarrow C$ y se hace su tabla de verdad.
- ¿Cuándo el condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \rightarrow C$ es F ?

  Será F en el caso que todas las premisas sean V y la conclusión sea F.

  Si hay un caso en esta situación, significa que **el razonamiento no es válido.**
- Y será **válido** en el caso que siempre (esto es, en cada línea de valores) el condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n)\ \rightarrow C$ resulte verdadero.

- **¿Cómo se deduce?**

Aplicando reiteradamente reglas **de derivación** que cumplan la condición que, de premisas verdaderas no se pueda arribar a una conclusión falsa.
Son sinónimos: **reglas de deducción, reglas de derivación, reglas de inferencia.**

La más natural de todas las reglas es la llamada **Modus Ponens**.
Pongámosla a prueba, ¿qué concluye si tiene las siguientes proposiciones como premisas?:

Si Guillermo ganó el partido entonces Guillermo salió campeón.
Guillermo ganó el partido.

Seguramente que: *Guillermo salió campeón.*

La **estructura formal** es:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad} \\ \quad q \end{array}$$

Veamos que respeta la definición de razonamiento lógicamente válido. Para ello usaremos el método de convalidación por tabla de verdad.

Hay dos métodos basados en tablas de verdad para analizar la validez de un razonamiento.

Método 1:
Para el del ejemplo, construimos una tabla de verdad que tiene por columnas las letras proposicionales o componentes, las premisas y la conclusión.

Componentes		**Premisas**		**Conclusión**
p	***q***	***p→q***	***p***	***q***
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	F	F	F

Estrategia de análisis:

- Buscamos líneas en que la conclusión sea F. ¿Hay? Si, son la 2da. y 4ta. línea.
- Analizamos si en estas líneas las premisas son V. En la 2da línea hay una premisa F, en la 4ta. línea las dos premisas son F. Luego, ***no*** se da el caso de premisas V y conclusión F.

Luego, este razonamiento es lógicamente válido.

Este **mismo esquema y proceder** se puede usar para analizar cualquier razonamiento $P_1, P_2, .., P_n / \ C$.

Método 2:

Se basa también en tablas de verdad pero tiene un trabajo adicional.

Primero se debe recordar la tabla de verdad del condicional: sólo es F si el antecedente es V y el consecuente es F, en todo otro caso es V.

También recordemos que una conjunción es V sólo en el caso que ambas letras proposicionales sean V. Esto es así también para cualquier número de conyuntos.

- Para ello *se construye* una forma proposicional *condicional*, formando el antecedente con la conjunción de las premisas y como consecuente la conclusión.

En este caso será:

$$((p \to q) \wedge p) \to q$$

Se hace la tabla de este condicional:

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$((p \to q) \wedge p) \to q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

- Se analiza si en alguna línea de la columna del condicional (el fabricado) es F. ¿Hay? No. Luego el razonamiento es lógicamente válido.

Veamos otro razonamiento:

Si Guillermo ganó el partido entonces Guillermo salió campeón.
Guillermo salió campeón.

Guillermo ganó el partido.

Analicemos su validez lógica.

Su forma es:

$$\begin{array}{c} p \to q \\ \underline{q \qquad} \\ p \end{array}$$

Por Método 1:

Componentes		Premisas		Conclusión
p	*q*	$p \to q$	*q*	*p*
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	F

En las líneas 3 y 4 la conclusión es F, y en la línea 3 ambas premisas son V, por lo tanto el razonamiento es lógicamente inválido.

ACTIVIDAD 1.3.3

Demuestre utilizando el Método 2 que:

$$\begin{array}{c} p \to q \\ \underline{q \qquad} \\ p \end{array}$$

es un razonamiento lógicamente inválido.

OJO!!!

Este último (mal) ejemplo debe “tenerse en mente”.

Es un error muy común esta mala forma de razonar. NO es lógicamente válida.

Más ejemplos:

Si Argentina ganó o empató entonces va a la final.
Argentina ganó.
____
Luego, Argentina va a la final.

La forma del razonamiento:

$$\frac{\begin{array}{l}(g \vee e) \rightarrow f \\ g\end{array}}{f}$$

siendo:

g: Argentina ganó. *e: Argentina empató.* *f: Argentina va a la final.*

Para analizar si el razonamiento es lógicamente válido usaremos el Método 2.
Observar que al haber 3 letras proposicionales la tabla tiene 8 líneas (ya la cosa se está complicando.... no deja de ser efectivo pero da trabajo).

g	e	f	$g \vee e$	$(g \vee e) \rightarrow f$	$((g \vee e) \rightarrow f) \wedge g$	$(((g \vee e) \rightarrow f) \wedge g) \rightarrow f$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	V
F	F	V	F	V	F	V
V	V	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	F	F	V	F	V

Luego esto significa que el razonamiento es lógicamente válido. (Lógica aparte, si la conclusión resulta verdadera mejor...)

Más ejemplos:

Si María consiguió trabajo entonces María ganó dinero.
Si María ganó dinero entonces María compró una moto.
____
Luego, si María consiguió trabajo entonces María compró una moto

Veamos la forma de este razonamiento:

$$\frac{\begin{array}{l} t \to d \\ d \to m \end{array}}{t \to m}$$

Donde: *t*: *María consiguió trabajo*

d: María ganó dinero

m: *María compró una moto.*

Veamos que esta es una manera lógicamente correcta de razonar:

t	*d*	*m*	*t→ d*	*d→ m*	*t→ m*	*(t→d) ∧ (d→m)*	*((t→d) ∧ (d→m)) → (t→ m)*
V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

EJERCICIO 1.3.4

Utilizando el Método 1 ó 2 analizar la validez de las siguientes formas de razonamiento:

a) $$\frac{\begin{array}{l} a \to b \\ \sim b \end{array}}{\sim a}$$

b) $$\frac{\begin{array}{l} c \vee d \\ d \end{array}}{\sim c}$$

c) $$\frac{\begin{array}{l} e \to f \\ \sim e \end{array}}{f}$$

d) $$\frac{g \to h}{g \to (g \wedge h)}$$

e) $$\frac{\sim (m \wedge n)}{\sim m}$$

f) $$\frac{\begin{array}{l} a \to \sim (b \wedge c) \\ a \end{array}}{b}$$

g) $$\frac{\begin{array}{l} s \to (t \wedge v) \\ \sim v \end{array}}{\sim s}$$

➢ Una manera de reducir el Método de las Tablas de Verdad

Ya es algo molesto analizar usando tablas de verdad razonamientos que involucren 3 letras proposicionales pues ello significa llenar 8 líneas de valores.
Cada letra proposicional que se que incorpora duplica el número de líneas para considerar todas las posibilidades de combinación. ¿Por qué?

Mediante un ejemplo, se describe un método que también usa las tablas de verdad pero de una manera reducida para analizar la validez lógica de un razonamiento. Tratando de llegar a una contradicción.

Dado un razonamiento de la forma:

$$\begin{array}{l} 1.\ (p \to q) \wedge (r \to s) \\ 2.\ \ p \vee r \\ \hline \qquad q \vee s \end{array}$$

- Se colocan en una misma línea las premisas y la conclusión:

Premisas		Conclusión
$(p \to q) \wedge (r \to s)$	$p \vee r$	$q \vee s$
V	V	F

- Se coloca el valor V a las premisas y el valor F a la conclusión.

- Se analiza si tal asignación es posible. Esto llevará a buscar con los valores de las letras proposicionales que hagan posible esa asignación.

  Si esta asignación es posible el razonamiento es no lógicamente válido, si esta asignación no es posible, el razonamiento es lógicamente válido.

- Cada proposición se trabaja "***hacia arriba***", desde el conectivo principal a los conectivos secundarios, hasta llegar a los valores que tienen que tomar las letras proposicionales para que esos sean los valores atribuidos a las proposiciones.

Esto depende del tipo de proposición presente en el razonamiento, es importante encontrar aquellas que ofrezcan el menor número de alternativas para el valor dado, pues esto limita favorablemente el trabajo.

Si la conclusión es F, son F tanto *q* como *s.*

Esos valores de verdad se deben trasladar a esas letras en las otras formas proposicionales.

Premisas		Conclusión
$(p \to q) \land (r \to s)$	$p \lor r$	$q \lor s$
↑ ↑ V V **V**	**V**	↑ ↑ F F **F**

Si una conjunción es verdadera, ambas proposiciones lo son.

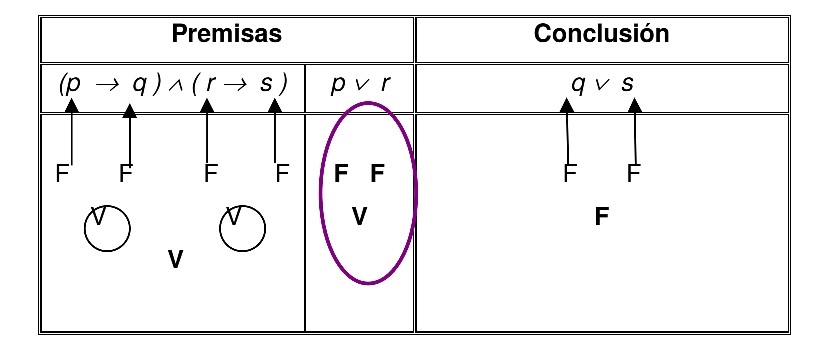
Esto forzará los valores de *p* y *r* pues ambos condicionales de la primer premisa deben ser V.

Debido a la tabla del condicional, los antecedentes (*p* y *r*) también deben ser F :

Premisas		Conclusión
$(p \to q) \land (r \to s)$	$p \lor r$	$q \lor s$
↑ ↑ ↑ ↑ F F F F (V) (V) **V**	**V**	↑ ↑ F F **F**

Este valor para *p* y *r* en la primer premisa debe trasladarse a la segunda premisa.

Pero entonces..., miremos que pasa en la segunda premisa:



Premisas		Conclusión
$(p \to q) \land (r \to s)$	$p \lor r$	$q \lor s$
↑ ↑ ↑ ↑ F F F F (V) (V) **V**	**F F** **V**	↑ ↑ F F **F**

Se pretende una disyunción V con ambas letras proposicionales F. Este no puede ser (por la tabla de la disyunción).

¿Qué significa todo esto? Que **NO** hay posibilidad de premisas verdaderas y conclusión falsa.

Entonces, el razonamiento es lógicamente válido.

Observar que si se hubiera usado el método de las tabla de verdad (1 ó 2) en este ejemplo, se hubiera tenido que formar una tabla de 16 líneas, que es más trabajoso que el trabajo descripto.

Este método es aplicable en general para cualquier razonamiento $P_1, P_2, .., P_n / \ C$.

Se hace una disposición y trabajo similar al descripto. Su practicidad es más apreciable cuanto mayor es el número de letras que hay en las formas proposicionales intervinientes.

❖ Pruebas o demostraciones

El método reducido que se basa en las tablas de verdad es un camino para analizar la validez de una forma de razonamiento y es conveniente cuando dicho argumento tiene varias variables proposicionales y varias premisas, es una alternativa de los métodos 1 y 2 para el análisis de la validez de un razonamiento, pero hay otra manera de analizarlo.

Esto es, encontrar una cadena de pequeñas demostraciones o justificaciones que paso a paso permitan saliendo de las premisas arribar a la conclusión. Esto es dar una **prueba** o **demostración** del razonamiento.

Hay una serie de justificaciones válidas, buenas maneras de razonar desde el punto de vista lógico (de premisas verdaderas no permiten obtener conclusiones falsas), las llamadas ***reglas de inferencia*** (muchas de ellas tienen nombre). Hemos visto ya algunas de ellas:

El **Modus Ponens**

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ \quad q \end{array}$$

El **Silogismo Hipotético**

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ p \to r \end{array}$$

El **Modus Tollens**

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\sim q \qquad} \\ \ \sim p \end{array}$$

Claramente es una buena manera de razonar **sustituir** una forma proposicional por otra equivalente.

Justifique esa afirmación.

EJEMPLO 1.3.5

Probemos que son reglas de inferencia también:

Silogismo disyuntivo

i)

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\sim p} \\ q \end{array}$$

Gana o empata
No gana
empata

ii)

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\sim q} \\ p \end{array}$$

Gana o empata
No empata
gana

¿Cuál es la idea intuitiva? Si afirmo una disyunción y también la negación de uno de los disyuntos el otro disyunto debe ser verdadero.

Para i) se aplica el método 2.

		Premisa	***Premisa***	***Conj. de Prem.***	***Condicional***
p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p$	$((p \vee q) \wedge \sim p) \to q$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V

Hágalo para ii). O use que $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$, y en ese caso ii) tiene "la forma" de i).

Daremos más reglas de inferencia que se utilizan mucho tanto en demostraciones matemáticas como en los razonamientos cotidianos.
La mayoría de ellas son muy intuitivas además de ser maneras válidas de razonar.
Se han puesto los nombres de las reglas pero no es imprescindible recordarlos aunque ello sea útil.

Simplificación

i)

$$\begin{array}{c} \underline{p \wedge q} \\ p \end{array}$$

Cantó y bailó
cantó

ii)

$$\begin{array}{c} \underline{p \wedge q} \\ q \end{array}$$

Cantó y bailó
bailó

Adición

$$\frac{p}{p \vee q}$$

$\dfrac{\textit{Estudio}}{\textit{estudio o paseo}}$

ACTIVIDAD 1.3.6

Demuestre que la simplificación y la adición son reglas de inferencia y de una interpretación intuitiva.

ACTIVIDAD1.3.7

¿Es una regla de inferencia: $\dfrac{p}{p \wedge q}$?

Justifique. De un ejemplo que refuerce su opinión.

ACTIVIDAD 1.3.8

La siguiente es una regla de inferencia? Justifique.

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline p \wedge q \end{array}$$

ACTIVIDAD 1.3.9

Explique la diferencia entre lo propuesto por los dos ejercicios anteriores. La regla se llama **conjunción.**

EJERCICIO. 1.3.10

Escriba un ejemplo que ilustre la aplicación de:

i) Silogismo Disyuntivo.
ii) Simplificación.
iii) Adición.
iv) Conjunción.

Veamos el siguiente ejemplo:

Si entro a Internet entonces encuentro las ofertas que necesito; pero si voy a mirar vidrieras, me compro algo que me tienta. Estas son mis alternativas: entro a Internet o voy a mirar vidrieras. Por lo tanto o bien encuentro las ofertas que necesito o me compro algo que me tienta.

Simbolizando:
i: (yo) entro a Internet.
o: (yo) encuentro las ofertas que necesito.
v: (yo) voy a mirar vidrieras.
c: (yo) me compro algo que me tienta.

$$\begin{array}{l} (i \to o) \wedge (v \to c) \\ \underline{i \vee v \qquad\qquad} \\ \qquad o \vee c \end{array}$$

Este argumento presenta un **dilema**, es común en la táctica de debates y es una forma de pensar sobre alternativas de acción.

EJERCICIO 1.3.11
Verificar que la forma ejemplificada antes:

$$\begin{array}{l} (p \to q) \wedge (r \to s) \\ \underline{p \vee r \qquad\qquad} \\ \qquad q \vee s \end{array}$$

es una manera válida de razonar.

EJERCICIO 1.3.12:
¿En qué se transforma la anterior forma si $q = s$?
Dé un ejemplo de razonamiento de esta forma.

Se hará una tabla para tener a mano de equivalencias lógica y reglas de inferencias.

RESUMEN de las REGLAS de BÁSICAS de RAZONAMIENTO

REGLAS POR EQUIVALENCIAS

$p \Leftrightarrow p \wedge p \Leftrightarrow p \vee p$ *Tautología (T)*	$p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$ *Doble negación (DN)*

$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r \qquad p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ *Asociatividad (As.)*

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p \qquad p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ *Conmutatividad (Conm.)*

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ *Distributividad (Dist.)*

$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \qquad \sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ *De Morgan*

$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$ *Implicación*

$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$ *Contraposición*

FORMAS BÁSICAS DE INFERENCIA

$\dfrac{p \rightarrow q \quad p}{q}$ **Modus Ponens (MP)**	$\dfrac{p \rightarrow q \quad \sim q}{\sim p}$ **Modus Tollens (MT)**
$\dfrac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$ **Silogismo Hipotético (SH)**	$\dfrac{p \vee q \quad \sim q}{p}$ **Silogismo Disyuntivo (SD)**
$\dfrac{p \wedge q}{p}$; $\dfrac{p \wedge q}{q}$ **Simplificación (Simp.)**	$\dfrac{p}{p \vee q}$; $\dfrac{q}{p \vee q}$ **Adición (Ad.)**
$\dfrac{p \quad q}{p \wedge q}$ **Conjunción (Conj.)**	$\dfrac{(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \quad p \vee r}{q \vee s}$ **Dilema (Dil.)**

¿Cómo se construye una prueba?

Vamos a presentar el método mediante un ejemplo:

Si sigue la recesión o el ministro aumenta los impuestos entonces el presidente no será reelegido.
Sigue la recesión

El presidente no será reelegido.

Para dar una prueba formal de validez:

- Se simbolizan las premisas y la conclusión:
  r: sigue la recesión este año.
  d: o el ministro aumenta los impuestos.
  p: el presidente será reelegido.

- Se simboliza el razonamiento:

$$\begin{array}{l} (r \vee a) \to \sim p \\ r \\ \hline \quad \sim p \end{array}$$

- Se numeran las premisas y se disponen encolumnadas:

$I.$	$(r \vee a) \to \sim p$	(P)
2.	r	(P)

En una última columna se pone el porqué de la proposición. La (*P*) significa que es premisa y por eso está.
Luego hay que ir pensando y encontrando (lo que no es fácil cuando uno comienza) cuáles son las reglas, que permiten llegar a la conclusión.

La conclusión es el consecuente de 1, para "sacarlo" tendríamos que poder afirmar el antecedente. ¿Efectivamente es posible? sí, se sigue así:

$I.$	$(r \vee a) \to \sim p$	(P)
2.	r	(P)
3.	$r \vee a$	de (2) por adición

Por lo cual de (1) y (3) por Modus Ponens tenemos la conclusión.

Escribamos toda la prueba junta:

$I.\quad (r \vee a) \to \sim p \qquad (P)$
$2.\quad r \qquad (P)$
$3.\quad r \vee a$ de (2) por adición
$4.\quad \sim p$ de (1) y (3) por Modus Ponens.

Método de prueba formal:

- Disponer en 3 columnas el número de la proposición, la proposición y su justificación.
- Una proposición entrará en esta lista o bien si es una premisa o se dedujo de anteriores por la aplicación de una regla de inferencia.
- Se termina la demostración cuando llegamos a la conclusión.

- **¿Cuál es el inconveniente de este método?**

Podemos ***no*** darnos cuenta de que regla hay que aplicar, lo cual no significa que el razonamiento no sea válido. Simplemente que no hemos estado muy lúcidos para hallar la prueba. Esta "lucidez" se consigue con "entrenamiento". Hay que hacer varios para tener "golpe de vista", para esto no hay que ser genios.... es como un juego de estrategias, nada más.

Puede haber más de un camino (prueba formal) que convalide un razonamiento válido.

EJEMPLO 1.3.13

Dar una prueba formal para un razonamiento que simbolizado tiene la forma:

$$\begin{array}{l} 1.\quad a \to b \\ 2.\quad c \wedge \sim b \\ 3.\quad (c \vee d) \to e \\ 4.\quad e \to f \\ \hline \qquad \sim a \wedge f \end{array}$$

Solución: Si observamos la conclusión $(\sim a \wedge f)$ es una conjunción, por la regla de conjunción será suficiente que pudiéramos sacar por aplicación de las reglas aceptadas: $\sim a$ y *f.*

Pensando en las apariciones de *f* en las premisas, es el consecuente de 4., donde *e* es antecedente, luego debemos trabajar para "sacar" *e*.

A su vez *e* es consecuente de (3), hay entonces que "sacar" su antecedente.

La proposición $\sim a$ no aparece en las premisas. En (1) está a como antecedente de $a \to b$, luego es objetivo poder deducir $\sim b$ para "sacar" $\sim a$ por Modus Tollens.

Manos a la obra!:

1. $a \to b$ (P)
2. $c \wedge \sim b$ (P)
3. $(c \vee d) \to e$ (P)
4. $e \to f$ (P)
5. $\sim b$ de (2) por simp.
6. $\sim a$ de (1) y (5) por M. T.
7. c de (2) por simp.
8. $c \vee d$ de (7) por ad.
9. e de (3) y (8) por M.P.
10. f de (4) y (9) por M.P.
11. $\sim a \wedge f$ de (6) y (10) conj.

EJEMPLO 1.3.14

Construir una prueba formal para:

$$\begin{array}{c} \sim (a \wedge b) \\ \underline{\sim b \to c} \\ a \to c \end{array}$$

Solución: La conclusión es un condicional, ¿ servirá el Silogismo Hipotético?, intentemos...

1. $\sim (a \wedge b)$ (P)
2. $\sim b \to c$ (P)
3. $\sim a \vee \sim b$ de (1) por equivalencia (De Morgan)
4. $a \to \sim b$ de (3) por equivalencia
5. $a \to c$ de (4) y (2) por S. H.

Como los razonamientos y buenas maneras de deducir es algo muy importante en todas las situaciones de la vida, pero imprescindible en Matemática, que es una ciencia que no admite contradicciones, se hará una recapitulación destacando los aspectos fundamentales que se han desarrollado sobre ese aspecto de la Lógica.

Resumiendo: Se presentaron métodos para analizar la validez lógica de una forma de razonamiento

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ . \\ \underline{P_n} \\ C \end{array}$$

- El primero es el de las tablas de verdad y no se admite que de premisas verdaderas la conclusión sea falsa.
- Otro se construye una tabla de verdad para

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n) \to C .$$

El **razonamiento es lógicamente válido** si para *todas las líneas de la tabla* (es decir: toda asignación de verdad a las componentes de las premisas y conclusión*)* de:

$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n) \to C$ **el valor es V.**

Estos dos métodos son totalmente equivalentes en su trabajo.

Una versión corta de estos métodos, se busca un valor particular de asignaciones de valores de verdad para las componentes que hagan las premisas verdaderas y la conclusión falsa. Si existe esa asignación, el razonamiento es inválido, si no existe el razonamiento es válido.

- Un tercer método es tratar de construir una prueba formal de validez o derivación desde las premisas a la conclusión.

  Cada paso de esa derivación debe ser justificado por una regla de inferencia.

  La construcción de una prueba formal establece la validez del razonamiento, pero el no encontrar la prueba no significa la invalidez del razonamiento.

Los métodos de las tablas de verdad son métodos tediosos (si hay muchas componentes) pero efectivo para determinar o no la validez lógica de un razonamiento, el tercer es un método más divertido pero.... no efectivo. Podríamos no darnos cuenta de que regla es la aplicable o aplicada.

EJERCICIO 1.3.15

Usar tablas de verdad (completa o reducida) para determinar si son válidos los siguientes argumentos:

i)

$$\begin{array}{l} a \to b \\ \sim b \vee c \\ \hline \sim a \vee c \end{array}$$

ii)

$$\begin{array}{c} e \to (f \wedge g) \\ h \to (i \vee j) \\ f \to (\sim i \wedge \sim j) \\ \hline \sim (e \wedge h) \end{array}$$

iii)

$$\begin{array}{c} \sim (p \vee q) \to s \\ \sim p \\ \hline \sim s \end{array}$$

EJERCICIO 1.3.16

Llevar los siguientes argumentos al lenguaje simbólico y analizar en cada caso si cada uno de los razonamientos es lógicamente válido por tablas de verdad.

Si es válido construir una prueba formal.

i) *Si las leyes son buenas y su cumplimiento es estricto, disminuirá el delito. Si el cumplimiento estricto de la ley hace disminuir el delito, entonces nuestro, problema es de carácter práctico. Las leyes son buenas, luego nuestro problema es de carácter práctico.*

ii) *Si Pedro recibió el mail vendrá por la Facultad, siempre que esté cursando todas. Aunque no haya venido por la Facultad, aún sigue cursando todas. Luego, Pedro no recibió el mail.*

iii) *No se da el caso de que, o bien faltó, o bien no llegó a tiempo. Luego, llegó a tiempo.*

iv) *Si Dios quisiera evitar el mal, pero fuera incapaz de hacerlo, sería impotente; si fuera capaz de evitar el mal, pero no quisiera hacerlo, sería malévolo. El mal existe. Si Dios existe, no es impotente ni malévolo. Luego, Dios no existe.*

v) *Si compro una computadora nueva antes de abril o le agrego memoria mi computadora actual, tomaré un trabajo como programador en mayo y atenderé la empresa Must. Haré muchas tareas extra, si atiendo la empresa Must. Si hago muchas tareas extra estaré mucho tiempo ocupado. Si estoy mucho tiempo ocupado, tendré que prepararme bien. Pero si me preparo bien no tomaré el trabajo de programador. Por consiguiente, no agrego memoria a mi computadora actual.*

EJERCICIO 1.3.17

Sean

p: 128 K es una memoria regular

q: compraré más memoria
r: cambiaré la computadora.

Traducir a lenguaje coloquial los siguientes argumentos y analizar su validez lógica:

i)

$$\frac{\begin{array}{c} p \to r \\ p \to q \end{array}}{p \to (r \wedge q)}$$

ii)

$$\frac{\begin{array}{c} p \to (r \vee q) \\ r \to \sim q \end{array}}{p \to r}$$

iii)

$$\frac{\begin{array}{l} p \to r \\ p \to q \\ p \end{array}}{q}$$

EJERCICIO. 1.3.18.

Para cada una de las siguientes pruebas establecer la justificación de cada línea (dando las líneas y reglas que la convalidan).

$a)$ de $b \to c$:

1. $(a \wedge b) \to c$ (P)
2. $\sim a \to d$ (P)
3. $\sim (b \to d)$ (P)
4. $b \wedge \sim d$
5. $\sim d$
6. $\sim\sim a$
7. a
8. $a \to (b \to c)$
9. $b \to c$

$b)$ de $e \wedge \sim f$:

1. $(d \to e) \wedge (f \to g)$ (P)
2. $d \leftrightarrow \sim g$ (P)
3. d (P)
4. $(d \to \sim g) \wedge (\sim g \to d)$
5. $d \to \sim g$
6. $\sim g$
7. $f \to g$
8. $\sim f$
9. $d \to e$
10. e
11. $e \wedge \sim f$

4. Enriqueciendo el lenguaje simbólico

Las proposiciones anteriores afirmaban "cosas" sobre individuos, sobre objetos particulares.
No todas las proposiciones que usamos son de ese tipo.

Hay veces que se necesita hacer afirmaciones sobre elementos de un determinado conjunto sin especificar un elemento en particular, esto es permitiremos que ese elemento **varíe** en el conjunto (**universo del esquema**), que sean todos los elementos del conjunto o sean algunos de ellos.

Observación: para profundizar el concepto de conjunto se recomienda leer el capítulo 2.

Por eso introducimos otro elemento importante de este lenguaje: los **cuantificadores**.

Hay situaciones que debemos expresar: “todos los...” o “existen...”, como por ejemplo en las siguientes afirmaciones:

1. *Todos los números enteros son divisibles por 1*
2. *Existen números primos*

Ellas tienen un valor de verdad, ¿ cuál ?
Estas proposiciones decimos que son **universales** y **existenciales** respectivamente.

Analicemos qué están expresando:
La primera está diciendo que para cada uno o cualquiera sea el número entero este es divisible por 1; se habla de una propiedad que tienen todos los números enteros, por ello se dice que es universal, considerando como **universo al conjunto de los números enteros.** La segunda proposición manifiesta la existencia de números que tienen la propiedad de ser primos, dice que hay individuos que son primos. Además, se sabe que ellos son infinitos, cosa que fue probada por Euclides en sus Elementos.

Está claro que la elección del conjunto que se tome como universo es importante.

Muchas afirmaciones de la Matemática son de estos tipos. La mayoría de las propiedades que se estudiarán son así.

La manera de simbolizarlas es la siguiente: (Dando por hecho que el universo U es el conjunto de los números enteros)

$$1.\ (\forall x)(x\ es\ divisible\ por\ 1)$$
$$2.\ (\exists x)(x\ es\ numero\ primo)$$

Por simplificación o para generalizar se usan los **esquemas** o **funciones proposicionales**. Estos se simbolizan por ejemplo por $P(x)$, $Q(x)$, etc.

Para 1. podríamos escribir $P(x)$: x *es divisible por 1.*
Para 2. escribimos Q(x): x *es número primo.*

En muchas oportunidades el uso de los paréntesis que encierran $\forall x$ y $\exists x$ no se usarán. Los paréntesis indican el alcance del cuantificador. Resumiendo:

- Una proposición universal es de la forma: Para todo *x, P*(*x*) , se simbolizará: $(\forall x)(P(x))$
- Una proposición existencial es de la forma: Existe *x, P*(*x*) , se simbolizará : $(\exists x)(P(x))$

EJEMPLO 1.4.1
Simbolizar: *Los números naturales son positivos*
Solución: Esta proposición afirma que por el hecho de un número ser natural él es positivo.
No habla de un número natural en particular sino de cualquiera de ellos, es decir es algo referido a todos los naturales, luego su simbolización:

$$(\forall x)(x\ es\ numero\ natural\ entonces\ x\ es\ positivo)$$

si consideramos como universo, por ejemplo $\mathbb{Q}$.
Si cambiamos al universo por $\mathbb{N}$ lo simbolizamos: $(\forall x)(x\ es\ positivo)$.

EJERCICIO 1.4.2:
Simbolizar: (Recuerde que lo primero que tiene que establecer es el universo).

1. Existen números pares.
2. Toda circunferencia tiene un centro.
3. Existen números pares y existen números positivos.
4. Los cuadrados de los números reales son positivos.
5. Todos los hombres se mueren.
6. Todo número es par o impar.
7. Existen estudiantes muy buenos y hay docentes cumplidores.
8. Hay equipos que salieron campeones.
9. Hay equipos que salieron campeones y hay equipos que juegan bien.

- El valor de verdad de una **proposición universal** de la forma *Para todo x, P(x)* depende del universo que esté involucrando y si cada uno de los individuos a de ese universo verifique o no lo que está afirmando $P(x)$ cuando x es sustituido por un individuo a.

> Si $P(a)$ es una proposición verdadera cualquiera sea a del universo es entonces
>
> $(\forall x)(P(x))$ verdadera.

- El valor de verdad de una **proposición existencial** de la forma *Existe x, P(x)* depende del universo que esté involucrando y si hay algún individuo a de ese universo que verifique $P(x)$ cuando x es sustituido por a.

> Si $P(a)$ es una proposición verdadera para algún individuo a del universo es entonces
>
> $(\exists x)(P(x))$ verdadera.

EJERCICIO 1.4.3

Para cada una de las proposiciones dadas en el EJERCICIO 1.4.2 dar un universo.

¿Cuál es el valor de verdad?

EJERCICIO 1.4.4:

a) Simbolizar las siguientes proposiciones indicando claramente cual es el universo que considera:

i) Todos los números primos son positivos.

ii) Existen números reales irracionales.

iii) Hay números reales racionales y hay números reales irracionales.

iv) Dado un número real, él es racional o irracional.

v) Todos los números racionales son enteros.

vi) Todos los números enteros son racionales.

vii) Hay números racionales que son enteros.

viii) Todos los reales al cuadrado son mayores que 0.

ix) Todas las circunferencias son concéntricas.

x) Hay circunferencias de radio negativo.

xi) Todos los cometas tienen órbitas elípticas.

xii) Todo entero múltiplo de 4 es múltiplo de 2.
xiii) Hay enteros múltiplos de 8 y de 9 a la vez.
xiv) Existen enteros que son múltiplos de 7 que son pares.
xv) Todo múltiplo de 2 es múltiplo de 4.
xvi) Existen alumnos que estudian.
xvii) Los alumnos que estudian aprueban.
xviii) Todos son creativos.

b) Analizar el valor de verdad de las proposiciones anteriores.

c) Determine, de ser posible, un universo en que resulten falsas y otro en que resulten verdaderas cada una de las proposiciones dadas en a)

En muchas oportunidades es necesario simbolizar con más de una variable proposicional. Puede que estas proposiciones lleven a formular esquemas de más de una variable.

EJEMPLO 1.4.5

Una de las nociones más básicas en que podemos pensar es el orden.

Supongamos que queremos expresar: *Todo número tiene uno mayor.*

Consideremos como universo el conjunto $\mathbb{Z}$, de qué se habla? De que dado un número entero (cualquiera) hay otro número entero que es mayor.

Para ello usaremos:

M(*x, y*): *y es mayor que x*

Se tiene entonces que cuantificar de manera conveniente y resulta:

$$(\forall x)\ (\exists y)\ (M(x, y))$$

EJEMPLO 1.4.6

¿Hay diferencia entre lo que expresan? (Considerar como universo el conjunto de seres humanos vivos actualmente)

1. *Todos aman a alguien.*
2. *Hay quien ama a todos.*

Pensemos lo que dice (1). Dado un individuo cualquiera, él ama a otro individuo. El amor no es siempre correspondido...por lo cual no tiene porqué ser la relación "hacia el otro lado".

¿Qué dice (2)? Que hay un individuo que ama a cualquier otro individuo.

Lo que dicen es **muy distinto. ¿**Cómo se simbolizan?

Sea: *A*(*x*, *y*): *x ama a y*

Para 1. $(\forall x)\,(\exists y)\,(A(x, y))$

Para 2. $(\exists y)\,(\forall x)\,(A(y, x))$

Por lo tanto ***el orden de los cuantificadores es importante***. Y el orden de las variables dentro del esquema también!!!

EJERCICIO 1.4.7

Sean

i) *Hay un número que es menor que todo número.*

ii) *Todo número es menor que todo número.*

iii) *Todo número es menor que algún número.*

a) Simbolice y analice el valor de verdad de las proposiciones dadas en el universo de los números reales.

b) Simbolice y analice el valor de verdad de las proposiciones dadas en el universo de los números naturales.

EJERCICIO 1.4.8:

Sean:

i) *Todo número tiene inverso multiplicativo.*

ii) *Hay números que tienen inverso multiplicativo.*

a) Simbolice y analice el valor de verdad de las proposiciones dadas en el universo de los números reales.

b) Simbolice y analice el valor de verdad de las proposiciones dadas en el universo de los números enteros.

c) Simbolice y analice el valor de verdad de las proposiciones dadas en el universo de los números reales mayores que 3.

d) Simbolice y analice el valor de verdad de las proposiciones dadas en el universo de los números enteros mayores que 3.

EJERCICIO 1.4.9

Sean:

i) *Para todo número real positivo existe otro que sumados dan 0.*

ii) *Para todo número real existe otro que sumados dan 0.*

iii) *Dados dos números reales su producto es un número real.*

Simbolice y analice el valor de verdad de las proposiciones dadas en el universo de los números reales.

Reglas para negar proposiciones con un cuantificador

A partir de las definiciones de los valores de verdad de las proposiciones universales y existenciales es posible deducir que vale lo siguiente:

Proposición	**Negación de la Proposición**	**Ejemplo**
(∀ x) (P(x))	$\sim (\forall x)(P(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\sim P(x))$	NO todos son santos. Hay algunos que NO son santos
$(\exists x)(P(x))$	$\sim (\exists x)(P(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\sim P(x))$	NO existen alumnos aprobados Todos los alumnos son NO aprobados

Con estas reglas es suficiente para negar cualquier proposición con cuantificadores.
La idea es que hay que ir introduciendo la regla en la proposición de a un cuantificador por vez.

EJEMPLO 1.4.10

Negar: $(\forall x)(T(x) \to (R(x) \vee S(x)))$

De acuerdo a la regla anterior:

$$\sim (\forall x)(T(x) \to (R(x) \vee S(x))) \Leftrightarrow (\exists x) \sim (T(x) \to (R(x) \vee S(x)))$$

Negando un condicional se tiene:

$(\exists x) \sim (T(x) \to (R(x) \vee S(x))) \Leftrightarrow (\exists x)(T(x) \wedge \sim (R(x) \vee S(x)))$

y aplicando una de las reglas de De Morgan:

$(\exists x)(T(x) \wedge \sim (R(x) \vee S(x))) \Leftrightarrow (\exists x)(T(x) \wedge \sim R(x) \wedge \sim S(x))$

EJEMPLO 1.4.11

Negar: $(\exists y)(\forall x)(H(y) \wedge (R(x,y) \to S(x)))$

De acuerdo a las reglas y la recomendación:

$\sim (\exists y)(\forall x)(H(y) \wedge (R(x,y) \to S(x))) \Leftrightarrow (\forall y) \sim (\forall x)(H(y) \wedge (R(x,y) \to S(x)))$

Siguiendo...

$$(\forall y) \sim (\forall x)(H(y) \wedge (R(x,y) \to S(x))) \Leftrightarrow (\forall y)(\exists x) \sim (H(y) \wedge (R(x,y) \to S(x)))$$

aplicando Regla de De Morgan:

$$(\forall y)(\exists x) \sim (H(y) \wedge (R(x,y) \to S(x))) \Leftrightarrow (\forall y)(\exists x)(\sim H(y) \vee \sim (R(x,y) \to S(x)))$$

por la negación de un condicional:

$(\forall y)(\exists x)(\sim H(y) \vee \sim (R(x,y) \to S(x))) \Leftrightarrow (\forall y)(\exists x)(\sim H(y) \vee (R(x,y) \wedge \sim S(x)))$

¿Cuándo se considera terminado? Cuando cada símbolo de negación afecta un solo esquema proposicional.

EJERCICIO 1.4.12:

a) Negar las proposiciones simbolizadas en el EJERCICIO 1.4.4.
b) Negar las proposiciones simbolizadas en el EJERCICIO 1.4.7.
c) Negar las proposiciones simbolizadas en el EJERCICIO 1.4.8.
d) Negar las proposiciones simbolizadas en el EJERCICIO 1.4.9.

5. Otras Demostraciones

Como se ha expresado anteriormente los **resultados válidos en Matemática son aquellos que se pueden demostrar.** Cosa que en general no es simple.

Podemos agregar que cuando se presentan los distintos temas en una materia de Matemática se dan en ella los teoremas más importantes, con un encadenamiento que por lo general no es el histórico. Ni, por lo general, las demostraciones que se exhiben son las originales, el avance de los conocimientos hace que las demostraciones puedan mejorarse o hacerse "más elegantes" con el aporte de nuevos resultados.

La manera de hacer demostraciones y también de recrearlas depende de lo que se quiera demostrar y también de la "forma" del enunciado.

Si el enunciado a probar es de forma existencial, alcanzará en algunos casos con exhibir un individuo del universo involucrado con las características que dice el enunciado o una manera de construir ese individuo..

Si el enunciado es de forma universal habrá que probar que cada uno de los elementos del universo cumple con lo afirmado. Si el universo fuera de un número finito de individuos podríamos analizar que cada uno de ellos verifica lo enunciado. Si el universo es infinito, tomar un elemento arbitrario (NO un ejemplo) del universo del que se habla, y probar que tiene la propiedad enunciada.

Veamos como realizamos una demostración de una propiedad de teoría de conjuntos.

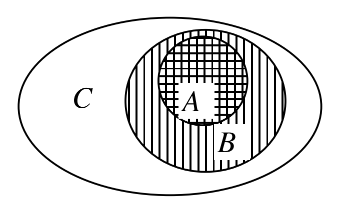
EJEMPLO 1.5.1

Sean *A* = {0, 2} y $B=\{0,2,4,6,8,10\}$

Claramente se "ve" que $A\subseteq B$, ya que cada uno de los elementos de *A* son también elementos de *B*.

Si $C=\{-6,-4,-2,,0,2,4,6,8,10,12\}$ se da que $B\subseteq C$ (¿por qué?), justifique y claramente observará que $A\subseteq C$.

Esta situación es general y muy obvia si la ilustramos:



Se puede entonces enunciar:

Propiedad transitiva de la contención:
Cualesquiera sean los conjuntos *A, B* y *C*, si $A\subseteq B$ y $B\subseteq C$ entonces $A\subseteq C$.

Observar que la propiedad a demostrar habla de conjuntos cualesquiera y además formalmente es un **condicional**. Donde el antecedente es $A\subseteq B$ y $B\subseteq C$ (que es la ***hipótesis*** de nuestra propiedad a demostrar). El consecuente es $A\subseteq C$ (que es la ***tesis*** de la propiedad a demostrar)

Vamos a demostrarla.
Para ello se debe tomar un elemento cualquiera de *A* y usando las hipótesis en el momento oportuno, llegar a que ese elemento de *A* es también elemento de *C*.
El considerado es un elemento totalmente general de *A*, sólo es eso lo que se sabe de él, que está en *A*. Esto cumplido hay que trabajar para llegar a $A\subseteq C$. Bueno empecemos...

Sea $x\in A$, como por hipótesis $A\subseteq B$, usando la definición de inclusión, resulta que $x\in B$.
Ahora que se tiene $x\in B$, se usa la hipótesis $B\subseteq C$, resulta así que $x\in C$.

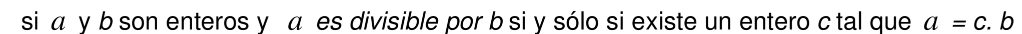
En la demostración que realizamos usamos el ***Método Directo.*** (Pusimos en claro que queríamos demostrar y usamos las hipótesis en el camino y llegamos a la conclusión deseada)

EJEMPLO 1.5.2

Demostrar que: $A \subseteq B$, para A = { x: x es divisible por 6} y B = { x: x es divisible por 3}

El concepto de divisibilidad para los números se entiende para los números enteros.
Por lo tanto, esto está significando (aunque no se dice de manera explícita) que A y B son subconjuntos de $\mathbb{Z}$.

Recordar que: (esto lo sabemos….)



si a y b son enteros y a *es divisible por b* si y sólo si existe un entero c tal que $a = c.\ b$

Para demostrar que $A \subseteq B$ hay que hacer un trabajo similar al hecho en la demostración anterior.
Para ello se debe tomar un elemento cualquiera de A y usando las definiciones en el momento oportuno, llegar a que ese elemento de A es también elemento de B. Se trabaja con un elemento totalmente genérico de A, sólo es eso lo que se sabe de él, que está en A. (También será por el **método directo**)

Dado $x \in$ A, se tiene por definición, que existe k entero tal que

$$x = k.\ 6 \qquad (*)$$

Para demostrar que x es elemento de B hay que probar que $x = h.3$, con h entero.
Saber adónde se pretende llegar es importante, es la guía de qué cosas es importante pensar.

Como $6 = 2.3$, sustituyendo en (*) se tiene que:

$$x = k.\ 6 = k.\ (2.3) = (k.\ 2).\ 3$$

Esta serie de igualdades se verifican por sustitución y asociatividad del producto de enteros. Además $k.2$ es un entero, el h que se está buscando..., así llegamos a que:

$x = h.3$, con h entero. Por tanto, $x \in B$.

Veamos como realizamos una demostración de una propiedad de teoría de números reales:

EJEMPLO 1.5.3

La suma de un número racional con un número irracional es un número irracional.

La demostración la haremos por el **Método del Absurdo**. Esto consiste en usar las hipótesis, negar la tesis y llegar a una contradicción. Esa contradicción puede ser de una de las hipótesis del mismo problema o de algún resultado ya probado o hecho conocido.

Sea a un número racional (cualquiera) y *b* un número irracional (cualquiera).
Por lo que sabemos de números, a es cociente de enteros y *b* que no es cociente de enteros.
Podemos pensar además que en a el denominador positivo.

Calculando, $a+b=\frac{p}{q}+b$ con $p\in\mathbb{Z}$ y $q\in\mathbb{N}-\{0\}$.

Supongamos que *negamos que esa suma es irracional*, luego esa suma es racional. Es decir:

$$a+b=\frac{p}{q}+b=\frac{s}{t} \text{ con } s\in\mathbb{Z} \text{ y } t\in\mathbb{N}-\{0\}.$$

De aquí, haciendo operaciones en los números reales, se tiene: $b=\frac{s}{t}-\frac{p}{q}$.

Ahora operando en el segundo miembro obtenemos que: $b=\frac{s}{t}-\frac{p}{q}=\frac{s.q-t.p}{t.q}$ que es un cociente de enteros de denominador natural no nulo (ya que ninguno de los factores del denominador es 0).

Por lo tanto, *b* se escribe como cociente de enteros con denominador no nulo, lo que **contradice** que *b* es irracional.
Hemos llegado a una contradicción (pues *b* se tiene que es irracional por hipótesis, pero también es racional por como lo podemos escribir!), que se dice que es un **absurdo**.
¿De dónde provino el absurdo? De haber supuesto que la suma de a y *b* es racional, por ende, debe ser irracional.

Hay otro método de demostración también muy usado que es el **Método Indirecto**. En realidad, es hacer el método directo a la proposición contrarecíproca de lo que se quiere demostrar. Pues ya se ha probado que un condicional y su contrarecíproca son equivalentes.

EJEMPLO 1.5.4
Si a^2 es un número entero impar entonces a es un número entero impar

Por el **Método Indirecto**, tenemos que probar por el método directo:
Si a es un número entero par entonces a^2 es un número entero par.

De a lo que se sabe que es entero y par.
Por definición a es un múltiplo de 2, cosa que expresamos: $a = 2.k$, para algún *k* entero.
Veamos qué es a^2, por definición de potencia y propiedades de esta operación resulta:
$a^2= (2.k)^2=2^2.k^2=(2.2).k^2$ por asociatividad del producto de enteros, $(2.2).k^2=2.(2.k^2)$.

Luego a^2 es un número par por definición, ya que *2.k²* es un entero!

Por lo tanto ¨salimos¨ de a par y ¨llegamos¨ a que a^2 es par.

Por lo cual de acuerdo al método indirecto hemos demostrado lo que queríamos.

EJERCICIO 1.5.5

Demostrar por el método que le resulte más conveniente:

a) *Todo número real al cuadrado es positivo.*

b) *Si* a *es divisible por 9 entonces* a *es divisible por 3.*

¡¡¡¡En los casos posibles anímese!!!! ha realizar las demostraciones por más de un método.

CAPÍTULO 2
Elementos de una Teoría Intuitiva de Conjuntos

El desarrollo de la Matemática a través de los tiempos llevó a que su escritura fuera más simbólica: la representación de los números (en cada civilización adoptaron alguna forma para expresarlos), conceptos de la geometría y el análisis matemático también se fueron expresando de manera especial.

Se trató de buscar un lenguaje común que pudiera demostrar la unidad de la Matemática.
A fines del siglo XIX y principios del XX se desarrolló la Teoría de Conjuntos. Esta teoría es un lenguaje que se usa en todas las ramas de la Matemática, permitiendo expresar los conceptos de cada teoría. Se hará un trabajo intuitivo sobre los conjuntos y sus operaciones.

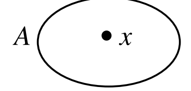
Es conocido que hay más de una axiomatización de la Teoría de Conjuntos y que algunos primeros tratamientos de la misma llevaron a paradojas que fueron subsanadas con estas axiomatizaciones.

Hay una importante vinculación con las operaciones del Cálculo Proposicional y las de esta teoría, como así también una relación con algunas clases de álgebras.

1. Definiciones básicas

La palabra **conjunto** resulta una expresión primitiva (que no requiere definición), por ello entenderemos una colección o agrupamiento de entes u objetos, que en general tienen características similares. Los objetos que están en un conjunto son los **elementos** del conjunto.

Si A es un conjunto y x es un elemento de A lo indicamos por $x \in A$.
La representación usual de los conjuntos es:



Los conjuntos están determinados por sus elementos.

A un conjunto lo podemos presentar dando de manera explícita cada uno de sus elementos (**extensión**) o dando lo que se llama la propiedad definidora del conjunto, todo elemento que cumple esa propiedad está en el conjunto y sólo esos elementos están en el conjunto (**comprensión**).

Dar el conjunto por extensión es factible si el conjunto tiene un número finito de elementos (se cuentan sus elementos y se termina de hacerlo), pero sin embargo algunos conjuntos infinitos (cuando no es finito…) se presentan de esa manera cuando se entiende su ley de formación.

EJEMPLO 2.1.1

i) Si A={ 0, 2, 4, 6 } (definido por extensión)

Se tiene que $0 \in A$, $2 \in A$, $4 \in A$ y $6 \in A$.

También, A queda definido por comprensión como:

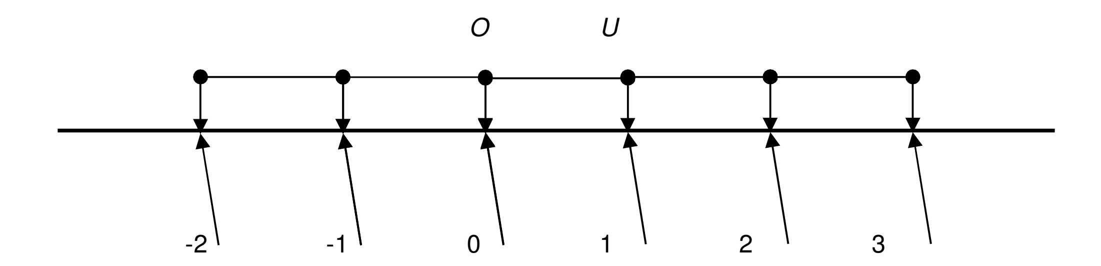
A = { x: x es un número par positivo menor que 8 }= { x: x es un número par $\wedge$ $x \geq 0$ $\wedge$ $x < 8$ }

Ambas maneras definen A.

ii) Al conjunto de todos los números naturales a pesar de su infinitud es usual anotarlo $\mathbb{N}$ = { 0, 1, 2, 3, ...} los puntos suspensivos dan la idea de cómo sigue el conjunto...

Igualmente ocurre con los números enteros $\mathbb{Z}$ = { ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}.

Estos conjuntos se representan sobre una recta, en la que se ha establecido un punto origen *O*, que representa el número 0, un punto *U*, a la derecha de *O*, representa al 1. Se considera una unidad de medida (longitud del segmento *OU*) que se transporta a la derecha de *O* representando a los números positivos y a la izquierda de *O* los números negativos.



En lo que sigue se anotará $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ a los conjuntos de los números naturales, enteros, racionales y reales respectivamente.

EJERCICIO 2.1.2

i) Defina de dos maneras distintas el conjunto de los números impares que su valor absoluto es menor o igual que 5.

ii) Ídem para el conjunto de las primeras seis potencias enteras de -2.

iii) Ídem para el conjunto de los números naturales pares.

iv) Ídem para el conjunto de los números pares.

El conjunto que no tiene elementos es el **conjunto vacío**, y se simboliza por $\varnothing$.

Sean A y B conjuntos, ellos son ***iguales*** si y sólo si A y B tienen los mismos elementos. Esto es, todo elemento de A es también elemento de B y recíprocamente.

Esto lo anotaremos: $A = B$

EJEMPLO 2.1.3

Claramente son iguales los tres conjuntos

$A = \{x : x = 2.k \wedge (k = 0 \vee k = 1)\}$, $B = \{x : x^2 - 2x = 0\}$ y $C = \{0, 2\}$

Hay oportunidades que no se da la igualdad pero sucede que todo elemento de A es elemento de B.

Es conveniente ponerle nombre a este hecho tan habitual, piense que es lo que ocurre con el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números enteros, y para otros conjuntos numéricos (¿cuáles situaciones se presentan?)

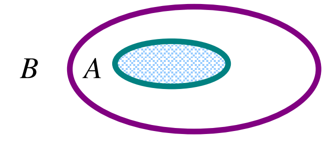
Si ocurre que todo elemento de A es elemento de B, diremos que A es **subconjunto** de B o que A está **incluido** en B, o que B **contiene** a A.

La expresión simbólica del concepto es: $(\forall x)(x \in A \to x \in B)$

Si esta proposición es verdadera, A está incluido en B

Para indicarlo usamos la notación: $A \subseteq B$

La situación la podemos "ver" por el diagrama:



También es usual simbolizar $A \subset B$ para indicar que A es subconjunto de B y A distinto de B.

Si A **no es subconjunto** de B se anota $A \not\subset B$ o $A \not\subseteq B$.

EJEMPLO 2. 1.4

Dados A = { *a* : *a* es un libro escrito por D. Sarmiento}

B = { *b* : *b* es biblioteca pública de la ciudad de La Plata }

Analizar el valor de verdad de las siguientes proposiciones, los libros se indicarán por el título y las bibliotecas por su nombre:

r : "Recuerdos de Provincia" $\in A$

$r \vee o$: "Recuerdos de Provincia" $\in A \vee$ "La Odisea" $\in A$

$r \wedge o$: "Recuerdos de Provincia" $\in A \wedge$ "La Odisea" $\in A$

f : "Facundo" $\in A$

$r \wedge f$: "Recuerdos de Provincia" $\in A \wedge$ "Facundo" $\in A$

m : La biblioteca de la municipalidad de La Plata $\in B$

t : "Recuerdos de Provincia" $\in B$

u : La biblioteca pública de la Universidad Nacional de La Plata $\in B$

$m \wedge u$: La biblioteca de la municipalidad de La Plata $\in B \wedge$ La biblioteca pública de la Universidad Nacional de La Plata $\in B$

$j \vee o$: "La Odisea" $\in B \vee$ "La Odisea" $\in A$

n : La biblioteca Nacional $\in B$

e : La biblioteca de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad de La Plata $\in B$

"Recuerdos de Provincia" es un libro escrito por Sarmiento, al igual que "Facundo".
"La Odisea" es un libro atribuido de Homero.
Recordando los valores de verdad de las proposiciones compuestas se tiene que son verdaderas *r*, $r \vee o$, *f*, $r \wedge f$. Es falsa $r \wedge o$.

La biblioteca que está en la ciudad de La Plata y es la biblioteca municipal es pública.
La biblioteca pública de la Universidad Nacional de La Plata está en 7 y 60, por si le interesa el dato.
La biblioteca de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad de La Plata, funciona en el subsuelo del edificio está en 115 y 50 .
Volvamos al análisis...



El conjunto B es un conjunto de bibliotecas, públicas y ubicadas en La Plata.
Por lo tanto, *t* es falsa, observar que "Recuerdos de Provincia" es un libro y NO una biblioteca.
Seguro que es un libro que está en casi todas la bibliotecas públicas de la ciudad de La Plata.

La pertenencia (elemento - conjunto) no es transitiva.
Si son verdaderas *m, u*, $m \wedge u$, $j \vee o$ (justifique!!) . Son falsas *n* y *e*, porqué? Averigüe.

EJERCICIO 2.1.5

i) Si $A = \{-1, 4, a, c\}$, indicar con verdadero (V) o falso (F) y justificar los siguientes casos:

$-1 \in A \quad \cdots \qquad b \in A \quad \cdots \qquad a \in A \quad \cdots$

$-1 \subseteq A \quad \cdots \qquad \{a,c\} \in A \quad \cdots \qquad b \notin A \quad \cdots$

$\{a\} \in A \quad \cdots \qquad \{a,c\} \subseteq A \quad \cdots \qquad 1 \in A \wedge 4 \in A \quad \cdots$

ii) Bajo qué condiciones de los conjuntos A y B, ejemplifique, resulta verdadera:

1. $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$
2. $A \neq B$ y $B \subseteq A$

➢ Propiedades de la inclusión

Si A es subconjunto de B y además B es subconjunto de A, entonces $A = B$.
Además si $A = B$ vale que A es subconjunto de B y B es subconjunto de A.

Por lo cual podemos enunciar la siguiente propiedad:

Propiedad de la Igualdad:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \quad \wedge \quad B \subseteq A)$$

$\Leftrightarrow$ simboliza "si y sólo si" en el sentido de equivalente, esto es que teniendo como hipótesis o dato lo que está de un lado de " $\Leftrightarrow$ " se puede obtener lo que está del otro lado y viceversa.

Aplicación: Sobre las proposiciones con cuantificadores

Se está en condiciones de probar lo enunciado en el Capitulo 1 respecto al valor de verdad de las proposiciones con cuantificadores de una manera más precisa y demostrar alguna equivalencias que se han enunciado.

En el apartado 4. del Capítulo 1 se ha enunciado que para cada esquema proposicional *P*(x) hay que definir un universo *U,* y además el esquema tiene asociado el conjunto de verdad $\mathcal{V}$ (*P*(x)).

Se puede enunciar entonces a partir de estos conjuntos que:

$(\forall x)(P(x))$ es verdadera si y sólo si $\mathcal{V}\left(P(x)\right) = U$.

$(\exists x)(P(x))$ es verdadera si y sólo si $\mathcal{V}\left(P(x)\right) \neq \varnothing$.

Se han enunciado las equivalencias de negaciones:

Negación de la Proposición con cuantificadores
$\sim(\forall x)(P(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\sim P(x))$
$\sim(\exists x)(P(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(\sim P(x))$

Se probará una de ellas como ejemplo, dejando la otra equivalencia como ejercicio.

$\sim(\forall x)(P(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(\sim P(x))$ es correcta si y sólo si

$\sim(\forall x)(P(x)) \leftrightarrow (\exists x)(\sim P(x))$ es una tautología, es decir verdadera para cualquier instancia de verdad.

Un bicondicional es verdadero si las proposiciones que lo forman tienen igual valor de verdad.

Supongamos que $\sim(\forall x)(P(x))$ es verdadera.

Por lo tanto $(\forall x)(P(x))$ es falsa.

Es decir $\mathcal{V}\left(P(x)\right) \neq U$. Luego existe $a \in U$ tal que $P(a)$ es falsa.

Por lo cual existe $a \in U$ tal que $\sim P(a)$ es verdadera.

Es así que el conjunto $\mathcal{V}\left(\sim P(x)\right) \neq \varnothing$ entonces $(\exists x)(\sim P(x))$ es verdadera.

Supongamos que $\sim(\forall x)(P(x))$ es falsa.

Por lo tanto $(\forall x)(P(x))$ es verdadera.

Por lo cual $\mathcal{V}\left(P(x)\right) = U$.

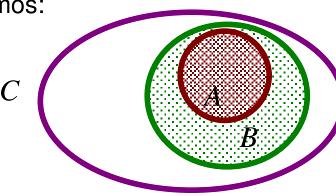
Entonces $\mathcal{V}\left(\sim P(x)\right) = \varnothing$ ya que todo $a \in U$ es tal que $P(a)$ es verdadera.

Por lo tanto $(\exists x)(\sim P(x))$ es falsa.

Anímese y demuestre la otra equivalencia.

Analizar este ejemplo, $A = \{0, 2\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ se verifica que $A \subseteq B$ y si $C = \{-6, -4, -2, , 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ se da que $B \subseteq C$ y claramente $A \subseteq C$.

Esta situación es general y muy obvia si la ilustramos:



Se puede entonces enunciar:

♦ PROPIEDAD 2.1.6 **(Propiedad transitiva de la contención)**
Cualesquiera sean los conjuntos A, B y C, si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.

Demostración:
Para ello se debe tomar un elemento cualquiera de A y usando las hipótesis en el momento oportuno, llegar a que ese elemento de A es también elemento de C. Este es un elemento totalmente general de A, sólo es eso lo que se sabe de él, que está en A.
Sea $x \in A$, como por hipótesis $A \subseteq B$, usando la definición de inclusión, resulta que $x \in B$.
Ahora que se tiene $x \in B$, se usa la hipótesis $B \subseteq C$, resulta así que $x \in C$. Luego $A \subseteq C$.

♦

EJEMPLO 2.1.7
Demostrar que $A \subseteq B$, para A = {x: x es divisible por 6} y B = { x: x es divisible por 3}

Dado $x \in A$, se tiene por definición de A y de "divisible", que existe k entero tal que

$$x = k.\,6 \qquad (*)$$

Para demostrar que x es elemento de B hay que probar que $x = h.3$, con h entero.

Saber "adónde se pretende llegar" es importante, es la guía de qué cosas es importante pensar.
Como 6 = 2.3, sustituyendo en (*) se tiene:

$$x = k.\,6 = k.\,(2.3) = (k.\,2).\,3$$

Esta serie de igualdades se verifican por sustitución y asociatividad del producto de números enteros.
Además k.2 es un entero, es el h que se está buscando..., así llegamos a:

$$x = h.3,\ \text{con } h \text{ entero.}$$

Por tanto, $x \in B$.
Luego vale que $A \subseteq B$.

EJEMPLO 2.1.8

Importante y Lógicamente...



♦ Cualquiera sea el conjunto A, se verifica que $\varnothing \subseteq A$

Demostración:

De acuerdo a la definición, $\varnothing \subseteq A$ si y sólo si $(\forall x)(x \in \varnothing \to x \in A)$ es verdadero.

El condicional $(x \in \varnothing \to x \in A)$ es verdadero cualquiera sea x, pues su antecedente es falso (Por qué?.....)

Por lo cual, se cumple $\varnothing \subseteq A$

♦

EJERCICIO 2.1.9

Graficar conjuntos A, B y C que cumplan $A \subseteq B$, $A \subseteq C$, $B \not\subset C$, y $C \not\subset B$.

EJERCICIO 2.1.10

Sea el conjunto $A = \{2, 3, 5, 9\}$ indicar con verdadero (V) o falso (F) y justificar los siguientes casos:

$\{2,5\} \in A \quad \cdots$ $\qquad \varnothing \in A \quad \cdots$ $\qquad \{2,4\} \not\subset A \quad \cdots$

$\{2,5\} \subseteq A \quad \cdots$ $\qquad \varnothing \subseteq A \quad \cdots$ $\qquad \{2,4\} \notin A \quad \cdots$

$\{\{9\}\} \subseteq A \quad \cdots$ $\qquad \{\varnothing\} \subseteq A \quad \cdots$ $\qquad \{5, 9\} \subseteq A \cdots$

EJERCICIO 2.1.11

Dados $A = \{x \in \mathbb{N} : 0 \leq x \leq 3\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 4\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 4\}$

i) Hacer un gráfico en la recta numérica de los conjuntos dados.

ii) Hay relaciones de inclusión entre ellos? Cuáles? Justificar lo que afirma.

Recordar el **valor absoluto** que para cada $a \in \mathbb{R}$ está definido $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$

EJERCICIO 2.1.12

i) Graficar y demostrar que $A \subseteq B$, para $A = \{x \in \mathbb{Z} : -2 \le x \le 3\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} : |x| < 4\}$

ii) Graficar y demostrar que $B \subseteq C$, para $C = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 4\}$

iii) Qué puede decir de A y C ?

iv) Hallar el conjunto de números reales cuyos elementos cumplen $|x| = |-x|$

v) Hallar el conjunto de números reales cuyos elementos cumplen $|x| = -|x|$

vi) Hallar el conjunto de números reales cuyos elementos cumplen $|x| = |x-2|$

EJEMPLO 2.1.13

Sean A, B y C conjuntos. Demostrar:

Si $A \subseteq B$ entonces, si $C \subseteq A$ entonces $C \subseteq B$

Hay que demostrar que $C \subseteq B$ teniendo dos hipótesis $A \subseteq B$ y $C \subseteq A$.

Por lo tanto se debe tomar un elemento genérico de C y oportunamente aplicar las hipótesis para determinar que también es elemento de B.

Sea $x \in C \xrightarrow[\substack{\text{hipótesis} \\ C \subseteq A}]{} x \in A \xrightarrow[\substack{\text{hipotesis} \\ A \subseteq B}]{} x \in B$ por lo tanto $C \subseteq B$

2. Conjunto de Partes

Consideremos el conjunto A = {0, 1}. Se buscarán todos los subconjuntos A.

El conjunto X **es parte de** A (o subconjunto de A) si y sólo si todo elemento de X es también elemento de A.

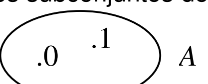
Por tanto, posibles X son: {0}, {1}, {0, 1}. Falta algo? Sí, el conjunto vacío $\emptyset$.

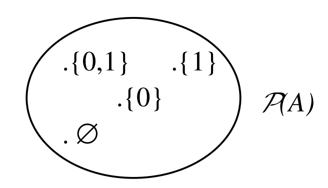
Se va a formar el conjunto de todas las partes (o subconjuntos) de A.

Al **conjunto de las partes** se anotará $\mathcal{P}(A)$.

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

Sus elementos son conjuntos, los subconjuntos de A.





Para cualquier conjunto A, el **conjunto de partes de** A

$$\mathcal{P}(A) = \{ X : \quad X \subseteq A \}$$

Es evidente que: $x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subseteq A$

Para encontrar todos los subconjuntos de un conjunto finito una idea efectiva es

- ***no olvidar*** el $\varnothing$,
- luego considerar los unitarios (los de un solo elemento),
- luego los de dos elementos y así seguir
- hasta llegar al que tiene todos, es decir A

EJERCICIO 2.2.1

i) Hallar $\mathcal{P}(B)$ siendo $B = \{0\}$.

ii) Hallar $\mathcal{P}(C)$ siendo $C = \{0, 1, 2\}$.

iii) ¿Cuántos elementos tienen A y $\mathcal{P}(A)$, del ejemplo introductorio?

iv) ¿Cuántos elementos tiene B? y $\mathcal{P}(B)$?

v) ¿Cuántos elementos tiene C? y $\mathcal{P}(C)$?

vi) ¿Puede encontrar alguna relación entre esos números?

vii) Trabajando con cada uno de los conjuntos de partes hallados, halle la relación de contención entre sus elementos.

Más adelante se demostrará que si A tiene *n* elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos. Puede usar este hecho como control… al menos en el número de sus elementos.

EJERCICIO 2.2.2

Hallar $\mathcal{P}(A)$ para los casos:

i) $A = \{ -1, 3, 6\}$

ii) $A = \{x \in \mathbb{N} : x^2 = 9\}$

iii) $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 9\}$

iv) $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 9 \vee |x| = 4\}$

v) $A = \{x \in \mathbb{Z} : 4 \le |x| < 6\}$

EJERCICIO 2.2.3

i) Hallar $\mathcal{P}(\varnothing)$

ii) ¿Cuántos elementos tiene $\varnothing$? y $\mathcal{P}(\varnothing)$?

iii) ¿Respeta la propiedad de la cantidad de elementos del conjunto de partes de conjuntos finitos?

iv) ¿Qué diferencia hay entre $\mathcal{P}(\varnothing)$ y $\mathcal{P}(\{\varnothing\})$?

EJERCICIO 2.2.4

Sea *L* = {Basic, Java, Pascal, Ada}.

i) Haga una lista de subconjuntos de *L*.

ii) Relacione por la contención los subconjuntos de *L.*

iii) Hallar $\mathcal{P}(L)$.

EJERCICIO 2.2.5:

Sea A = {0, 1, {1}, {0,2}}.

i) Haga una lista de subconjuntos de A.

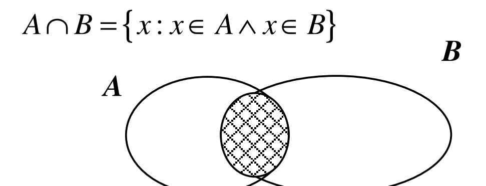
ii) Hallar $\mathcal{P}(A)$.

3. Operaciones entre conjuntos

Siendo A y B conjuntos, se obtienen a partir de ellos, realizando operaciones conjuntistas, otros conjuntos.

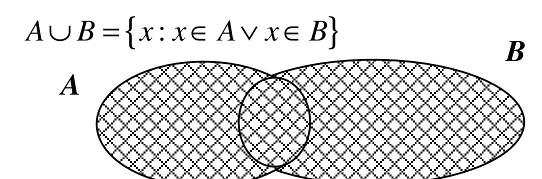
Intersección de A y B es el conjunto de elementos que pertenecen simultáneamente a ambos conjuntos; se simboliza por:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$



Unión de A **y** B es el conjunto de elementos que pertenecen a alguno de esos conjuntos, se simboliza por:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$



EJEMPLO 2.3.1

i) Si A = {0, 1} y B ={-1,0, 1} entonces $A \cap B$={0, 1} y $A \cup B$={-1, 0, 1}

Observe la relación de inclusión entre A, B y los resultados de las operaciones. ¿Puede asegurar algo??

ii) Si A = {0} y B = {-1, 1} entonces $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B$ = {-1, 0, 1}

Observe la relación de inclusión entre A, B y los resultados de las operaciones, ¿qué opina??

iii) Si $\mathcal{P}=\{x\in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$ e $\mathcal{I} =\{x\in \mathbb{N} : x \text{ es impar}\}$ entonces $\mathcal{P}\cap\mathcal{I} = \emptyset$ y $\mathcal{P}\cup\mathcal{I} =\mathbb{N}$

Observe la relación de inclusión entre $\mathcal{P}$, $\mathcal{I}$ y los resultados de las operaciones,¿qué arriesga??

iv) Si $A=\{x\in \mathbb{N} : 0\le x\le 3\}$; $B=\{x\in \mathbb{N} : 1\le x\le 4\}$; $C=\{x\in \mathbb{R} : 0\le x\le 4\}$

entonces $A \cap B = \{x\in \mathbb{N} : 1\le x\le 3\}$ y $A \cup B = \{x\in \mathbb{N} : 0\le x\le 4\}$

entonces $A \cap C = \{x\in \mathbb{N} : 0\le x\le 3\}$ y $A \cup C = \{x\in \mathbb{R} : 0\le x\le 4\}$

entonces $B \cap C = \{x\in \mathbb{N} : 1\le x\le 4\}$ y $B \cup C = \{x\in \mathbb{R} : 0\le x\le 4\}$

(haga la representación para convencerse ....).

Analice las relaciones de inclusión y realice una conjetura.

EJERCICIO 2.3.2

Hallar $A \cap B$ y $A \cup B$ para los casos:

i) A = { -1, 3, 6}, B = { -2, -1, 3, ,4, 6, 8}

ii) $A=\{x\in \mathbb{N} : x^2=9\}$, $B=\{x\in \mathbb{N} : (x-3)(x+3)=0\}$

iii) $A=\{x\in \mathbb{Z} : x^2=9\}$, $B=\{x\in \mathbb{N} : (x-3)(x+3)=0\}$

iv) $A=\{x\in \mathbb{Z} : x^2=9 \vee |x|=4\}$, $B=\{x\in \mathbb{Z} : (x-1)(x+3)=0\}$

v) $A=\{x\in \mathbb{Z} : 4\le |x|<6\}$, $B=\{x\in \mathbb{Z} : (x-1)(x+3)=0\}$

EJERCICIO 2.3.3

Considere dos conjuntos cualesquiera A y B.

En qué condiciones se verificarán las siguientes proposiciones, haga un gráfico para ayudarse...:

i) $A \cap B = B$

ii) $A \cup B = \emptyset$

iii) $B \cup \emptyset = \emptyset$

iv) $A \cap \emptyset = \emptyset$

v) $A \cap \emptyset = A$

vi) $A \cap B = A \cup B$

➢ Propiedades de la unión e intersección

Se está muy acostumbrado a realizar estas operaciones con conjuntos concretos, y también a partir de los ejemplos recién analizados se pueden establecer las siguientes propiedades. Se probarán algunas con el propósito mostrar un excelente ejercicio de razonamiento.

Propiedad Conmutativa: (de la unión y de la intersección de conjuntos)
Cualesquiera sean los conjuntos A, B, se cumple:

$$A \cup B = B \cup A \qquad\qquad A \cap B = B \cap A$$

Propiedad Asociativa: (de la unión y de la intersección de conjuntos)
Cualesquiera sean los conjuntos A, B y C, se cumple:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad\qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

La demostración de estas propiedades es inmediata, cada una de ellas se basa en las homónimas propiedades de la disyunción y conjunción del cálculo proposicional.

- La técnica es considerar un elemento genérico del conjunto que está en uno de los miembros de la igualdad a demostrar y aplicar la definición y propiedades, así poder concluir que ese elemento es elemento del conjunto del otro miembro de la igualdad.

- En general hay que probar la "doble" contención para probar una igualdad de conjuntos.

EJEMPLO 2.3.4

♦ Probar $A \cup B = B \cup A$

Demostración:

Sea $x \in A \cup B \underset{\text{def. de unión}}{\leftrightarrow} x \in A \vee x \in B \underset{p \vee q \Leftrightarrow q \vee p}{\leftrightarrow} x \in B \vee x \in A \underset{\text{def. de unión}}{\leftrightarrow} x \in B \cup A$

♦

EJEMPLO 2.3.5:

♦ Probar $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Demostración:

Sea $x \in (A \cap B) \cap C \underset{\substack{\text{def. de} \\ \text{intersección}}}{\leftrightarrow} x \in (A \cap B) \wedge x \in C \underset{\substack{\text{def. de} \\ \text{intersección}}}{\leftrightarrow} (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C)$

¿Qué queremos obtener? Que x es elemento de $A \cap (B \cap C)$. La idea es asociar de manera distinta la conjunción. Como ya se ha probado la asociatividad de la conjunción, sigamos:

$$(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \underset{\text{def. de intersección}}{\leftrightarrow} x \in A \wedge x \in B \cap C \underset{\text{def. de intersección}}{\leftrightarrow}$$

$$\underset{\text{def. de intersección}}{\leftrightarrow} x \in A \cap (B \cap C)$$

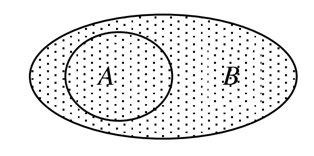
♦

En este ejemplo todos los pasos fueron justificados por una equivalencia lógica o una definición (que es una equivalencia) por lo cual todos los pasos seguidos son "un ida y vuelta", por ello es que se da la doble contención.

Anímese y pruebe las otras....

Propiedad: Sean A y B conjuntos

$$A \subseteq B \ \Rightarrow \ A \cup B = B$$



$$A \subseteq B \ \Rightarrow \ A \cap B = A$$

En estas propiedades las igualdades no siempre se dan, requieren una hipótesis adicional sobre los conjuntos que intervienen.
Las demostraciones con hipótesis adicionales son algo más complicadas. Se deben usar las definiciones y en el "momento apropiado" (ahí está el asunto) la hipótesis.

Veamos una:
EJEMPLO 2.3.6
♦ Probar: $A \subseteq B \ \Rightarrow \ A \cup B = B$

Demostración:
¿Qué es lo que hay que probar? Sabiendo que $A \subseteq B$ entonces $A \cup B = B$.
Hay que probar una igualdad de conjuntos cuando se cumple una condición.
Por lo tanto, se debe verificar la doble inclusión $B \subseteq A \cup B$ y que $A \cup B \subseteq B$, y seguramente habrá que usar la hipótesis pues por los ejemplos ya vistos, en general la unión no es igual a ninguno de los conjuntos que se están uniendo...

- Comencemos probando $B \subseteq A \cup B$:

Sea $x \in B$, habrá que deducir que ese elemento genérico tomado en B es también elemento de la unión.
Pero qué es el conjunto unión de A con B: son los elementos que están al menos en uno de ellos.
Formalmente hacemos lo siguiente:

$$x \in B \underset{regla: \frac{p}{p \vee q}}{\rightarrow} x \in B \vee x \in A \underset{\text{def. de unión}}{\leftrightarrow} x \in B \cup A \underset{\text{son iguales!}}{\leftrightarrow} x \in A \cup B$$

- Se demostrará la otra contención $A \cup B \subseteq B$, analice el uso de la hipótesis:

Sea $x \in A \cup B$, habrá que deducir que ese x genérico tomado en $A \cup B$ es también elemento de B.

$$x \in A \cup B \underset{\text{def. de unión}}{\leftrightarrow} x \in A \vee x \in B$$

Se tiene la hipótesis: $A \subseteq B$, lo que significa que si $x \in A \rightarrow x \in B$, por lo cual seguimos así:

$$x \in A \vee x \in B \underset{hipótesis}{\rightarrow} x \in B \vee x \in B \underset{p \vee p \Leftrightarrow p}{\leftrightarrow} x \in B$$

♦

Muy importante: En la demostración de $B \subseteq A \cup B$ NO se usó la hipótesis adicional, por lo tanto es siempre verdadero que un conjunto está contenido en una unión de la que forma parte.....

Esto es, cualesquiera sean los conjuntos A y B vale que $B \subseteq A \cup B$, y también para A.

EJERCICIO 2.3.7

Probar otra propiedad enunciada anteriormente: $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

EJERCICIO 2.3.8

i) Para cualquier conjunto A calcular: $A \cup \varnothing$ y $A \cap \varnothing$.

ii) Para $A = \{x \in \mathbb{N} : 0 \leq x \leq 3\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 4\}$ y $C = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 4\}$ calcular:

$A \cap (B \cup C)$; $(A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C)$; $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ ¿qué observa?

iii) ¿Cómo enunciaría ii)? ¿Qué nombres pondría? ¿Valdrá en general?

EJEMPLO 2.3.9

♦ Probar que si $A \subseteq B$ entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

Demostración:

Sea $C \in \mathcal{P}(A) \xrightarrow[\text{por definición}]{} C \subseteq A \xrightarrow[\text{por la demostración previa 2.1.13}]{} C \subseteq B \xrightarrow[\text{por definición}]{} C \in \mathcal{P}(B)$

Por lo tanto $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

♦

EJERCICIO 2.3.10

Sean $A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : -3 < x + 1 \leq 6\}$.

i) Hallar $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$.

ii) Hallar $A \cup B$, $A \cap B$.

iii) Hallar $\mathcal{P}(A \cup B)$, $\mathcal{P}(A \cap B)$.

iv) ¿Hay alguna relación con $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ y con $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$?

EJERCICIO 2.3.11

Sean $A = \{x \in \mathbb{N} : 2 < x \leq 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : -3 < x - 3 < 2\}$.

i) Hallar $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$.

ii) Hallar $A \cup B$, $A \cap B$.

iii) Hallar $\mathcal{P}(A \cup B)$, $\mathcal{P}(A \cap B)$.

iv) ¿Hay alguna relación con $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ y con $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$?

EJERCICIO 2.3.12

¿Puede hacer alguna conjetura entre $\mathcal{P}(A \cup \mathrm{B})$, $\mathcal{P}(A \cap B)$ con $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ y $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$?

Intente probar lo que afirma.

El ejemplo 2.3.9 le puede ayudar en la demostración, conjuntamente con propiedades de la unión e intersección de conjuntos relacionadas con las propiedades de la contención de conjuntos.

EJERCICIO 2.3.13

Si A tiene sólo 4 elementos que no son elementos de B que tiene 5, ¿cuántos elementos hay en los conjuntos $A \cup B$, $A \cap B$?

Haga un gráfico de la situación para ayudarse.

EJERCICIO 2.3.14

Si A tiene 4 elementos, B que tiene 5 y $A \cap B$ tiene 1. ¿Cuántos elementos hay en $A \cup B$?

Haga un gráfico de la situación para ayudarse.

EJERCICIO 2.3.15

Si A tiene m elementos y B tiene n, además $A \cap B = \varnothing$ (haga un gráfico de la situación).

¿Cuántos elementos hay en $A \cup B$?

EJERCICIO 2.3.16

Sea *T* el conjunto de alumnos del turno tarde.

Sea A el conjunto de elementos de *T* que saben usar el programa Java (pueden saber otras cosas...), sea B el conjunto de elementos de *T* que saben hablar inglés (también pueden saber otras cosas...) y sea C el conjunto de elementos de *T* que hablan inglés y manejan el programa Java.

Si A tiene 70 elementos, B tiene 175 y C tiene 57.

¿Qué es C ? ¿cuántos elementos tiene $A \cup B$?

Haga un gráfico de la situación para ayudarse.

EJERCICIO 2.3.17

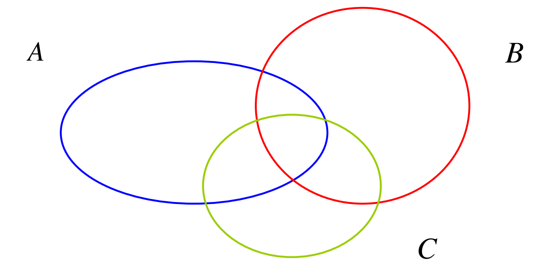
Sean los conjuntos A = {*a, b, c, d*}, B = {*a, b, d, e, f, g, j*} y *C* = {*b, d, g, h, m, p*}; ¿cuántos elementos hay en la unión $A \cup B \cup C$?

Haga un gráfico de la situación y cuente...

EJERCICIO 2.3.18

Los conjuntos A, B y C son finitos. Se quiere saber cuántos elementos hay en la $A \cup B \cup C$.

Especule a partir del gráfico:



EJERCICIO 2.3.19

Se hizo una encuesta para saber con qué elementos contaban las computadoras de un grupo alumnos.

Se les pidió que marcaran una cruz en una planilla similar a la detallada

Impresora color	
Reproductor de CD.	
Modem	

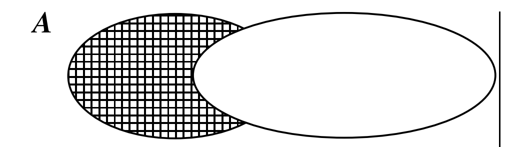
Todos los que contestaron dijeron tener una sola computadora. La información que surgió de las planillas (número de cruces) fue:

Impresora color: 100 ; Modem - Reproductor C.D. : 15 ;
Modem: 30 ; Reproductor de C.D. - Impresora color : 20
Reproductor de CD.: 35 ; Modem – Reproductor de C.D. - Impresora color: 5
Modem - Impresora color: 15 ;
¿Cuántos alumnos llenaron la encuesta?

➢ Otras operaciones con conjuntos

La **diferencia entre** $\boldsymbol{A}$ **y** $\boldsymbol{B}$ es el conjunto de los elementos que son elementos de A y no son elementos de B.

Esto lo anotaremos simbólicamente por:



$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

$\notin$ simboliza "no pertenece". En la definición $x \notin B$ significa $\sim (x \in B)$.

Por ejemplo, la diferencia $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ es el conjunto de enteros negativos.

EJEMPLO 2.3.20

i) Si A = {0, 1} y B = {-1,0, 1} entonces A - B = $\varnothing$

Observe la relación de inclusión entre A, B y el resultado de la operación. ¿Puede asegurar algo??

ii) Si A ={0, 1} y B ={-1, 0, 1} entonces B - A = {-1}

Observe la relación de inclusión entre A, B y el resultado de la operación. ¿Puede asegurar algo?

iii) Usando los resultados de dos incisos anteriores que puede decir de la diferencia de conjuntos?

iv) Si A ={0} y B ={-1, 1} entonces A - B = A

Observe la relación de inclusión entre A, B y el resultado de la operación, ¿qué opina?

EJERCICIO 2.3.21

Hallar A - B y B - A para los casos:

i) A = { -1, 3, 6}, B = { -2, -1, 3, 4, 6, 8}

ii) $A = \{x \in \mathbb{N} : x^2 = 9\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : (x-3)(x+3) = 0\}$

iii) $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 9\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : (x-3)(x+3) = 0\}$

iv) $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 9 \vee |x| = 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : (x-1)(x+3) = 0\}$

v) $A = \{x \in \mathbb{Z} : 4 \leq |x| < 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : (x-1)(x+3) = 0\}$

EJERCICIO 2.3.22

Hallar los siguientes conjuntos: $A \cup B$; $A \cap B$; $A - B$ para los siguientes casos:

i) $A = \mathbb{N} \quad B = \mathbb{Z}$

ii) $A = \mathbb{Z} \quad B = \mathbb{N}$

iii) $A = \mathbb{R} \quad B = \mathbb{Q}$

iv) $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es par}\} \quad B = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es impar}\}$

v) $A = \mathbb{R}^2 \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq -3 \wedge y \geq 4\}$

EJERCICIO 2.3.23

Dados: $A = \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : 5 \leq x \leq 9\}$ y $C = \{10, 11, 12\}$

Hallar $A - B$, $A - C$, $C - A$, $B \cap C$, $(A \cup C) - B$, $(B \cap A) \cup C$

EJERCICIO 2.3.24

Comprobar que si $A = \{x \in \mathbb{N} : 0 \leq x \leq 3\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 4\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 4\}$

a) $A - B = \varnothing$ y $B - A = \{4\}$

b) $A - C = \varnothing$ y $C - A = \{x \in \mathbb{R} : 3 < x \leq 4\}$

c) $B - C = \varnothing$ y $C - B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1 \vee 1 < x < 2 \vee 2 < x < 3 \vee 3 < x < 4\}$

(haga la representación para convencerse ....).

EJEMPLO 2.3.25

♦ Demostrar para cualquier par de conjuntos A y B que $A - B \subseteq A$

Demostración:

Sea $x \in A - B \xrightarrow[\text{de diferencia}]{\text{por definición}} x \in A \wedge x \notin B \xrightarrow{\text{por simplificación}} x \in A$

Por lo tanto $A - B \subseteq A$

♦

EJERCICIO 2.3.26

Para practicar demostraciones, haga alguna de las siguientes:

Propiedades: Cualquiera sea el conjunto A

a) $A - A = \varnothing$
b) $A - \varnothing = A$
c) $\varnothing - A = \varnothing$

Se lo va a ayudar!!!



Se probará c).

Hay que demostrar que $\varnothing - A \subseteq \varnothing$ y además que $\varnothing \subseteq \varnothing - A$.

Observar que la primer contención está probada pues es un caso particular de 2.3.25.

Respecto de la segunda contención a probar está probada en 2.1.8 como caso particular.

EJERCICIO 2.3.27

Analice si vale la propiedad asociativa de la diferencia de conjuntos (ayúdese con ejemplos y gráficos).

EJERCICIO 2.3.28

Considere en el plano dos círculos concéntricos. Sean C_1 el de radio mayor y C_2 el de radio menor.

¿Qué figura es $C_1 \cup C_2$? ¿Cuál $C_1 \cap C_2$? Y ¿$C_1 - C_2$? Grafique.

4. Universos y complemento

Consideremos el conjunto de estudiantes de la Facultad de Informática, llamémoslo *F.* Este conjunto contiene a varios subconjuntos.

Por ejemplo, podría pensarse en el conjunto *P* de alumnos de la Fac. de Informática que son alumnos de Estructura de Datos; el conjunto *I* de alumnos de la Fac. de Informática (es decir elementos de *F*) que hablan inglés; el conjunto *W* de elementos de *F* que saben manejar la Web; el subconjunto *O* de *F* cuyo documento de identidad termina en *0.*

Se puede necesitar trabajar con el alumnado de la Fac. de Informática, es decir con el conjunto *F*, por alguna razón. Ese conjunto será el **universo** para esa tarea.

El universo es algo relativo. Es convencional, algo que se establece.

Para alguna investigación sociológica podría ser útil considerar como universo *U* el conjunto de todos los alumnos de la Universidad Nacional de La Plata, en cuyo caso *F* es un subconjunto de *U*.

Dentro de *U* puede considerarse el conjunto de los alumnos que hablan inglés, este conjunto NO es *I*, ¿por qué?.

En algunas situaciones algebraicas el universo puede ser $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales y en otras $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales o cualquier otro conjunto numérico a convenir.

La idea intuitiva es que **universo** es el conjunto que contiene a todos los conjuntos con que se trabaja en determinada circunstancia.

Por razones que escapan a este Curso, el universo No es un conjunto que contiene todos los conjuntos.

Un universo de esa naturaleza conduciría a una paradoja en la teoría. Por eso las axiomatizaciones de la teoría de conjuntos no permiten ese universo….

Hay conjuntos que se pueden definir como aquellos elementos de un conjunto que no cumplen una determinada condición. Por ejemplo, podría tener interés el conjunto de estudiantes de la Universidad Nacional de La Plata que no hablan inglés, o los números enteros que no son divisibles por 4, etc. Para ello es útil la siguiente definición:

Para A subconjunto del universo U, el **complemento de A respecto de U** es el conjunto de elementos que pertenecen a U pero no a A; se simboliza por $\complement_U A$.

$$\complement_U A = \{x : x \in U \wedge x \notin A\}$$

Cuando el conjunto U se sobrentiende se anota simplemente $\complement A$, A' o A^C .

Claramente $\complement_U A$ **=** $U - A$

A

U

EJEMPLO 2.4.1

i) Dado el universo $U = \{ a, b, c, d \}$ y los conjuntos $A = \{a, b, d\}$ y $B = \{c, b\}$, resulta

$\complement_U A = \{ c\}$ y $\complement_U B = \{ a , d \}$

ii) Dado el universo $U = \{ a, b, c, d, e, f \}$ y los conjuntos $A = \{a, b, d\}$ y $B = \{c, b\}$, resulta

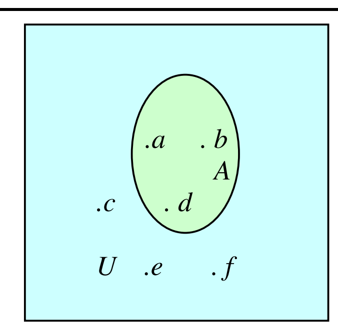
$\complement_U A = \{c, e , f\}$ y $\complement_U B = \{a , d , e , f\}$

Compare los resultados de i) y ii). ¿Por qué difieren?

Los universos dados en cada caso son distintos por lo tanto se obtienen complementos distintos.

i)

ii)



Haga un esquema similar para B.

EJERCICIO 2.4.2

i) Sea $U=\{x\in\mathbb{Z}:-1\le x\le 10\}$ calcular $\complement_U A$ si $A=\{0,1,2,3\}$. Representar en la recta numérica.

ii) Sea $U=\{x\in\mathbb{R}:-1\le x\le 10\}$ calcular $\complement_U A$ si $A=\{0,1,2,3\}$.Representar en la recta numérica.

EJEMPLO 2.4.3

♦ Probar que para cualquier A subconjunto de U vale que $\complement_U(\complement_U A)=A$

Sea $x\in\complement_U(\complement_U A)$ entonces por definición de complemento respecto de U, se tiene

$$x\in U\wedge x\notin\complement_U A \underset{\text{def. de complemento}}{\leftrightarrow} x\in U\wedge\sim x\in\complement_U A \underset{\text{def. de complemento}}{\leftrightarrow} x\in U\wedge\sim(x\in U\wedge x\notin A) \underset{\text{Ley de De Morgan}}{\leftrightarrow}$$

$$\underset{\text{Ley de De Morgan}}{\leftrightarrow} x\in U\wedge(x\notin U\vee x\in A) \underset{\text{Distributiva de la conjunción en disyunción}}{\leftrightarrow} (x\in U\wedge x\notin U)\vee(x\in U\wedge x\in A)$$

Acá hay un detalle importante:

Si se llama P: $x\in U\ \wedge\ x\notin U$

¿Cuál es el valor de verdad de P? Sí, es falsa.

Por lo cual seguimos razonando así:

$$(x\in U\wedge x\notin U)\vee(x\in U\wedge x\in A) \underset{\frac{p\vee q\quad \sim p}{q}}{\rightarrow} x\in U\wedge x\in A \underset{\text{Simplificación}}{\rightarrow} x\in A\ .$$

Se debe justificar la otra contención:

Sea $x\in A \underset{\substack{A\subseteq U\\ x\in A\rightarrow x\in U}}{\rightarrow} x\in U\wedge x\in A \underset{\frac{p}{p\vee q}}{\rightarrow} (x\in U\wedge x\notin U)\vee(x\in U\wedge x\in A)$

y a partir de acá "deshacer el camino" de la otra contención .....

♦

EJERCICIO 2.4.4

i) Para el universo U = {*a, b, c, d, e, f*} y los conjuntos A = {*a, b, d*} y B = {*c, b*}, calcular:

$$A \cup \underset{U}{\complement} A \qquad A \cap \underset{U}{\complement} A$$

$$B \cup \underset{U}{\complement} B \qquad B \cap \underset{U}{\complement} B$$

ii) ¿Qué opina de este resultado, se generalizará?

EJERCICIO 2.4.5

Para cualquier conjunto A subconjunto de U, analizar el valor de verdad de:

$$A \cup \underset{U}{\complement} A = U \qquad A \cap \underset{U}{\complement} A = \varnothing$$

EJERCICIO 2.4.6

Calcular para cualquier U:

a) $\underset{U}{\complement} \varnothing$ b) $\underset{U}{\complement} U$

EJERCICIO 2.4.7

i) Para el universo U = { *a, b, c, d, e, f* } y los conjuntos A = {*a, b, d, f* } y B = {*a, b*}, calcular sus complementos respecto de *U*.

ii) Sea $U = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 10\}$ calcular $\underset{U}{\complement} A$ si $A = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 6\}$ y $\underset{U}{\complement} B$ siendo $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 7\}$. Representar en la recta numérica.

iii) Para A y B subconjuntos de U se sabe que $A \subseteq B$. Analice si hay alguna relación de contención entre los respectivos complementos respecto de U. Justifique lo que afirma.

EJERCICIO 2.4.8

Para el universo U = {*a, b, c, d, e, f* } y los conjuntos A = {*a, b, d*} y B = {*c, b*}, calcular:

$$\underset{U}{\complement}(A \cup B) \qquad \underset{U}{\complement}(A \cap B)$$

$$\underset{U}{\complement} A \cup \underset{U}{\complement} B \qquad \underset{U}{\complement} A \cap \underset{U}{\complement} B$$

y compare resultados.

¿Puede conjeturar que igualdades se dan? ¡¡¡Demuestre lo que conjetura, anímese!!!

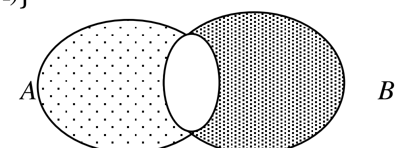
Vamos a definir otra operación entre conjuntos que en realidad es una combinación de las ya conocidas. Y tiene algunas propiedades muy interesantes desde el punto de vista del ¡Algebra! de los conjuntos.

Dados dos conjuntos A y B, A **diferencia simétrica** B, se simboliza $A\triangle B$ y representa los elementos que están sólo en A o sólo en B, decimos entonces que:

$$A\triangle B=\{x:(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\}$$

o también

$$A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$$



EJEMPLO 2.4.9

Sean $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ y $B=\{4,5,6,7,8,9\}$ entonces

$A\triangle B=\{1,2,3\}\cup\{7,8,9\}=\{1,2,3,7,8,9\}$

♦ PROPIEDADES 2.4.10

a) $A\triangle A=\varnothing$, $A\triangle\varnothing=A$, $A\triangle U=\complement_U A$

b) $A\triangle B=B\triangle A$ **conmutativa**

c) $(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$ **asociativa**

d) $A\triangle B\subseteq A\cup B$

e) $A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$

f) $A\triangle B=A\Leftrightarrow B=\varnothing$

Algunos ítems quedan como ejercicio. Se harán algunas…

Demostración de d):

$$\text{Sea } x\in A\triangle B \xrightarrow[\text{de dif simétrica}]{\text{por definición}} (x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\xrightarrow[\text{distributivas de }\wedge,\vee]{\text{por leyes}}$$

$$\to(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\notin A)\wedge(x\notin B\vee x\in B)\wedge(x\notin B\vee x\notin A)\xrightarrow[\text{por simplificación}]{}$$

$$\to x\in A\vee x\in B\xrightarrow[\text{de unión}]{\text{por definición}} x\in A\cup B$$

Demostración de e):

Probaremos primero que $A\triangle B\subseteq(A\cup B)-(A\cap B)$

$$\text{Sea } x\in A\triangle B\xrightarrow[\text{dif simétrica}]{\text{por def. de}}(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\xrightarrow[\text{distributivas de }\wedge,\vee]{\text{por leyes}}$$

$$\to(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\notin A)\wedge(x\notin B\vee x\in B)\wedge(x\notin B\vee x\notin A)\xrightarrow[\text{por simplificación}]{}$$

$\rightarrow (x\in A \vee x\in B) \wedge (x\notin A \vee x\notin B) \xrightarrow[\text{Morgan}]{\text{por De}} (x\in A \vee x\in B) \wedge \sim (x\in A \wedge x\in B) \xrightarrow[\text{y unión}]{\text{por def. intersección}}$

$\rightarrow (x\in A \cup B) \wedge \sim (x\in A \cap B) \xrightarrow[\text{por negación}]{} (x\in A \cup B) \wedge x\notin (A\cap B) \xrightarrow[\text{diferencia}]{\text{por def. de}}$

$\rightarrow x\in (A\cup B)-(A\cap B)$

Por lo tanto $A\triangle B \subseteq (A\cup B)-(A\cap B)$

Veamos que $(A\cup B)-(A\cap B) \subseteq A\triangle B$

Sea $x\in (A\cup B)-(A\cap B) \xrightarrow[\text{diferencia}]{\text{por def. de}} (x\in A\cup B) \wedge (x\notin (A\cap B)) \xrightarrow[\text{de intersección y de unión}]{\text{por negación, def.}}$

$\rightarrow (x\in A \vee x\in B) \wedge \sim (x\in A \wedge x\in B) \xrightarrow[\text{De Morgan}]{\text{por ley de}} (x\in A \vee x\in B) \wedge (x\notin A \vee x\notin B) \rightarrow$

$\xrightarrow[\text{distributivas}]{\text{por leyes}} (x\in A \wedge x\notin A) \vee (x\in A \wedge x\notin B) \vee (x\in B \wedge x\notin A) \vee (x\in B \wedge x\notin B) \rightarrow$

Notemos que $(x\in A \wedge x\notin A)$ y $(x\in B \wedge x\notin B)$ son falsas, por una regla de inferencia

$\xrightarrow[]{} (x\in A \wedge x\notin B) \vee (x\in B \wedge x\notin A) \xrightarrow[\text{diferencia}]{\text{por def.}} (x\in (A-B)) \vee (x\in (B-A)) \rightarrow$

$$\begin{array}{l} p\vee q\vee r\vee s \\ \sim p \\ \underline{\ \sim s\ } \\ q\vee r \end{array}$$

$\xrightarrow[\text{de unión}]{\text{por def}} x\in (A-B)\cup(B-A)$

Por lo tanto $(A\cup B)-(A\cap B) \subseteq A\triangle B$, con lo que queda probada la igualdad buscada.

Demostración de f):

Hay que demostrar 2 implicaciones:

Si $A\triangle B = A$ entonces $B=\varnothing$ y si $B=\varnothing$ entonces $A\triangle B = A$

Primero se demostrará: si $B=\varnothing$ entonces $A\triangle B = A$:

Usamos la definición de diferencia simétrica y propiedades ya demostradas (2.3.26), entonces

$A\triangle B = (A-B)\cup(B-A) = (A-\varnothing)\cup(\varnothing - A) = A\cup\varnothing = A.$

Veamos que si $A\triangle B = A$ entonces $B=\varnothing$.

Lo probaremos por el absurdo, suponemos que $A\triangle B = A$ pero $B\neq\varnothing$

Como $B \neq \emptyset$, hay al menos un elemento en B

Sea $x \in B \xrightarrow[\text{es verdadera}]{\text{porque } x\in A \vee x\notin A} x \in B \wedge (x \in A \vee x \notin A) \xrightarrow[\text{por leyes distributivas}]{}$

$\rightarrow (x \in B \wedge x \in A) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$

Llegamos a una forma proposicional de la forma $p \vee q$, se va aplicar la posibilidad que se de alguna de las dos situaciones de la disyunción.

Si *p* es verdadera se tiene:

$(x \in B \wedge x \in A) \xrightarrow[\text{intersección}]{\text{por def. de}} x \in (B \cap A) \xrightarrow[\text{dif simétrica}]{\text{por def. de}} x \notin A \triangle B \xrightarrow[A\triangle B=A]{\text{por hipótesis}} x \notin A$

Absurdo, porque partimos de $x \in A$ y llegamos a $x \notin A$

Si *q* es verdadera tenemos que:

$(x \in B \wedge x \notin A) \xrightarrow[\text{dif simétrica}]{\text{por def. de}} x \in A \triangle B \xrightarrow[A\triangle B=A]{\text{por hipótesis}} x \in A$

Luego tanto la aceptación de la verdad de *p* o de *q* llevan a absurdo, porque partimos de $x \notin A$ y llegamos a $x \in A$. Fue por aceptar que $B \neq \emptyset$.

Por lo tanto $A \triangle B = A$ entonces $B = \emptyset$

Y en conclusión se tiene que $A \triangle B = A$ si y sólo si $B = \emptyset$

♦

5. Unión e Intersección generalizada

Hemos visto las operaciones de unión e intersección para dos conjuntos, pero estas operaciones gozan de la propiedad de asociatividad por lo cual se pueden definir para un número finito de conjuntos.

Pues dados tres conjuntos A, B y C vale que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ por lo cual un elemento es de esa unión de conjuntos si es elemento de alguno de los tres.

Analizar qué pasa si son cuatro conjuntos A, B, C y D:

$$((A \cup B) \cup C) \cup D = A \cup ((B \cup C) \cup D)$$

por lo cual un elemento es de esa unión de conjuntos si es elemento de alguno de los cuatro….

Análogamente dados tres conjuntos A, B y C vale que $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ por lo cual un elemento es de esa intersección de conjuntos si es elemento de los tres. Piense que pasa si son cuatro conjuntos los intersecandos…

Sean $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$ conjuntos cualesquiera se define el conjunto la **unión generalizada** como

$$A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x : (\exists i)(0 \leq i \leq n \wedge x \in A_i)\}$$

EJEMPLO 2.5.1

Sean $A_i = [i, i+1) = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge i \leq x < i+1\}$ para cada *i, i* = 0,1,2,…,*n*

Así $A_0 = [0,1),\quad A_1 = [1,2),\quad A_2 = [2,3), \ldots, A_n = [n, n+1)$

Probemos que $\bigcup_{i=0}^{10} A_i = [0,11)$

Como hay que probar una igualdad de conjuntos, se probará la doble inclusión:

Sea $x \in \bigcup_{i=0}^{10} A_i \xrightarrow[\text{por def.}]{} (\exists i)(0 \leq i \leq 10 \wedge x \in A_i) \rightarrow (\exists i)(0 \leq i \leq 10 \wedge x \in [i, i+1)) \rightarrow$

$\rightarrow (\exists i)(0 \leq i \leq 10 \wedge i \leq x < i+1) \rightarrow 0 \leq x < 11$. Por lo tanto $x \in [0,11)$

Notemos que a cada número real x podemos asignarle el número entero n menor más cercano a x. Esta asignación es la función parte entera:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, \text{ definida por } f(x) = [x] = n, \quad n \in \mathbb{Z} \wedge n \leq x < n+1 .$$

Así definida tenemos que por ejemplo $f((1,2301)) = 1, \quad f((3,5)) = 3 \quad f((-2,47509)) = -3$

Por lo tanto, dado un número real x, $[x] \leq x < [x]+1$, siendo $[x]$ la parte entera de x.

Sea

$x \in [0,11)$ entonces $0 \leq x < 11$ y además $[x] \leq x < [x]+1$ luego $0 \leq x < 11 \wedge x \in \big[[x], [x]+1\big)$

Está claro que si

$0 \leq x < 11$ entonces $0 \leq [x] < [x]+1 \leq 11$, luego $0 \leq x < 11 \wedge x \in \big[[x], [x]+1\big)$ por lo cual

$0 \leq x < 11 \wedge x \in A_{[x]}$ entonces por la definición $x \in \bigcup_{i=0}^{11} A_i$.

Se puede ampliar el concepto de unión para número infinito de conjuntos.

Sean $A_0, A_1, A_2, \dots A_n, \dots$ conjuntos cualesquiera se define el conjunto

$$A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{x : (\exists i)(i \in \mathbb{N} \wedge x \in A_i)\}$$

EJERCICIO 2.5.2

Sean $A_i = [i, i+1) = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge i \leq x < i+1\}$ para cada *i*, $i \in \mathbb{N}$

Algunos ejemplos son $A_0 = [0,1)$, $A_1 = [1,2)$, $A_2 = [2,3), \dots, A_n = [n, n+1)$

Dibujarlos sobre la recta real.

Probar que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

Trabajemos en el mismo sentido con la intersección de conjuntos.

Sean $A_0, A_1, A_2, \dots A_n$ conjuntos cualesquiera se define el conjunto

$$A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=0}^{n} A_i = \{x : (\forall i)(0 \leq i \leq n \wedge x \in A_i)\}$$

EJEMPLO 2.5.3

Sean los conjuntos como en el ejemplo anterior $A_i = [i, i+1) = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge i \leq x < i+1\}$

para cada *i*, $i = 0,1,2,\dots, n$

Resulta entonces que $\bigcap_{i=0}^{10} A_i = \varnothing$ pues si supusiéramos por el absurdo que $\bigcap_{i=0}^{10} A_i \neq \varnothing$

existiría x tal que $x \in \bigcap_{i=0}^{10} A_i \xrightarrow[\text{por definición}]{} (\forall i)(0 \leq i < 10 \wedge x \in A_i)$ por lo cual

$(\forall i)(0 \leq i < 10 \wedge i \leq x < i+1) \longrightarrow (x \in [0,1) \wedge x \in [1,2) \wedge \dots \wedge x \in [10,11))$, absurdo, por lo tanto

$$\bigcap_{i=0}^{10} A_i = \varnothing$$

Ampliamos la definición para un caso infinito de conjuntos.

Sean $A_0, A_1, A_2, \dots A_n, \dots$ conjuntos cualesquiera se define el conjunto

$$A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{x : (\forall i)(i \in \mathbb{N} \wedge x \in A_i\}$$

EJERCICIO 2.5.4

Sean $A_i = [0,i] = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge 0 \le x \le i\}$ para cada *i, i*=0,1,2,…*n*

Probar que $\bigcap_{i=0}^{10} A_i = \{0\}$

EJERCICIO 2.5.5

Sean $A_i = [0,i] = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge 0 \le x \le i\}$ para cada *i, i*=1,2,…*n*

Probar que $\bigcap_{i=1}^{10} A_i = A_1$

EJERCICIO 2.5.6

Sean $A_i = [1,i) = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge 1 \le x < i\}$ para cada *i, i* >1 y $i \in \mathbb{N}$.

Representar algunos conjuntos sobre la recta real y demostrar que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = A_1$

EJERCICIO 2.5.7

Sean $A_i = \left[1, 1+\frac{1}{i}\right] = \left\{x : x \in \mathbb{R} \wedge 1 \le x \le 1+\frac{1}{i}\right\}$ para cada *i,* $i \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Representar algunos conjuntos sobre la recta real.

Demostrar que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1$ y $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_n$

RESUMEN de conceptos importantes del lenguaje de conjuntos

El conjunto vacío no tiene elementos	$\varnothing$
x es elemento de A	$x \in A$
A contenido en B	$A \subseteq B$ si y sólo si: $x \in A \to x \in B$
A igual a B	$A=B$ si y sólo si: $x \in A \leftrightarrow x \in B$
Conjunto de partes de A	$\mathscr{P}(A) = \{ P : P \subseteq A \}$

RESUMEN de conceptos operaciones de conjuntos

Intersección de A y B	$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
Unión de A y B	$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
Diferencia de A y B	$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
Complemento de A respecto de U	$\complement_U A = \{x : x \in U \wedge x \notin A\}$

EJERCICIO 2.6.1

1) Sea U = {alumnos que cursan alguna de las materias A_1, A_2, A_3 }

Expresar en lenguaje conjuntista por operaciones convenientes:

a) Los alumnos que cursan A_1

b) Los alumnos que no cursan A_1

c) Los alumnos que cursan A_1 y no cursan A_3

d) Los alumnos que no cursan A_1 y que no cursan A_3

e) Los alumnos que sólo cursan A_1

f) Los alumnos que cursan A_2 y no cursan A_3

2) Escribir en lenguaje conjuntista y representar:

a) Los números reales que son raíces de la ecuación $x^2 - 3x - 4 = 0$.

b) Los números reales que no son raíces de la ecuación $x^2 - 3x - 4 = 0$.

c) Los números reales que son raíces de la ecuación $x^2 - 3x - 4 = 0$ ó que su valor absoluto es 3.

d) Los números reales que no son raíces de la ecuación $x^2 - 3x - 4 = 0$ y que su valor absoluto es 3.

e) Los números reales que son raíces de la ecuación $x^2 - 3x - 4 = 0$ y que su valor absoluto es 3.

f) Los números reales que no son raíces de la ecuación $x^2 - 3x - 4 = 0$ y que su valor absoluto es distinto de 3.

3) Resolver haciendo un planteo conjuntista para:

En la lista de Algebra hubo 60 alumnos y 63 en la de Análisis Matemático I, para el turno T_3 del año pasado.

La oficina de la Dirección de Enseñanza ha informado que el año pasado se inscribieron 80 alumnos para cursar alguna de las 2 materias en el turno T_3 .

¿Cuántos alumnos cursaron simultáneamente las dos materias?

4) Escribir en lenguaje conjuntista por operaciones convenientes:

a) Los alumnos de la Facultad de Exactas que no hablan inglés.
b) Los alumnos de la Facultad de Exactas que no tienen computadora en su casa y que aprobaron el final de Algebra.
c) Los alumnos de la Facultad de Exactas que aprobaron el final de Análisis Matemática I o el final de Algebra.
d) Los alumnos de la Facultad de Exactas que aprobaron el final de Algebra y sacaron 10 en el final de Análisis Matemático I.
e) Los alumnos de la Facultad de Exactas que aprobaron el final de Algebra y no sacaron 10 en el final de Análisis Matemático I.
f) Los alumnos de la Facultad de Exactas que aprobaron los finales de Algebra y de Análisis Matemático I.

5) a) Siendo A, B y C conjuntos, demostrar que:

Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ y $C \subseteq A$ entonces $A = B = C$.

b) Siendo X un conjunto, demostrar que:

Si $X \subseteq \varnothing$ entonces $X = \varnothing$.

6) Sea $A = \{1,\ \{2\}, \{\varnothing\}, \{1,\ 2\}\}$, hallar $\mathcal{P}(A)$.

7) Sea $A = \{1,\ 2,\ \{3\},\ \{1,\ 2\}, \text{-}1\}$ decir si son verdaderas o falsas las siguientes relaciones. Justifique.

a) $3 \in A$
b) $\{1,\ 2\} \subseteq A$
c) $\{1,\ 2\} \in A$
d) $\{3\} \in A$
e) $\{\{3\}\} \subseteq A$
f) $\varnothing \in A$
g) $\{-1,\ 2\} \subseteq A$
h) $\varnothing \subseteq A$
i) $\{1,\ 2, -1\} \in A$

8) Probar para A, B y C conjuntos que:

a) $\varnothing \cup A = A$.

b) $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$.

c) $A \subseteq A \cup B$.

9) Probar (usando el contrarrecíproco) para A, B conjuntos que:

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \varnothing \Rightarrow (\mathrm{A} = \varnothing \wedge \mathrm{B} = \varnothing)$$

10) Probar (usando el método de reducción al absurdo) para A, B conjuntos que:

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \varnothing \Rightarrow (\mathrm{A} = \varnothing \wedge \mathrm{B} = \varnothing)$$

11) Probar (usando el método directo) para A, B conjuntos que:

$$\mathrm{A} \neq \varnothing \vee B \neq \varnothing \Rightarrow \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \neq \varnothing$$

12) Probar para A, B y C conjuntos que:

a) $\varnothing \cap A = \varnothing$.

b) $\mathrm{C} \subseteq A \wedge \mathrm{C} \subseteq B \Rightarrow \mathrm{C} \subseteq A \cap B$

c) $A \cap B \subseteq A$

13) Demostrar: $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\varnothing\}$

14) ¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones son equivalentes a $A \subseteq B \subseteq U$?

a) $A \cap \underset{U}{\mathcal{C}} B = \varnothing$

b) $A \cap \underset{U}{\mathcal{C}} B = A$

c) $A - B = \varnothing$

d) $A \cup \underset{U}{\mathcal{C}} B = U$

e) $\underset{U}{\mathcal{C}} B \subseteq \underset{U}{\mathcal{C}} A$

f) $\underset{U}{\mathcal{C}} A \cup B = U$

15) Sean $A \subseteq U$ y $B \subseteq U$, siendo U un universo dado. Probar:

a) $A - B = A \cap \underset{U}{\mathcal{C}} B$

b) $\underset{U}{\mathcal{C}}(A \cap B) = \underset{U}{\mathcal{C}} A \cup \underset{U}{\mathcal{C}} B$

16) Hallar $A \triangle B$ en los siguientes casos:

a) $A = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 1\}$, $B = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x \leq 3\}$

b) A es el conjunto de los números impares; B es el intervalo natural [12, 30].

17) Siendo A, B y C conjuntos; U el universo donde están definidos esos conjuntos, probar y representar utilizando diagramas de Venn:

a) $A-(B-C) = (A-B)\cup(A\cap C)$
b) $(A-B)\cap B = \varnothing$
c) $A\cup(B-C) = (A\cup B)-(C-A)$
d) $A-B = (A\cup B)-B$
e) $A\triangle B = B\triangle A$
f) $A-(A-B) = A\cap B$
g) $A-B = A-(A\cap B)$
h) $A\triangle U = \underset{U}{\mathcal{C}} A$
i) $(A\cap B)-C = (A-C)\cap(B-C)$

18) Sean, para cada natural *n*, los conjuntos $A_n = \{x : x\in \mathbb{R} \wedge x \geq n\}$, $B_n = \{x : x\in \mathbb{R} \wedge x \leq n\}$.

Determinar

a) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ b) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$

c) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n - B_n)$ d) $\bigcap_{n=1}^{8} B_n$

19) Determinar:

a) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n, n+2)$ b) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n, 2n]$

Considerar intervalos reales y luego intervalos naturales.

CAPITULO 3
Iniciación a la Teoría de Números

En este capítulo se desarrollarán los fundamentos del Algebra: la *Aritmética de los números naturales y enteros.*

Esos conjuntos numéricos son muy conocidos desde el primer acercamiento a la Matemática y muy usados en casi todos aspectos operacionales. Se hará un repaso o estudio sobre los conceptos más importantes dentro esos conjuntos, con la idea de introducir un aspecto relevante en la Matemática: ***las demostraciones,*** por lo general muy sencillas, de algunas propiedades dentro de esos conjuntos.

Consideremos como dados los **números naturales** 0,1, 2, 3,....... , al conjunto de todos ellos lo designaremos por $\mathbb{N}$

0. Operaciones básicas $\mathbb{N}$

También consideramos como definidas las operaciones fundamentales de suma (anotada como +) y multiplicación o producto (anotada por .).

Recordemos algunas propiedades importantes de estas operaciones:

1) ***La suma de dos números naturales es un número natural***

También podemos formularla como sigue:

Si a y b son números naturales entonces $a + b$ es un número natural.

Esta propiedad se llama **ley de cierre para la suma de números naturales, también decimos que la suma es cerrada en** $\mathbb{N}$.

2) ***El 0 es tal que sumado con cualquier otro número no lo modifica***.

Esto lo podemos expresar:

Dado el 0, si a es un número natural cualquiera entonces a+0 = a.

Por eso al 0 se le dice **elemento neutro de la suma**.

3) ***Si se consideran tres números naturales, la suma de los dos primeros*** **más** ***el tercero resulta igual*** a ***sumarle al primero la suma de los otros dos.***

Se puede formular:

> *Si* a, b *y* c *son naturales cualesquiera entonces* $(a+b)+c = a+(b+c)$
>
> A esta propiedad se le da el nombre de **asociativa para la suma.**

4) La suma de números naturales es conmutativa.

Es decir:

> *Si* a *y* b *son números naturales cualesquiera entonces* $a + b = b + a$
>
> A esta propiedad se la llama propiedad **conmutativa de la suma**

EJERCICIO 3.0.1

a) Enuncie la propiedad similar a la 1) para la multiplicación de los números naturales.

b) ¿Hay elemento neutro para la multiplicación de números naturales? ¿Cuál es? Ejemplifique.

c) Formule la propiedad asociativa de la multiplicación de números naturales.

d) ¿Es cierto que el orden de los factores naturales no altera el producto? ¿Cómo se llama esa propiedad?

Otra propiedad que debemos recordar es la **distributiva de la multiplicación en la suma de números naturales,** es decir:

> *Si* a, b, c *son números naturales cualesquiera entonces* $a.(b+c)= a.b + a.c$

- ***Orden Usual (o natural) en*** $\mathbb{N}$:

Dados dos números naturales a y b puede suceder que:

> $a \leq b$ **(**a **menor o igual que** b**),** lo que **significa que** a **"aparece" antes que** b **en la sucesión de todos los números naturales, o es igual.** En **caso contrario** $b < a$.

Recordemos que:

> Si a, b son números naturales y $a \leq b$ entonces **existe un número** natural c, llamado **resta** o **diferencia de** b **y** a, que se anota $c = b - a$ el cual verifica $b = a + c$

1. **Inducción Matemática**

A fines del siglo XIX Giuseppe Peano proporcionó una descripción de los números naturales en término de cinco axiomas. En ellos se pueden interpretar los aspectos familiares de los números naturales.

Uno de los aspectos más importantes de esta formulación es el quinto axioma que convalida un método de demostración muy importante y de gran utilidad, pues su uso permite demostrar la validez de proposiciones universales relativas a los números naturales. Como se ha expresado anteriormente los *resultados válidos en Matemática son aquellos que se pueden demostrar*. Cosa que en general no es simple.

Podemos agregar que cuando se presentan los distintos temas en una materia de Matemática se dan en ella los teoremas más importantes, con un encadenamiento que por lo general no es el histórico. Ni, por lo general, las demostraciones que se exhiben son las originales, el avance de los conocimientos hace que las demostraciones puedan mejorarse o hacerse "más elegantes" con el aporte de nuevos resultados.

La manera de hacer demostraciones y también de recrearlas depende de lo que se quiera demostrar y también de la "forma" del enunciado.

Si el enunciado a probar es de forma existencial alcanzará en algunos casos con exhibir un individuo con las características que dice el enunciado o una manera de construirlo.

Si el enunciado es de forma universal habrá que probar que cada uno de los elementos del universo cumple con lo afirmado. Si el universo fuera de un número finito de individuos podríamos analizar que cada uno de ellos verifica lo enunciado. Si es infinito, tomar un elemento arbitrario (NO un ejemplo) del universo del que se habla, y probar que tiene la propiedad enunciada.

Para propiedades cuyo universo es el conjunto de los números naturales tenemos otra manera que prontamente veremos.

- **Los Axiomas de Peano**

En el año 1890, Peano postuló los siguientes cinco axiomas para $\mathbb{N}$:

_Axioma 1 :	$0 \in \mathbb{N}$
Axioma 2 :	$x \in \mathbb{N}$ entonces $x' \in \mathbb{N}$.
Axioma 3 :	$0 \neq x'$ para todo $x \in \mathbb{N}$
Axioma 4 :	Si $x' = y'$ entonces $x = y$

Si interpretamos $\mathbb{N}$ como el conjunto de los números naturales y x' como *"el siguiente de x"* (y esta idea $x' = x + 1$, el natural que está después de x en la sucesión natural), estos cuatro axiomas nos dicen que:

1) el 0 es un número natural;
2) todo número natural tiene un siguiente que también es natural;
3) el 0 no sigue a ningún natural, lo que equivale a decir que 0 es el primer número natural;
4) si los siguientes son iguales es porque los naturales de los que provenían eran iguales o equivalentemente si los naturales son distintos también lo son sus siguientes.

El otro axioma:

Axioma 5: Dado L un subconjunto de $\mathbb{N}$, es decir $L \subseteq \mathbb{N}$.

Si: a) $0 \in L$

y

b) Cualquiera sea x, si $x \in L$ entonces $x' = x + 1 \in L$

Entonces $L = \mathbb{N}$

A este último axioma se lo llama indistintamente: **Axioma Inductivo**, o **de Inducción**, o **Principio de Inducción Matemática**, o **Principio de Inducción Completa** o **Principio de Recurrencia.**

Observación e interpretación:

Luego de presentar los Axiomas 1 a 4, hemos destacado que los números naturales comienzan con el 0 y que no terminan, pues dado un número natural, él tiene un siguiente que también es un número natural. Estos hechos que nos resultan tan "naturales" (pero en otro sentido...) nos permiten interpretar y comentar el Axioma 5.

Sea un subconjunto L de números naturales (un conjunto que está incluido en $\mathbb{N}$) tal que tiene al 0 como elemento, es decir 0 está en L y que además cumple que *cualquiera* sea el número natural h (para ponerle un nombre...que es totalmente arbitrario, *pero no un ejemplo particular)* que esté en L, también está su siguiente $h+1$. Rescatando la idea que este paso lo puedo repetir tantas veces como números naturales hay … y he comenzado desde 0 (el primer número natural), estamos obteniendo que en L estarán todos y cada uno de los números naturales.

Luego L *es* .....claramente $\mathbb{N}$.

Los conjuntos que tienen la propiedad a) y b) que pide para L el Axioma 5, se llaman **conjuntos inductivos.**

¿Para qué sirve este Axioma?



Como venimos anticipando el Axioma 5 sirve para demostrar propiedades universales válidas para todos los números naturales.

Veamos como.

❖ Método de Inducción

Dada una proposición del tipo $(\forall n)(P(n))$, ¿cómo se demuestra, si n es una variable en $\mathbb{N}$, que esa proposición es verdadera?

Recordemos que la proposición $(\forall n)(P(n))$ es verdadera si y sólo si el *conjunto de verdad* de *P(n)* (esto es los valores $a \in \mathbb{N}$ para los cuales resulta verdadera *P(a)*) es el universo de *P(n),* es decir si el *conjunto de verdad coincide con el conjunto de los números naturales .*

Si llamamos $\mathcal{V}$(P) al conjunto de verdad de *P(n)* entonces deberemos controlar que $\mathcal{V}$(P) = $\mathbb{N}$

Y es justamente en ese análisis que usamos el Axioma de Inducción.

El conjunto $\mathcal{V}$(P) es un subconjunto de $\mathbb{N}$, luego resultará que $\mathcal{V}$(P) = $\mathbb{N}$, si logramos probar que $\mathcal{V}$(P) es inductivo.

Es decir para $\mathcal{V}$(P) debemos ver que cumpla:

a) $0 \in \mathcal{V}$(P)

b) Cualquiera sea h, si $h \in \mathcal{V}$(P) entonces $h' = h + 1 \in \mathcal{V}$(P)

Porque entonces por el Axioma 5, resulta que $\mathcal{V}$(P) = $\mathbb{N}$

¿Qué significa que $\mathcal{V}$(P) cumpla a) y b) en términos de "verdad"?

Esto significa:

Tener a) $0 \in \mathcal{V}$(P) se traduce en:

P(0) es verdadera.

Tener b) Para cualquier h, si $h \in \mathcal{V}$(P) entonces $h' = h + 1 \in \mathcal{V}$(P) se traduce en:

Para cualquier h, si *P(h)* es verdadera entonces *P(h+1)* es verdadera

Entonces el **método de demostración por Inducción de** $(\forall n)(P(n))$, con $n \in \mathbb{N}$ será:

1) Probar que *P(0)* es verdadera

2) Si *P(h)* es verdadera (para un h cualquiera), entonces probar que *P(h+1)* es verdadera.

Estos dos pasos cumplidos nos permitirán afirmar que $(\forall n)P(n)$ es verdadera.

El paso 2):

En este paso se toma como hipótesis de trabajo (llamada muchas veces *hipótesis inductiva*) que <u>*P(h)* es verdadera</u> y se **debe demostrar** que <u>*P(h+1)* es verdadera.</u>

La justificación de este proceder es la "forma" de la condición b) del Axioma 5. Tiene la "forma" de condicional.

Recordando que un condicional sólo es falso en el caso que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso, es por eso necesario, para probar la validez de 2, asumir *P(h)* como verdadera, que es el *caso crítico* (o más desfavorable) y demostrar que el consecuente, *P(h+1)* es verdadera.

EJEMPLO 3.1.1

¿Es verdadera: *Para todo n, n es producto de números primos?*

Está claro que está expresando lo mismo que:

Todo número natural es producto de números primos.

La simbolización será: $(\forall n)(P(n))$

Considerando: $\mathcal{N}$ como el universo del *P(n)*

P(n): n *es producto de números primos*

El análisis que debemos hacer es: ¿ Es $\mathcal{V}$(P) = $\mathbb{N}$?

Esta proposición es falsa porque el 0 no es producto de primos. Es decir no se cumple 1), pues *P(0)* es falsa ó equivalentemente $0 \notin \mathcal{V}(P)$

Observar que P(0) es "*0 es producto de números primos"*

EJEMPLO 3.1.2

Sea *P(n):2n+1 es un número impar*

Analizar el valor de verdad de $(\forall n)(P(n))$, *con* $n \in \mathbb{N}$

El universo del *P(n)* es $\mathbb{N}$.

Si $\mathcal{V}$(P) es el conjunto de verdad del esquema *P(n)*, ¿es $\mathcal{V}(P) = \mathbb{N}$?

Si vemos que se cumple:

1) $0 \in \mathcal{V}(P)$, **y**

2) cualquiera sea h, $h \in \mathcal{V}(P)$ entonces $h + 1 \in \mathcal{V}(P)$

A $\mathcal{V}$(P) le aplicaremos el axioma Inductivo y resultará $\mathcal{V}(P) = \mathbb{N}$

Recordemos que un número es impar si no es par. Además, un número es par si es divisible por 2. Luego, un número es impar si 2 no lo divide.

1) $0 \in \mathcal{V}$(P) es lo mismo que decir que *P(0)* es verdadera.

¿Qué dice *P(0)*?
P(0): 2.0 +1 es un número impar.

Como *2.0 + 1* es *1* y como 2 no divide a 1, entonces *P(0)* es verdadera.
Por lo tanto, 1) se cumple.

Veamos ahora 2). Su antecedente: $h \in \mathcal{V}$(P) se traduce como *P(h)* es verdadera
Siendo *P(h): 2.h +1 es un número impar*
Y aceptamos *P(h)* como hipótesis inductiva que es equivalente a aceptar *P(h)* como verdadera.
Esto significa, que cualquiera sea *h*, se acepta que *2.h+1* no es divisible por 2.

El consecuente de 2): $h + 1 \in \mathcal{V}$(P) es lo mismo que decir que *P(h + 1)* es verdadera
siendo *P(h+1): 2.(h+1) +1 es un número impar*

Hay que demostrar que:
"Si *2.h +1 es un número impar entonces 2.(h+1) +1 es un número impar*"

2.(h+1) +1 = 2.h+ 2 +1 = 2 + 2.h + 1 = 2 + (2.h + 1) (aplicando propiedad distributiva del producto en la suma y conmutando sumandos y asociando)
2 divide a 2 y como 2 no divide a *2.h + 1* por hipótesis inductiva, luego 2 no divide a *2.(h+1) +1* pues sino, suponiendo lo contrario:
2.(h+1) +1= 2 + (2.h +1) = 2.q para algún q entero
por lo tanto, despejando: *2.h +1 = 2.q - 2 =2. (q-1)* (habiendo sacado factor común 2)
Luego *2 divide a 2h+1,* en contra de la hipótesis inductiva

Por lo tanto vale 2). Entonces $\mathcal{V}$(P) = $\mathbb{N}$ y esto equivale a que $(\forall n)(P(n))$ es verdadera.

EJEMPLO 3.1.3

Pretendemos que lo siguiente sirva para que esclarecer que "algunos ejemplos **no** son suficiente..."

A lo largo de los siglos fue preocupación de la mayoría de los matemáticos encontrar una fórmula que genere a todos los números primos o que al menos genere algunos.

1) En el siglo XVII Pierre Fermat conjeturó que $2^{2^n} + 1$ es primo para todo n natural.

Si calculamos esta expresión para sucesivos valores de *n:*

$2^{2^0}+1=2^1+1=3$

$2^{2^1}+1=2^2+1=5$

$2^{2^2}+1=2^4+1=17$ Compruebe que son primos (use la criba de Eratóstenes)

$2^{2^3}+1=2^8+1=257$

$2^{2^4}+1=65537$

No había calculadoras..., así que en siglo XVII no era fácil hacer cuentas buscando divisores de $2^{2^5}+1$ = 4294967297.

Fue en el siglo XVIII que Euler encontró que $2^{2^5}+1$ = 4294967297 = 641. 6700417

2) Otra fórmula para números primos:

¿ n^2-n+41 es un número primo para todo natural n??

Calculemos para varios valores naturales:

$0^2-0+41=41$

$1^2-1+41=41$

$2^2-2+41=43$

$3^2-3+41=47$

$4^2-4+41=53$

$5^2-5+41=61$

$6^2-6+41=71$

Siga unos números más..... ¿Y qué contesta? ¿Vale para todo n natural?

Los enunciados anteriores se llamaron **conjeturas**, ya que durante mucho tiempo se creía que eran verdaderas para todos los naturales pero no habían sido probados ni refutados. Evidentemente probar con algunos números por muchos que sean no garantiza la verdad del enunciado para TODOS los naturales.

❖ ***Los dos pasos de la inducción, para qué?***

EJEMPLO 3.1.4

1) Demostrar $(\forall n)(n = 0)$, *con* $n \in \mathbb{N}$ **.**

¿Qué dice *P(0)*? *P(0): 0 = 0*

Como el valor de verdad de *P(0)* es verdadera concluyo que $(\forall n)(n = 0)$, *con* $n \in \mathbb{N}$

Claramente que esto no será aceptado, hemos cumplido una sola etapa del método de demostración por inducción, además la etapa más sencilla.

2) Demostrar $(\forall n)\ (n = n+1)$, con $n \in \mathbb{N}$.

Veamos, supongamos que vale *P(h) para cualquier h* y vamos a probar *P(h+1).*

¿Qué hemos aceptado? Es verdadero *P(h),* siendo $P(h)$: $h = h+1$

¿Qué dice *P(h+1)?* $P(h+1)$: $h+1 = (h+1)+1$ y debemos probar que vale.

Partamos del primer miembro de la igualdad que propone *P(h+1)* y veamos:

$h+1 = (h+1)+1$ la sustitución es por considerar verdadera *P(h)*

Luego, *P(h+1)* es válida, habiendo supuesto *P(h),* y h es cualquier número natural, entonces:

$(\forall n)\ (n = n+1)$, con $n \in \mathbb{N}$.

Claramente, esto es falso.

Los dos pasos del método deben cumplirse para afirmar que la proposición es válida para todos los naturales.

2. Sucesiones y símbolos auxiliares

Una **sucesión** es una aplicación de $\mathbb{N}$ en un conjunto *A.*

Si esta función la indicamos por S se tiene

S: $\mathbb{N} \to A$

Como el dominio es $\mathbb{N}$, están definidos S(0), S(1), S(2), etc. Se acostumbra a indicar estos elementos por:

S(0) = a_0

S(1) = a_1

S(2) = a_2

…………

En general para un k cualquiera, S(k) = a_k

Dado a_k se dice que k es el índice, y que **a_k es el k-ésimo término de la sucesión.**

Se lo llama también **término general** de la sucesión.

La función S lo que hace es elegir, según una determinada ley (la de su definición) los elementos a_0, a_1, a_2,... a_k,...del conjunto A.

Por lo general las sucesiones sólo se indican por a_0, a_1, a_2,... a_k,...es decir por la imagen de la función S.
Otra notación para ellas es $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

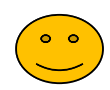
EJEMPLO 3.2.1
Sea S: $\mathbb{N} \to A$, tal que S(n) = $n + 1$. Hallar los primeros 5 términos de la sucesión.

Esto significa que se debe hallar S(0) = a_0 , S(1) = a_1, S(2) = a_2, ..., S(4) = a_4
Y ellos son a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 5

EJEMPLO 3.2.2
Hallar el término general de la sucesión cuyos 6 primeros términos son: 1, 3, 5, 7, 9, 11.

Esto significa que se debe encontrar la ley de formación de los elementos a_n , sabiendo que
a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 7, a_4 = 9, a_5 = 11

Todos los elementos que se presentan son impares.
La expresión para un número impar es $2.n + 1$, luego S(n) = a_n = $2.n + 1$



Es casi inmediato **extender una sucesión**, esto es, conocido el término general ir dando cada uno de sus elementos, no resulta así el proceso inverso de encontrar el término general a partir de varios elementos de la sucesión.
El trabajo con varios casos da la práctica para lograrlo...Esto favorece "el golpe de vista" y la imaginación tendrá que acompañar.

EJEMPLO 3.2.3
Hallar el término general de la sucesión cuyos primeros elementos son:

$$1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{8}, \quad \frac{1}{16}, \quad -\frac{1}{32}, \quad \frac{1}{64}$$

Observar primeramente que los números son alternativamente positivos y negativos.
Una manera de obtener esta alternancia en los signos es pensar en las sucesivas potencias de -1. Pues $(-1)^h$ es 1 o -1, según la paridad de h.

Prescindiendo por un momento de los signos, los elementos dados son potencias de $\frac{1}{2}$, pues

$1=\left(\frac{1}{2}\right)^0$, $\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^1$, $\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$, etc.

Combinando ambas observaciones:

$$1=(-1)^0\left(\frac{1}{2}\right)^0, \quad -\frac{1}{2}=(-1)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1, \quad \frac{1}{4}=(-1)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad -\frac{1}{8}=(-1)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

$$\frac{1}{16}=(-1)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4, \quad -\frac{1}{32}=(-1)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5, \quad \frac{1}{64}=(-1)^6\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

Luego podemos decir que el término general es: $a_n=(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ claramente también puede presentarse equivalentemente por: $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Esto nos permite afirmar que en realidad lo correcto es hablar de "un término general" de la sucesión en lugar de "el término general".

Observación: En una sucesión (como en toda función) es irrelevante la letra que utilicemos para designar a la variable, lo que importa es la ley que deba cumplir. Para indicar este hecho es común decir que "la variable es muda".

EJEMPLO 3.2.4

Hallar los 5 primeros términos de las siguientes sucesiones:

$a)\ \ a_h=(-1)^{h+1}.3^h$

$b)\ \ a_t=(-1)^{t+1}.3^t$

$c)\ \ b_j=-(-3)^j$

Desarrollemos cada una de las expresiones

$a)\ a_h=(-1)^{h+1}.3^h$ Para obtener los 5 primeros elementos debe variar h de 0 a 4, por lo cual

$a_0=(-1)^{0+1}.3^0=-1.1=1$

$a_1=(-1)^{1+1}.3^1=1.3=3$

$a_2=(-1)^{2+1}.3^2=-1.9=-9$

$a_3=(-1)^{3+1}.3^3=1.27=27$

$a_4=(-1)^{4+1}.3^4=-1.81=-81$

$b) \quad a_t = (-1)^{t+1}.3^t$

Para obtener los 5 primeros elementos debe variar *t* de 0 a 4, por lo cual

$a_0 = (-1)^{0+1}.3^0 = -1.1 = 1$

$a_1 = (-1)^{1+1}.3^1 = 1.3 = 3$

$a_2 = (-1)^{2+1}.3^2 = -1.9 = -9$

$a_3 = (-1)^{3+1}.3^3 = 1.27 = 27$

$a_4 = (-1)^{4+1}.3^4 = -1.81 = -81$

$c) \quad b_j = -(-3)^j$

Para obtener los 5 primeros elementos debe variar *j* de 0 a 4, por lo cual

$b_0 = -(-3)^0 = -1 = 1$

$b_1 = -(-3)^1 = -(-3) = 3$

$b_2 = -(-3)^2 = -9$

$b_3 = -(-3)^3 = -(-27) = 27$

$b_4 = -(-3)^4 = -81$



¿Qué ocurre? ¿Cuántos términos generales tiene una sucesión?

EJERCICIO 3.2.5

Hallar al menos dos formas para el término general de las siguientes sucesiones si se conocen algunos términos consecutivos:

a) 1, -1, 1, -1, 1, -1,.......

b) 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18,.....

c) 1, 1, 1, 1, 1, ...

d) 0, $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

e) $sen\, 2x,\ sen\, 4x,\ sen\, 6x,\ sen\, 8x, \cdots$

EJERCICIO 3.2.6

Considerar los siguientes términos generales de sucesiones y calcular los correspondientes para los casos *j = 0, 6, h, m, m+1, 6k*

a) $b_j = \dfrac{(-2)^{j+2}}{3j-1}$

b) $p_j = \sqrt[j+5]{a^j}$ siendo a un real mayor que 0

c) a_j *: 2. j -1 es un número impar*

d) b_j *: 3 divide a j*

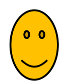
❖ Definiciones por recurrencia

Hay conceptos muy usuales que se definen de "a pasos".

Piense en la potencia de exponente natural de un número real no nulo, la definición usual es la siguiente:

Si $a \neq 0$, $\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^{n+1} = a.a^n \text{ para } n \geq 0 \end{cases}$

Se define para *una base* de la definición, en este ejemplo se toma el 0, y luego ya conocida para un valor (el n) se define para el siguiente ($n+1$). Es así como queda definida la potencia para todo natural, pues una vez definida para 0, usando ese dato en el paso siguiente será definida para 1, luego para 2, etc. Seguidamente se verán otras definiciones de este tipo.

Las sucesiones también pueden en algunos casos definirse recursivamente. 

EJEMPLO 3.2.7
Pensemos en la siguiente sucesión: 3, 7, 11, 15, 19, …

En este caso $a_1 = 3$ y luego cada término se obtiene del anterior sumándole 4, podemos decir entonces que

$$a_1 = 3 \text{ y } a_n = a_{n-1} + 4 \quad n \geq 2$$

Esta definición de la sucesión es recursiva, ya que hace uso de términos anteriores.

EJEMPLO 3.2.8
Miremos ahora la sucesión: 5, 10, 20, 40, 80,….

En este caso $a_1 = 5$ y luego cada término se obtiene del anterior multiplicándolo por 2, podemos decir entonces que

$$a_1 = 5 \text{ y } a_n = a_{n-1}.2 \quad n \geq 2$$

Esta definición de la sucesión es recursiva, ya que hace uso de términos anteriores.

Estas dos sucesiones que hemos visto son sucesiones muy especiales que definimos a continuación de manera general:

Una ***sucesión aritmética***, es una sucesión tal que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante, es decir $a_n - a_{n-1} = d$, a esa constante la llamamos **diferencia** y la notamos con la letra d.

Para que la sucesión sea interesante ¿cómo debe ser d….?
Se tiene entonces que una sucesión aritmética tiene definición recursiva como:

$$a_1 \text{ y } a_n = a_{n-1} + d \quad n \geq 2$$

Una ***sucesión geométrica***, es una sucesión tal que el cociente entre dos términos consecutivos es constante, es decir $\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$, a esa constante la llamamos **razón** y la notamos con la letra *r.*
¿Cómo tiene que ser el denominador?
Se tiene entonces que una sucesión geométrica tiene definición recursiva como:

$$a_1 \text{ y } a_n = a_{n-1}.r \quad n \geq 2.$$

¿Cómo tienen que ser a_1 y *r* para que haya una sucesión geométrica interesante….?

Pensemos en una sucesión aritmética cualquiera, definida como:

$$a_1 \text{ y } a_n = a_{n-1} + d \quad n \geq 2$$

Podemos escribir entonces que:

$$a_1$$
$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_2 + d + d = a_1 + d + d + d$$

Esto sugiere entonces que:

$a_n = a_1 + (n-1)d \quad n \geq 1$ es la definición explícita del término general de la sucesión aritmética, conocido el primer término y la diferencia.

Pensemos ahora en una sucesión geométrica cualquiera, definida como:

a_1 y $a_n = a_{n-1}.r \quad n \geq 2$

Podemos escribir entonces que:

$$a_1$$
$$a_2 = a_1.r$$
$$a_3 = a_2.r = a_1.r.r$$
$$a_4 = a_3.r = a_2.r.r = a_1.r.r.r$$

Esto sugiere entonces que:

$a_n = a_1.r^{n-1} \quad n \geq 1$ es la definición explícita del término general de la sucesión de la sucesión geométrica conocido el primer término y la razón.

Símbolos auxiliares

Veremos ahora una notación que es útil cuando queremos sumar o multiplicar un número finito de elementos que pertenecen a una sucesión. Estos elementos auxiliares también admiten una definición recursiva.

Notación para la suma: Sigma

Supongamos, sumar los primeros 6 números impares: 1, 3, 5, 7, 9, 11.
Esto es: 1+ 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36

Si ahora queremos sumar los primeros 16 números impares: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31.

Esto es: 1+3+ 5+ 7+ 9+ 11+ 13+ 15+ 17+ 19+ 21+ 23+ 25+ 27+ 29+ 31=
Esta escritura es muy poco práctica.
En general se escribe: 1+3+5+ ....+27+29+31=

Pone algunos elementos de la sucesión a sumar, puntos suspensivos para sugerir que sigue igual (la misma sucesión) y termina con otros, los últimos de la sucesión a sumar. Esto tampoco es muy práctico y además es impreciso. Para evitar ambigüedades vamos a presentar un símbolo auxiliar, que llamamos **sumatoria,** que es la letra sigma mayúscula del alfabeto griego:

$$\sum$$

¿Cómo se usa y cuándo?

Sirve en casos como el anteriormente mencionado, la suma de un número finito de elementos de una sucesión.

Utilizamos esta herramienta haciendo uso también del término general de una sucesión, en el caso de los números impares diremos que queremos:
"Sumar los números $2k + 1$ con k variando de 0 a 15, de uno en uno"

Eso lo expresamos con este símbolo:

$$\sum_{k=0}^{15}(2k+1) =$$

Esto se lee "sumatoria desde k = 0 hasta 15 de 2k +1 "

Cuando queremos expresar la suma de una sucesión cualquiera de término general a_k desde $k = 0$ hasta el número $k = n$ escribimos:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k$$

Esto significa que estamos sumando a_0, a_1 , … , y a_n

Definimos recursivamente la sumatoria:

$$\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0 \quad \textbf{y} \quad \sum_{k=0}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$$

La definición nos da una herramienta para expresar una suma de una sucesión con precisión.

Otras alternativas de lo mismo: $\sum_{0 \le k \le n} a_k$ es tambien equivalente a escribir $\sum_{k=0}^{k=n} a_k$

Usémosla en el ejemplo anterior:

El término general de la sucesión está dado por
$a_k = 2k + 1$ si se pretende sumar los impares de 1 al 11, observar que
1= a_0 y $11 = a_5$

Luego lo pedido resulta: $\sum_{k=0}^{5}(2k+1)$

Si se pretende sumar los impares de 1 al 31, observar que 1= a_0 y $31 = a_{15}$

Luego se tiene entonces lo que resulta: $\sum_{k=0}^{15}(2k+1)$

EJEMPLO 3.2.9

Desarrollar la sumatoria:

$$\sum_{1\le i\le 5}(-i)(i+1) = (-1)(1+1)+(-2)(2+1)+(-3)(3+1)+(-4)(4+1)+(-5)(5+1)$$

EJEMPLO 3.2.10

Desarrollar la sumatoria:

$$\sum_{j=0}^{3} 2^{j+1} = 2^{0+1}+2^{1+1}+2^{2+1}+2^{3+1}$$

EJERCICIO 3.2.11

a) Desarrollar: $\sum_{0\le j\le 12} a^j.(1-b)^{j+1}$

b) Desarrollar: $\sum_{j+i=4} a_i b_j$

EJERCICIO 3.2.12

a) Demostrar que para todo n vale: $\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{j=0}^{n} a_j$

b) Demostrar que para todo n vale: $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_{i+1}$

c) Demostrar que si $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ y $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ son sucesiones, entonces para todo natural n, se tiene que:

$I)$ $\sum_{j=1}^{n}(a_j \pm b_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j \pm \sum_{j=1}^{n} b_j$

$II)$ $\sum_{j=1}^{n} c.a_j = c.\sum_{j=1}^{n} a_j$

$III)$ $\sum_{j=1}^{n} c = n.c$

EJEMPLO 3.2.13

Demostrar por el método de Inducción Completa:

$$0+1+2+3+.............+n=\frac{n.(n+1)}{2}, \text{ cualquiera sea } n, n \text{ número natural}$$

Vamos a utilizar el símbolo de sumatoria para practicar con él.

Así lo anterior se puede escribir:

$$\sum_{i=0}^{n} i=\frac{n.(n+1)}{2}, \text{ cualquiera sea } n, n \text{ número natural}$$

Esta prueba será muy simple y es importante retener la expresión para calcular la suma de los *n+1* primeros números naturales.

Se pueden poner ejemplos numéricos para convencerse de la veracidad de la proposición, pero *como se quiere demostrar usaremos el Principio de Inducción Matemática:*

1) Ver si *P(0)* es verdadera:

Primero formulemos lo que dice $P(0)$,

$$P(0): \sum_{i=0}^{0} i=\frac{0.(0+1)}{2}$$

el primer miembro de la igualdad propuesta por $P(0)$ es $\sum_{i=0}^{0} i=0$

el segundo miembro de la igauldad propuesta por $P(0)$ es $\frac{0.(0+1)}{2}=0$

Luego observamos que $P(0)$ es verdadera

Supongamos verdadera a *P(h)* y demostremos *P(h+1):*

$$P(h): \sum_{i=0}^{h} i=\frac{h.(h+1)}{2} \quad \text{entonces} \quad P(h+1): \sum_{i=0}^{h+1} i=\frac{(h+1).((h+1)+1)}{2}$$

Aceptamos a *P(h)* como verdadera. Decimos que *P(h)* se acepta verdadera por *hipótesis inductiva*. Hay que demostrar la igualdad para $h+1$.

Analicemos el primer miembro de la igualdad propuesta:

$$\sum_{i=0}^{h+1} i=\sum_{i=0}^{h} i+(h+1) \text{ por la definicion de } \sum$$

$$\sum_{i=0}^{h} i+(h+1)=\frac{h.(h+1)}{2}+(h+1) \text{ por la hipotesis inductiva}$$

$$\frac{h.(h+1)}{2}+(h+1)=\frac{h.(h+1)+2.(h+1)}{2}=\frac{(h+1).(h+2)}{2}=\frac{(h+1).((h+1)+1)}{2}$$

La justificación de los últimos pasos queda para el lector.

Hemos cumplido los dos pasos que pide el método de inducción. Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n.(n+1)}{2}, \text{ cualquiera sea } n,\ n \text{ numero natural}$$

Si en una demostración por Inducción no usa la hipótesis inductiva, entonces seguro que está mal la demostración. O al menos no se hizo por inducción.

EJERCICIO 3.2.14

Probar que para todo natural, $n \geq 0$ vale la siguiente igualdad:

$$1 + 2 + 2^2 + \dots\dots\dots + 2^n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

Notación para el producto: Pi

Ahora queremos multiplicar un número finito de elementos de una sucesión. Por ejemplo, multiplicar:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32}$$

Podemos expresar esa operación como: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{32}$

Una manera más "económica" de expresar la operación es: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{1}{32}$

Pero es bastante imprecisa.

Para evitar estas situaciones y en especial cuando son muchos los factores se define un símbolo $\prod$ (es la letra pi mayúscula) que llamamos **productoria**.

Definimos recursivamente:

$$\prod_{k=0}^{0} a_k = a_0 \quad \text{y} \quad \prod_{k=0}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right) \bullet a_{n+1}$$

Esto nos da una herramienta para expresar un producto con precisión.

Otras alternativas de lo mismo: $\prod_{0 \leq k \leq n} a_k$ es tambien equivalente a escribir $\prod_{k=0}^{n} a_k$

EJEMPLO 3.2.15

Expresar el producto de los primeros 100 números naturales pares no nulos.

La sucesión de naturales pares está dada por 0, 2, 4, 6,....., *2n,....*

Los no nulos son 2, 4, 6,....., que podemos expresar su *término general* por

$a_n = 2.(n+1)$ para $n \geq 0$

Tenemos entonces que:

$$a_0 = 2(0+1) = 2$$
$$a_1 = 2(1+1) = 4$$
$$a_2 = 2(2+1) = 6$$
$$a_3 = 2(3+1) = 8$$
$$...$$
$$a_{99} = 2(99+1) = 200$$

Entonces el producto lo expresamos por:

$$\prod_{k=0}^{99} a_k = \prod_{k=0}^{99} [2(k+1)]$$

EJERCICIO 3.2.16

Desarrollar las siguientes productorias:

a) $\prod_{0 \leq t \leq 7} \left(-\frac{3}{4}\right)^{t+2}$ b) $\prod_{i=0}^{10} \frac{1+i}{(-5)^i}$ c) $\prod_{i=0}^{7} (i+1)$ d) $\prod_{i=0}^{7} i+1$

EJEMPLO 3.2.17

Consideremos la siguiente sucesión: 1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, ...

Podemos comprobar que: 1 = 1

2 = 1. 2

6 = 2. 3

24 = 6. 4

120 = 24. 5

720 = 120. 6

Salvo el primer 1, que vamos a llamar a_0 , y a los restantes que serán a_1 , etc. , esos cumplen la regla :

$a_1 = 1 = a_0.1$

$a_2 = 2 = 1. 2 = a_1. 2$

$a_3 = 6 = 2. 3 = a_2 .3$

$a_4 = 24 = 6. 4 = a_3 .4$

$a_5 = 120 = 24. 5 = a_4.5$

$a_6 = 720 = 120. 6 = a_5.6$

Luego $a_0 = 1$ y para $n > 0$ $a_n = a_{n-1}.\, n.$

Este es otro ejemplo de una sucesión definida en forma recursiva.

Esta sucesión es el **factorial de *n*.** Hay una notación especial para ella $a_n = n!$

Se verá más adelante que $n!$ es una sucesión con varias aplicaciones interesantes.

También se define por recurrencia como:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ (n-1)! \bullet n & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Observar que se verifica lo siguiente ya que el producto de naturales es conmutativo y asociativo:

$$1! = 1$$
$$2! = 2.1! = 2.1$$
$$3! = 3.2! = 3.2.1$$
$$4! = 4.3! = 4.3.2.1$$
$$5! = 5.4! = 5.4.3.2.1$$
$$6! = 6.5! = 6.5.4.3.2.1$$

Es por tanto posible expresar que para $n \geq 1$: $n! = \prod_{i=1}^{n} i$

3. Cuando algunos *n* quedan afuera...

Hay propiedades que no se verifican para todos los números naturales, comienzan a verificarse a partir de un número natural a y de ese número en adelante.

El enunciado $(\forall n)\ (P(n) \wedge n \geq a)$

Se traduce como: *para todo número natural mayor o igual que* a*, P(n).*

También se escribe: $(\forall n)\ (n \in \mathbb{N} \wedge n \geq a \wedge P(n))$

La validez de este tipo de proposición también se demuestra por **Inducción generalizada.** En este caso el método se transforma para exigir lo siguiente:

Si

1) $P(a)$ es verdadero Y

2) para $k \geq a$, $P(k)$ verdadero entonces $P(k+1)$ verdadero

entonces

P(n) es válido $(\forall n)(n \in \mathbb{N} \wedge n \geq a)$

Observar que si $a=0$ se tiene el método de inducción anteriormente dado.

EJEMPLO 3.3.1

Observemos lo siguiente:

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

Sigamos

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$$

La observación nos permite postular la siguiente regla general que deberemos probar por inducción generalizada:

Para $n \geq 2$: $$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$$

O equivalentemente : $$\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i}\right)=\frac{1}{n}$$

La prueba será:

1) Demostrar *P(2)* que establece: $$\prod_{i=2}^{2}\left(1-\frac{1}{i}\right)=\frac{1}{2}$$

Desarrollando la productoria, que en este caso es un solo factor, se tiene:

$$\prod_{i=2}^{2}\left(1-\frac{1}{i}\right)=1-\frac{1}{2}$$

y efectivamente $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Habiendo comprobado la verdad de *P(2),* aceptamos como válida para *P(k)* para $k \geq 2$ y demostremos $P(k+1)$.

Lo que aceptamos es:

$$\prod_{i=2}^{k}\left(1-\frac{1}{i}\right)=\frac{1}{k}$$

Lo que queremos demostrar en este paso es:

$$\prod_{i=2}^{k+1}\left(1-\frac{1}{i}\right)=\frac{1}{k+1}$$

Por definición de la productoria, se tiene

$$\prod_{i=2}^{k+1}\left(1-\frac{1}{i}\right)=\prod_{i=2}^{k}\left(1-\frac{1}{i}\right)\bullet\left(1-\frac{1}{k+1}\right)$$ y por hipotesis inductiva:

$$\prod_{i=2}^{k}\left(1-\frac{1}{i}\right)\bullet\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{k}\bullet\left(1-\frac{1}{k+1}\right)$$ y operando resulta

$$\frac{1}{k}\bullet\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{k}\bullet\left(\frac{k+1-1}{k+1}\right)=\frac{1}{k}\bullet\frac{k}{k+1}=\frac{1}{k+1}$$

simplificando por k, pues $k \neq 0$

Por lo tanto, habiendo cumplido las etapas 1) y 2) podemos afirmar que efectivamente vale:

Para $n \geq 2$: $$\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i}\right)=\frac{1}{n}$$

EJERCICIO 3.3.2

Observar las siguientes expresiones:

1 = 1

1 + 3 = 4

1 + 3 + 5 = 9

1 + 3 + 5 + 7 = 16

1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25

Los resultados son cuadrados, veamos:

$1 = 1^2 = (0 + 1)^2$

$4 = 2^2 = (1 + 1)^2$

$9 = 3^2 = (2 + 1)^2$

$16 = 4^2 = (3 + 1)^2$

$25 = 5^2 = (4 + 1)^2$

Y además:

1 = 2.0 + 1

3 = 2.1 + 1

5 = 2.2 + 1

7 = 2.3 + 1

9 = 2.4 + 1

Con lo que podríamos decir:

$1 = 2.0 + 1 = 1 = (0 + 1)^2$

$1 + 3 = (2.0 + 1) + (2.1 + 1) = 4 = (1 + 1)^2$

$1 + 3 + 5 = (2.0 + 1) + (2.1 + 1) + (2.2 + 1) = 9 = 3^2 = (2 + 1)^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = (2.0 + 1) + (2.1 + 1) +(2.2 + 1) + (2.3 + 1) = 16 = 4^2 = (3 + 1)^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = (2.0 + 1) + (2.1 + 1) +(2.2 + 1) + (2.3 + 1) +(2.4 + 1)= 25 = 5^2 = = (4 + 1)^2$

Ahora podemos inducir la siguiente regla general:

$1 + 3 + 5 + ... + (2.n + 1) = (n + 1)^2$

O mejor expresado: $\sum_{k=0}^{n} (2k + 1) = (n+1)^2$

¿Valdrá o no para $n \geq 0$?



Probar por inducción la regla propuesta.

EJEMPLO 3.3.3

Observar atentamente la demostración siguiente:

$(\forall n)(2^n > n)$

¡!!!

Siendo $P(n)$: $2^n > n$

Monotonía de la multiplicación en $\mathbb{R}$:

$a \geq b$, si $c \geq 0$ entonces $a.c \geq b.c$

$a \geq b$, si $c < 0$ entonces $a.c \leq b.c$

1) Como $P(0)$: $2^0 > 0$, y $2^0 = 1$

Se cumple que 1 > 0 es verdadero, luego $P(0)$ es válido

2) Sea $P(t)$: $2^t > t$ que suponemos verdadera por hipótesis inductiva.

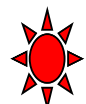
Veamos que dice y probemos *P(t+1)*, $P(t+1) : 2^t + 1 > t + 1$

Demostración:

$2^{t+1} = 2^t \cdot 2 > t.2 = t + t$

↑

$2^t > t$ por hipótesis y 2 >0



Aquí consideramos la necesidad de reformar el desarrollo del ejercicio porque si $t = 0$, observar que $t + t$ no es mayor que $t + 1$

Reformamos entonces como sigue:

Probemos por inducción generalizada que: $(\forall n)(n \geq 1 \rightarrow 2^n > n)$

Por lo cual debemos partir de probar la verdad de *P (1)*

1) *P (1):* $2^1 > 1$

Como 2 > 1 es verdadero, *P (1)* es verdadero.

2) Vemos el siguiente paso que exige el método.

$P (t): 2^t > t$ *para* $t \geq 1$ se acepta como verdadera por hipótesis inductiva.

Tratemos de probar para el siguiente:

$P (t + 1): 2^t + 1 > t + 1$

Demostración:

$2^{t+1} = 2^t \cdot 2 > t.2 = t + t$ y como $t \geq 1$ entonces $t + t \geq t + 1$, se tiene la desigualdad deseada.

Habiendo cumplido la segunda etapa, hemos probado:

$2^n > n, \ (\forall n)(\ n \geq 1)$

Pero como *P (0)* también vale, entonces si:

(a) *P (0)* vale, y

(b) *P(n)* vale para todo $n \geq 1$;

Entonces vale para todo $n \geq 0$, $2^n > n$

EJERCICIO 3. 3.4

Demostrar aplicando inducción completa, en cada apartado se considera n número natural:

a) $(\forall n)(n \geq 1$ entonces $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_{i-1})$

b) $(\forall n)(\ n \geq 1$ entonces $\sum_{i=1}^{n}(i.\,i!)\ = (n+1)!-1\ )$

c) $(\forall n)(\ n \geq\ 1$ entonces $\log_b \prod_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \log_b a_i\ )$

d) Para todo n, *entonces* $(1 + p)^n \geq 1 + n.p$ para cualquier $p > -1$ (fijo)

e) Para $n \geq 5$, *entonces* $2^n > n^2$

f) $(\forall n)(\ |sen\ (nx)| \leq n\ |sen\ x|\ )$

g) Siendo los a_i números reales para

$1 \leq i \leq n$ y usando que en $\mathbb{R}$ vale $|x+y| \leq |x| + |y|$

$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$ cualquiera sea el natural n.

h) Para todo n, $n \geq 1$, entonces $\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = n+1$

i) $(\forall n)(\ \cos\ (n\pi\ ) = (-1)^n$

j))

4. Segundo Principio de Inducción Completa

Existe otra formulación equivalente al Principio de Inducción ya dado que también servirá para demostrar propiedades universales referidas a los números naturales o que se refieren desde un número natural a en adelante.

Pero para la demostración de esas verdades, no alcanza con saber que se cumplen en el paso anterior solamente sino que es necesario conocer la verdad en todos los menores que un valor cualquiera. Se enunciará y mostrará cómo funciona el método.

Segundo Principio de Inducción:

Dado L un subconjunto de $\mathbb{N}$, es decir $L \subseteq \mathbb{N}$.

SI:

a) $0 \in L$ **y**

b) Cualquiera sea m, para todo k, $k < m$, si $k \in L$ entonces $m \in L$

} entonces $L = \mathbb{N}$

Observación: La diferencia con el Axioma 5, está en la condición b). En este nuevo axioma la exigencia es *que del hecho que todos los anteriores a m* son elementos de *L* permita *inferir* que *m* es elemento de *L,* entonces conjuntamente con a) se obtiene que $L=\mathbb{N}$, y en el primer Principio de Inducción la condición b) liga un elemento con su siguiente.

El enunciado del ***método de demostración*** de $(\forall n)(P(n))$ con universo $\mathbb{N}$, que se deriva del ***Segundo Principio*** es:

1) Probar que $P(0)$ es válido,

y

2) Supuesta la verdad de $P(k)$, para todo k, $k < m$, (con $\boldsymbol{m}$ **cualquiera**) entonces probar la verdad de $P(m)$

Estos dos pasos cumplidos permiten afirmar que $(\forall n)(P(n))$ es **verdadera**.

También ***hay un método de demostración ligado al Segundo Principio*** para propiedades que *se verifican desde un número natural* a *en adelante*, esto es propiedades cuyo enunciado es de la forma: $(\forall n)(P(n))$, con $n \geq a$

SI

1) $P(a)$ es verdadero Y

2) para cualquier k, $a \leq k < m$, $P(k)$ verdadero entonces $P(m)$ verdadero

entonces

$P(n)$ es válido $(\forall n)(n \in \mathbb{N} \wedge n \geq a)$

EJEMPLO 3.4.1

Todo número natural mayor que 1 es producto finito de números primos.

El número natural p es primo si tiene exactamente dos divisores

Simbólicamente la proposición tiene la forma: $(\forall n)(n \in \mathbb{N} \wedge n > 1 \wedge P(n))$

Siendo $P(n)$: *n es producto finito de números primos.*

Es decir que la base de la inducción es 2 ya que se postula sobre los mayores que 1.

Por tanto lo que hay que demostrar es:

$(\forall n)(n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 \wedge P(n))$

Vamos a aplicar el método derivado del Segundo Principio con base $a = 2$.

1) ¿ Qué dice $P(2)$? *P(2): 2 es producto finito de números primos*

Un factor!!

Como 2 es un número primo es obvio que es producto finito de primos.

2) Admitimos que para todo k, $2 \leq k < m, P(k)$ es verdadero , esto es que para $2 \leq k < m$, la proposición "*k es producto finito de números primos*" es una proposición verdadera.

Con esta hipótesis (en realidad muchas....) vamos a demostrar la verdad de *P(m),* esto es "*m es producto finito de números primos*"

Dado $m \in \mathbb{N}$, $m > 2$, está claro que m es un número primo o no lo es.
Si m es primo entonces *P(m)* es verdadero.
Si m no es primo entonces m admite divisores no triviales, es decir que además de 1 y m hay otros divisores de m.
Por lo cual podemos afirmar que existen *r* y *s* naturales tales que:

$$m = r \, . \, s \text{ con } 1< r< m \text{ y } 1< s< m$$

Resulta entonces que *P(r)* y *P(s)* son proposiciones verdaderas por hipótesis.
Pues hemos aceptado como verdaderas, lo que significa que son válidas:
r es producto finito de números primos.
s es producto finito de números primos.

Luego tanto *r* como *s* son expresables como el producto de un número finito de primos.

Como m es el producto *r. s*, tenemos que hay una cantidad finita de números primos (los de *r* más los de *s*) que factorean a m.

Es decir hemos demostrado que *P (m)* es verdadera.

Luego, habiendo cumplido también 2), concluimos que
$(\forall n)(n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 \wedge P(n))$ es verdadera o sin simbolismos, vale que:

Todo número natural mayor que 1 es producto finito de números primos.

Comentario: Es posible probar que este resultado se extiende a los números enteros. Piense Ud. como lo haría. Además se puede probar que esa factorización es única salvo el orden, demostración que escapa al método que estamos ilustrando.
Este resultado que se conoce como **Teorema Fundamental de la Aritmética**, lo veremos más adelante en este capítulo.

EJEMPLO 3.4.2

Sea a_n una sucesión de números naturales dada por $a_1 = 18;\ a_2 = 170$ y para los elementos siguientes para $n, n \geq 1$ se define $a_{n+2} = 18a_{n+1} - 77a_n$

Probar que se define la misma sucesión por la condición:

$$(\forall n)(n \geq 1 \text{ entonces } a_n = 7^n + 11^n)$$

1) Veamos que *P(*1*)* es verdadero: *P(*1*)*: $a_1 = 7^1 + 11^1$

Como $a_1 = 18$ y $7^1 + 11^1 = 18$ se cumple *P (*1*)*

En este caso la definición recursiva es a partir del tercer término de la sucesión, tenemos que probar entonces que se cumple *P (*2*)*, antes de pasar al paso 2).

Veamos que *P (*2*)* es verdadero: *P (*2*)*: $a_2 = 7^2 + 11^2$

Como $a_2 = 170$ y $7^2 + 11^2 = 49 + 121 = 170$ se cumple *P (*2*)*

2) Veamos ahora que si *P (h)* es verdadera $(\forall h)(h < m)$ entonces *P (m)* es verdadera:

Aceptamos que $a_h = 7^h + 11^h$ para $h, h < m$,

Tenemos que probar que $a_m = 7^m + 11^m$

Demostración:

$$a_m = 18a_{m-1} - 77a_{m-2} = 18(7^{m-1} + 11^{m-1}) - 77(7^{m-2} + 11^{m-2}) =$$

↑ Por definición ↑ Por hipótesis $(m-1 < m \text{ y } m-2 < m)$

$$= 18.7^{m-1} + 18.11^{m-1} - 77.7^{m-2} - 77.11^{m-2} =$$

↑ Prop distributiva

$$= (11+7)7^{m-1} + (11+7).11^{m-1} - 7.11.7^{m-2} - 7.11.11^{m-2} =$$

$$= 11.7^{m-1} + 7^m + 11^m + 7.11^{m-1} - 11.7^{m-1} - 7.11^{m-1} = 7^m + 11^m$$

↑ Prop distributiva, producto de potencias de igual base y cancelando

Por lo tanto se cumple *P (m),* hemos probado que:

Si $a_1 = 18;\ a_2 = 170$ y se verifica la siguiente definición: $a_{n+2} = 18a_{n+1} - 77a_n$ para $n, n \geq 1$

Entonces es verdadero que $(\forall n)(n \geq 1, \text{ entonces } a_n = 7^n + 11^n)$

EJERCICIO 3.4.3

1. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $a_1 = 8$, $a_2 = 34$ y además

$a_n = 8.a_{n-1} - 15\, a_{n-2}$, si $n \geq 3$.

Probar, utilizando el segundo principio de inducción, para $n > 0$ que $a_n = 3^n + 5^n$

2. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ y además

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, si $n \geq 3$.

Probar, utilizando el segundo principio de inducción, que para todo n, n natural,

$a_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$

3. Sea el esquema proposicional $P(n)$: $n^2 + 5n + 1$ es par.

a) Probar que si $P(k)$ es verdadera para un natural k, entonces $P(k + 1)$ es verdadera.

b) De acuerdo con el Principio de Inducción Completa, puede entonces afirmarse que $P(n)$ es verdadera $\forall n$, $n \geq 1$. **Justifique.**

4. Probar que n rectas distintas del plano que concurren a un punto dividen al plano en $2n$ partes

5. Determinar para que valores de n es válida cada una de las siguientes desigualdades y demostrar:

a) $2^n > n^2 + 4n + 5$

b) $3^n > 2^n + 7n$

6. Emplear el Principio de Inducción para demostrar que para todo n número natural, valen:

$$i)\quad 1 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots\dots + n^2 = \frac{n.(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$ii)\quad 1 + 3^2 + 5^2 + \dots\dots\dots + (2n-1)^2 = \frac{n.(2n-1).(2n+1)}{3}$$

$$iii)\quad 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots\dots\dots + (n-1).n = \frac{(n-1).n.(n+1)}{3}$$

$$iv)\quad \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots\dots\dots + \frac{1}{(2n-1).(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

$$v)\quad \frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \dots\dots\dots + \frac{1}{(4n-3).(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

7. Utilizando el principio de Inducción Matemática, demostrar las siguientes afirmaciones.

a) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n\,(n + 1)$, para todo n natural y $n \geq 1$.

b) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, para todo n natural y $n \geq 1$.

c) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, para todo n natural y $n \geq 1$.

d) $1 + 2^n < 3^n$, si n es natural y $n \geq 2$

e) $2n + 1 < 2^n$, $n = 3, 4, \ldots$

f) $7^n - 1$ *es divisible por 6,* para $n = 1, 2, \ldots$

g) $6.7^n - 2.3^n$ *es divisible por 4* para $n = 1, 2, \ldots$

h) $11^{n+1} - 6^n$ *es múltiplo de 5*, para $n \geq 1$

i) $\sum_{j=0}^{n} (2j-1) = (n + 1)(n - 1)$, para $n \geq 1$



j) $\sum_{k=0}^{t} (6k+1) = (t + 1)(3t + 1)$, para $t \geq 1$

k) $\sum_{k=1}^{t} (a.r^{k-1}) = a\frac{(1-r^t)}{1-r}$ para natural $t \geq 1$

Suma de una **sucesión geométrica** de primer término a y razón r , $r \neq 1$



l) $\sum_{k=1}^{t} (a + (k-1).d\ ) = t\frac{(a + (a + (t-1)d))}{2}$ para natural $t \geq 1$

Suma de una **sucesión aritmética** de primer término a y diferencia d.

m) $\sum_{k=0}^{t} r^k = \frac{r^{t+1} - 1}{r - 1}$, para natural $t \geq 1$ y $r \neq 1$



8. Evaluar sin realizar la suma (no deje de relacionarlo con el ejercicio 7.)

a) $\sum_{j=0}^{50} (2j - 1)$

b) $\sum_{j=5}^{46} (6j + 1)$

c) $\sum_{k=20}^{37} (18k+3)$

d) $\sum_{i=7}^{89} \frac{i \cdot i!}{2}$

5. Principio de Buena Ordenación

Otro axioma que sirve de herramienta de demostración. Este axioma es conocido como Principio de Buena Ordenación ó del Mínimo Entero Positivo entre otros nombres.

Principio de Buena Ordenación

Todo subconjunto *S* de $\mathbb{N}$ y $S \neq \varnothing$**,** tiene un primer elemento.

Es sinónimo de ***primer elemento de un conjunto S***, sobre un conjunto que tiene un orden, como es el caso de los números naturales, ***elemento mínimo***, es decir un elemento del conjunto que no tiene un elemento que lo preceda en el orden. Es decir que si *m* es el mínimo entonces *m* es elemento de S y todo elemento *u* de S es mayor o igual que *m*.

Hay posibilidades de hacer demostraciones usando este principio de Buena Ordenación, que como veremos seguidamente es equivalente al de Inducción Completa, y esto significa que una teoría que se pueda desarrollar usando el Axioma de Inducción también se pueda desarrollar con el Principio de Buena Ordenación. El uso de un método de demostración u otro depende de las características del problema a demostrar.

Observación: Los Principios o Axiomas NO se demuestran.
Ellos son en algunos casos muy intuitivos, en otros ellos son aceptados por una teoría para lograr su desarrollo.
Lo que haremos a continuación es ver que dado uno de los principios es demostrable en función del otro y recíprocamente.

♦ PROPOSICIÓN 3.5.1

El principio de Buena Ordenación es equivalente al principio de Inducción Completa

Demostración:

- Veamos que el principio de Buena Ordenación implica el principio de Inducción Completa.

Es decir sabiendo que todo conjunto no vacio de números naturales tiene un elemento mínimo, debemos probar que si una propiedad relativa a los números naturales cumple con las condiciones 1) y 2) que pide el Principio de Inducción entonces vale para todo número natural.

Sea un esquema proposicional P(n) relativo a los números naturales que cumple:

1) *P(0)* es válida y
2) Si *P(h)* es válida entonces *P*($h+1$) también es válida

Supongamos que la proposición no es válida para algún natural (es decir negamos a lo que queremos llegar….)

!!

Vamos a construir un conjunto que nos permitirá arribar a nuestro propósito por el absurdo.

Sea $C = \{i \in \mathbb{N} : P(i) \text{ es falsa}\}$ y supongamos que $C \neq \varnothing$.

Como $C \neq \varnothing$, C tiene un mínimo ya que estamos suponiendo que se cumple el principio de Buena Ordenación.

Sea m el mínimo de C, entonces $m \in C \quad \wedge \quad (\forall a)(a \in C \rightarrow a \geq m)$

P (m) es falsa por ser m elemento de *C* y *P* (m-*1*) es verdadera ya que m-*1* no es elemento de *C*.

Observar que m no es 0, pues tenemos por hipótesis que vale 1).

Pero si *P(m-1) es verdadera*, entonces *P*(m-*1*+*1*) es verdadera por el segundo paso del principio de Inducción, ya que se tiene por hipótesis 2).

Como m-*1*+*1*= m, llegamos a un absurdo, ya que *P(m)* no puede ser verdadera y falsa a la vez. Que resulto de suponer que *P(m-1)* es verdadera.

Luego se tendría que suponer *P(m-1) falsa* (para no llegar a la contradicción del valor de verdad de *P(m)*). Pero entonces m-*1* está en *C,* y como m-*1* es menor que m que es el mínimo de *C.* También se llega a un absurdo.

¿Porque se llegó a un absurdo???

Por lo tanto $C = \varnothing$ y entonces *P(n)* es verdadera para todo natural, es decir se cumple el principio de Inducción Completa.

?

- Veamos ahora que, si se cumple el principio de Inducción Completa, se cumple el principio de Buena Ordenación.

Escribimos (*fabricamos…*) el siguiente esquema proposicional relativo a los subconjuntos de números naturales, que resultara apropiado para demostrar lo que deseamos (que todo subconjunto no vacio de números naturales tiene primer elemento).

Dado un conjunto $C \subseteq \mathbb{N}$:

P(n): Si *C* tiene un elemento menor o igual que n, entonces *C* tiene mínimo.

Si probamos que esta proposición se cumple para todo natural, habremos probado que todo subconjunto no vacío de números naturales tiene mínimo.

Debemos probar que se cumplen los dos pasos del método de Inducción.

1) *P* (0): Si *C* tiene un elemento menor o igual que 0 entonces *C* tiene mínimo.

   Veamos que es verdadera:

   Si *C* tiene un elemento menor o igual que 0, entonces como el único natural que cumple eso es el 0, entonces 0 es elemento de *C*.

   Entonces $C \neq \varnothing$ y tiene mínimo, ya que el 0 es el mínimo de todos los naturales y en particular de *C*. Luego, *P*(0) es válida.

2) Aceptamos que se cumple

   P(h): Si *C* tiene un elemento menor o igual que h entonces *C* tiene mínimo.

   Tenemos que probar

   P($h+1$): Si *C* tiene un elemento menor o igual que $h+1$ entonces *C* tiene mínimo.

   La hipótesis de esta proposición para $h+1$, es que *C* tiene un elemento menor o igual que $h+1$, sea *q* ese elemento de *C*. Luego resulta que $q < h+1$ ó $q = h+1$.

   Sea $q < h+1$, entonces $q \leq h$, entonces por la hipótesis inductiva *C* tiene un mínimo.

   Sea $q = h+1$. Si *C* tiene algún elemento $t < q = h+1$, por hipótesis inductiva vale que *C* tiene mínimo pues $t \leq h$. Si *C* no tiene ningún elemento menor que $h+1$, significa que todo *w* elemento de *C* es $w \geqslant q = h + 1$, entonces $h+1$ es el mínimo de *C*. Por lo cual se ha demostrado la validez de *P*($h+1$).

   Por lo tanto *P*(n) es verdadera para todo natural, es decir que todo subconjunto no vacío de los naturales tiene mínimo.

♦

EJERCICIO 3.5.2

a) Demostrar que el Principio de Buena Ordenación es equivalente al Segundo Principio de Inducción Completa. (Difícil…seguir los pasos de la demostración anterior).
b) ***Corolario***: Ambos Principios de Inducción son equivalentes.

6. Algunos elementos de Combinatoria

La ***Combinatoria*** es una de las ramas de la Matemática que permite resolver problemas con las más diversas aplicaciones, en diferentes especialidades de la ciencia o de la vida diaria, en los cuales haya que determinar el número de posibles disposiciones de objetos, letras, moléculas, docentes, semillas, etc., sujetos a determinadas condiciones.

La Combinatoria surgió en el siglo XVI. En esa época en las capas sociales altas el juego de azar era algo importante, tanto las cartas, los dados y las loterías permitían perder o ganar grandes fortunas (supongo que más perder...). Es por eso que en sus inicios los problemas combinatorios trataran fundamentalmente de los juegos de azar, el interés de saber de cuántas maneras se puede obtener un determinado número al arrojar dos o tres dados, o de cuántas maneras se pueden obtener dos reyes en un juego de cartas. Estos problemas y otros similares fueron los que influyeron en el desarrollo de la combinatoria y de la teoría de probabilidades que se desarrolló paralelamente.

De los primeros en ocuparse de los recuentos de las combinaciones con los dados fue el matemático italiano Tartaglia. El estudio teórico de los problemas combinatorios comenzó en el siglo XVII por los franceses Pascal y Fermat. El punto de partida de estos estudios también fue el juego de azar, particularmente el problema de la división de la apuesta, propuesto por el caballero de Meré a Pascal. El juego era ganado por aquel participante que en un torneo de "cara y cruz" ganara seis partidos, pero se interrumpía si un jugador ganaba cinco y otro cuatro. Entonces el problema consistía en cómo dividir la apuesta. Aplicando métodos combinatorios Pascal dio una solución al problema (aún más general que para ese caso) y otra resolución fue propuesta por Fermat.

El desarrollo ulterior de la combinatoria se debe a Bernoulli, Leibnitz y Euler y también para ellos fue el juego de lotería y los solitarios campo de aplicación e inspiración.

En los últimos años la Combinatoria entró en gran desarrollo relacionado con el interés general por la Matemática Discreta (que tiene importantes aplicaciones por ejemplo nada menos que a la Informática).

Los métodos combinatorios son utilizados para resolver problemas de transporte, problemas de horarios, de producción, en la programación lineal y la estadística. También para descifrar o confeccionar claves y para resolver otros problemas de la teoría de la información. Hay además aplicación en otras ramas de la Matemática ya sea pura o aplicada.

- **Reglas Generales**

EJEMPLO 3.6.1

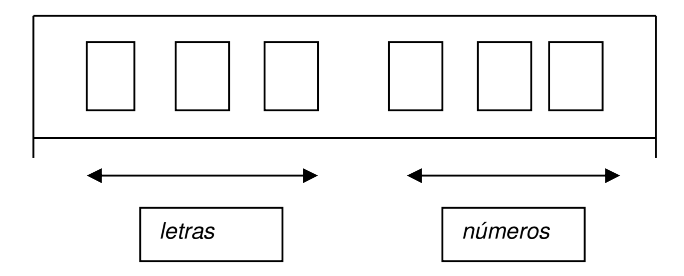
Las patentes

El parque automotor de nuestro país creció mucho en los últimos años. Si hacemos un poco de memoria hace tiempo las chapas de identificación de las patentes de los vehículos automotores tenían la letra C (por Capital Federal) o la inicial de la provincia, en la mayoría de los casos, seguida de números. Unos años antes al actual, la manera de la identificación varió y las chapas de identificación, que aún están vigentes, está dada por tres letras seguidas de tres números. ¿A qué se debío este cambio?

Calculemos el número total de posibles identificaciones de cada una de las maneras descriptas.

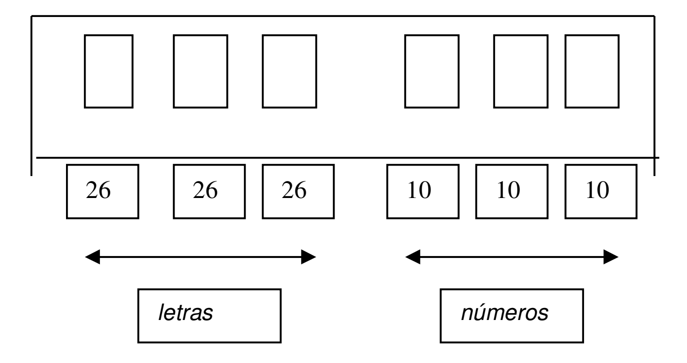
Está claro que en la antigua manera no había límite numérico, pero por una cuestión de "lugar" en la chapa, en la Capital Federal y provincia de Bs. As. ese espacio físico estaba llegando a su fin.

Supongamos que consideramos como hasta hace poco tiempo, que debemos llenar tres casilleros para las letras y tres para los números. ¿Cuántas identificaciones podemos hacer?



En las chapas patentes no hay ninguna relación entre las letras ni en los números que forman cada chapa.

Para llenar cada casillero (lugar) de letra tenemos 26 letras posibles (no se consideran la ll, ñ, ch, como letras) y son independientes las elecciones en cada caso. Para llenar los casilleros (lugares) reservados para los números tenemos 10 dígitos para elegir y también son independientes las elecciones en cada caso.



Por cada elección de letra, 26, para el primer lugar hay otras 26 elecciones posibles para cada uno de los otros se tienen así 26^3 disposiciones distintas de letras.

Para la elección de los números se tiene por cada una de las 10 elecciones posibles para el primer lugar se tienen 10 posibles para cada uno de los otros dos, es así que entonces las distintas disposiciones para los números son 10^3.

Siendo a su vez independientes la elección de letras y de números se tiene así
17 576 x 1 000 chapas posibles, es decir 17 576 000 es el número de chapas distintas.

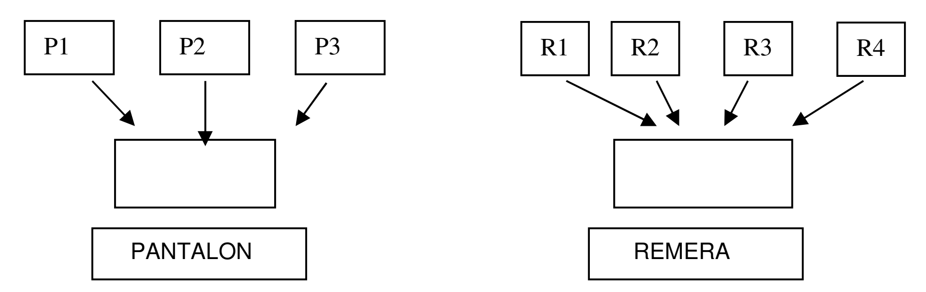
Observar que el parque automotor ha crecido en estos últimos años y es por eso por lo que volvió a cambiar el diseño de las chapas patentes. Queda para Ud. investigar más y calcular cuál es el número de chapas que se puede fabricar con el nuevo diseño.

EJEMPLO 3.6.2:

Guardarropa

Una alumna muy cuidadosa en su vestimenta tiene tres pantalones y cuatro remeras de modo que "todo combina con todo". Quiere vestirse con un pantalón y una remera y no le gusta repetir seguido su vestimenta. ¿Por cuántos días puede ponerse “conjuntos” distintos?

Debe elegir un pantalón entre tres posibles y una remera entre cuatro. Como "todo combina con todo", es independiente la elección del pantalón a la de la remera que elija.
Supongamos ahora dos casilleros, uno representa el "pantalón" y el otro la "remera". De cuántas maneras podrá llenarlos:



Se tienen tres posibilidades para elegir un pantalón entre tres y cuatro para elegir una remera entre cuatro. Volviendo a pensar que "todo combina con todo" el número total de "conjuntos" distintos es 3.4, por lo tanto puede "lucir" 12 días de distinta manera.

EJEMPLO 3.6.3

El código Morse

Para trasmitir informaciones por telégrafo se utiliza el código Morse que consiste en representar los signos del alfabeto, los números y los de puntuación por medio de “**.**” y “ -“ . Para estos signos que se quieren representar se forman distintas disposiciones de punto o raya considerándolos de a 1, hasta tomarlos de a 5; cada uno de estos agrupamientos está representando un signo distinto.

Veamos por qué se toman hasta 5 elegidos entre “**.**” y “-“

La cantidad de representaciones diferentes que se pueden hacer con un solo símbolo (pensemos que llenamos un casillero)

Para llenar el casillero tenemos **dos posibles elecciones**, es decir hay dos signos distintos que podemos representar con un solo símbolo (punto o raya).

La cantidad de representaciones diferentes que se pueden hacer con dos símbolos y exactamente dos (pensemos que llenamos dos casilleros, es independiente lo que se coloca en cada uno de ellos, hay que poner un símbolo en cada uno)



Luego, hay dos alternativas para elegir el primero y también dos para el segundo. Por ello hay **cuatro signos distintos** que podemos representar con dos símbolos.

Haciendo un análisis similar en cada caso (llene casilleros...) se puede concluir que hay **ocho signos distintos que podemos representar con tres símbolos, dieciséis signos distintos que podemos representar con cuatro símbolos…**
Cuántos signos (letras, números y de puntuación) habremos representado hasta este punto:

Usando 1 símbolo	$2 = 2^1$
Usando 2 símbolos	$4 = 2^2$
Usando 3 símbolos	$8 = 2^3$
Usando 4 símbolos	$16 = 2^4$
TOTAL(con 1, con 2, con 3 y con 4)	$2 + 4 + 8 + 16 = 30$

Si pensamos que hay 10 dígitos y 27 letras (al menos), se necesitan más simbolizaciones, por ello es que se usan hasta disposiciones de cinco símbolos entre "**.**" y "-".
Con los cuales es suficiente, pues esto incorpora 32 representaciones distintas más.
Teniendo entonces el lenguaje Morse una capacidad de 62 representaciones para símbolos distintos.

Rescatando lo general

Regla del Producto para la Enumeración:
Si una experiencia o hecho A_1 se puede producir de n_1 resultados o formas posibles y por cada resultado de A_1 se realiza una experiencia o hecho A_2 que tiene n_2 resultados o formas posibles, entonces la **realización de A_1 y A_2** (en ese orden) arroja un número total de
$n_1 . n_2$ resultados posibles.

Esta regla puede generalizarse cuando hay $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ experiencias o hechos que pueden producirse de $n_1, n_2, n_3, ..., n_k$ formas posibles, entonces la realización de $A_1 \quad y \quad A_2 \quad y \quad A_3 \quad y ... y \quad A_k$ puede hacerse de $n_1 . n_2 . n_3 ..... n_k$ formas posibles.

EJEMPLO 3.6.4

¿Cuántas cadenas de ocho bits comienzan con 101 o con 111?

Una cadena de ocho bits que comienza con 101 puede construirse en cinco pasos: se elige el cuarto bit, se elige el quinto bit, . . . , se elige el octavo bit. Cada una de esas elecciones puede hacerse de dos maneras (se elige un 1 o un 0). Por la regla del producto, hay $2^5=32$ cadenas de ocho bits que comiencen con 101.

El mismo razonamiento vale para las cadenas que comienzan con 111. Hay también 32 de estas cadenas.

El conjunto de las cadenas que comienzan con 101 y el conjunto de las cadenas que comienzan con 111 son **conjuntos disjuntos**, una cadena no puede empezar con 111 y además con 101, así, el número de cadenas de ocho bits que comienzan con 101 o con 111 es 32 + 32 = 64.

EJEMPLO 3.6.5

Un consejo formado por Ana, Beatriz, Carla, Daniel, Elena y Francisco debe elegir un presidente, un secretario y un tesorero.

a) ¿De cuántas formas puede hacerse esto?

b) ¿De cuántas formas puede hacerse si debe ser presidente Ana o Francisco?

a) Los ocupantes de los cargos pueden elegirse en tres pasos: 1º) se elige el presidente (esta elección se puede hacer de 6 maneras distintas); 2º) se elige el secretario (quedan cinco posibilidades, ya que nadie puede ser presidente y secretario a la vez); 3º) se elige el tesorero (4 posibilidades).

Por la regla del producto, hay 6 . 5 . 4 = 120 formas diferentes de elegir un presidente, un secretario y un tesorero.

b) Si Ana es presidente, sólo resta elegir secretario y tesorero, para los que habrá 5 y 4 posibilidades respectivamente, por lo tanto hay 5. 4 = 20 maneras de seleccionar un secretario y un tesorero entre las cinco personas que quedan.

De la misma manera, si Francisco es presidente, hay 20 maneras de elegir a los demás.

El conjunto de ternas que tienen a Ana como presidente y el de ternas que tienen a Francisco como presidente son **disjuntos**. Por eso hay 20 + 20 = 40 formas diferentes de elegir presidente, secretario y tesorero, si Ana o Francisco deben ser presidentes.

Regla de la Suma para la Enumeración

Si cierto objeto, hecho o experiencia B_1 se puede escoger o realizar de m_1 maneras y otro objeto, hecho o experiencia B_2 se puede escoger o realizar de m_2 maneras, siendo B_1 y B_2, **sucesos disjuntos**, es decir que no pueden darse simultáneamente, entonces la elección o realización de B_1 **ó** B_2 está dada por $m_1 + m_2$ modos diferentes.

Esta regla puede generalizarse cuando hay $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ experiencias o hechos que pueden producirse de $n_1, n_2, n_3, ..., n_k$ formas posibles, donde los sucesos A_i son disjuntos dos a dos, esto es que no tienen intersección entre dos cualesquiera, entonces la realización de $A_1 \quad o \quad A_2 \quad o \quad A_3 \quad o...o \quad A_k$ puede hacerse de $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k$ formas posibles.

EJERCICIOS 3.6.6

a) Cuántos números de 3 dígitos pueden formarse con los dígitos 5, 6, 7 y 9?
b) Cuántos números pares de 3 dígitos pueden formarse con los dígitos 5, 6, 7 y 9?
c) Cuántos números de 3 dígitos pueden formarse con los dígitos 5, 6, 7 y 0? (números como 034, 005 no se admiten)
d) Cuántos números de 3 dígitos distintos pueden formarse con los dígitos 5, 6, 7 y 9?
e) Cuántos números de 3 dígitos distintos pueden formarse con los dígitos 5, 6, 7 y 9 que comiencen con 5 o con 6?
f) Cuántos números de 3 dígitos pueden formarse con los dígitos 5, 6, 7 y 9 que terminen en 5 o 7?

EJEMPLO 3.6.7

Retomando el enunciado del ejemplo 3.6.5, ahora nos preguntamos de cuántas maneras pueden elegirse los 3 cargos con la condición de que Ana sea presidente o Carla tesorera.

Podemos nuevamente separar los dos casos posibles: a) Ana es presidente, b) Carla es tesorera.

Contamos separadamente ambos casos:

a) 5. 4 ya que para los otros dos cargos quedan 5 personas

b) 5.4 ya que no podemos contar a Carla para presidente o secretario.

Si sumamos estos casos estaremos repitiendo la terna Ana presidente, cualquiera de secretario y Carla de tesorera, estos son 4 casos, ya que hay 4 posibilidades para el secretario.

En este caso entonces sumamos los resultados del caso a) y el caso b) y restamos los repetidos, tenemos entonces: 20 + 20 – 4

EJEMPLO 3.6.8

Cuántos números de 4 dígitos pueden formarse con los dígitos 3, 4, 5, 6 y 7 que terminen con 3 o que comiencen con 5?

Asumimos que si no se especifica lo contrario, los dígitos pueden repetirse.

Contamos separadamente los casos:

a) que comiencen con 3: esto sería 5.5.5, ya que el primer lugar lo ocupa el 3 y para el resto tenemos 5 números disponibles.

b) Que terminen con 5: razonando del mismo modo serían 5.5.5

Ahora bien, nuevamente estamos contando casos repetidos, por ejemplo el 3335, el 3645, los estamos contando en ambos casos, cuántos repetidos hay?

Todos los números de 4 dígitos que comienzan con 3 y terminan con 5, es decir 4.4 casos, fijado el primero y el último tenemos 4 posibilidades para el segundo y 4 para el tercero.

Entonces, la cantidad de dígitos con esas condiciones son: 5.5.5 + 5.5.5 – 4.4

Regla de la Suma para la Enumeración con intersección

Si B_1 se puede realizar de m_1 maneras y otro objeto, hecho o experiencia B_2 se puede realizar de m_2 maneras, siendo B_1 y B_2, **sucesos con intersección o que comparten n casos**, entonces la elección o realización de B_1 **ó** B_2 está dada por $m_1 + m_2 - n$ modos diferentes.

EJERCICIO 3.6.9

a) ¿Cuántas disposiciones distintas se pueden hacer con 4 letras elegidas entre A, B, C, D, E, F, que comiencen con AB o terminen con C?

b) ¿Cuántas disposiciones distintas se pueden hacer con 4 letras distintas elegidas entre A, B, C, D, E, F, que terminen con F o comiencen con CD?

c) ¿Cuántas disposiciones distintas se pueden hacer con 4 letras distintas elegidas entre A, B, C, D?

7. Definiciones Básicas en Combinatoria

Se han enunciado las reglas generales de resolución de los problemas combinatorios y se han hecho varios ejemplos y propuesto ejercicios de aplicación de los mismos.

Son formas o indicaciones para ordenarse a la hora de pensar un problema.

Veremos ahora tres tipos de disposiciones (dos de ellas ya tratadas en particular) que por ser de mucha aplicación se les ha dado nombres especiales: las **variaciones** (también llamadas **arreglos**), las **permutaciones** y las **combinaciones**. Sólo en el caso de las variaciones admitiremos que elementos se repitan.

❖ ***Variaciones*** *(sin repetición)*

No hay arreglos de compra con referees!!!!

EJEMPLO 3.7.1

En un torneo de football intervienen 22 equipos.

De cuántas maneras distintas se pueden ocupar el primero, segundo y tercer puesto?

En este caso el problema se reduce a llenar 3 casilleros para los que disponemos de 22, 21 y 20 equipos respectivamente ya que obviamente no pueden repetirse. Por la regla del producto tenemos entonces: 22. 21. 20 maneras distintas de ocupar los tres primeros puestos.

Generalizando…

Se tienen n objetos distintos.

El problema a resolver es: cuántas distribuciones distintas de *r* objetos distintos, se pueden formar a partir de los n objetos dados.

Dos distribuciones se consideran diferentes: si difieren al menos en uno de los *r* objetos, o si tienen los mismos *r* objetos, difieren al menos en el orden de dos objetos que las formen.

Al número total de distribuciones cumpliendo los requisitos anteriores se lo anota indistintamente

$$V_r^n \quad \text{o} \quad V(n,r)$$

Y se lee **variaciones de n tomados de a *r*.**

Como no se admiten objetos repetidos debe ser $r \leq n$.



➢ *¿Cómo calculamos el número de variaciones* de n tomados de a *r*?

Debemos hacer disposiciones de *r* objetos, sin repetir, elegidos entre n posibles.

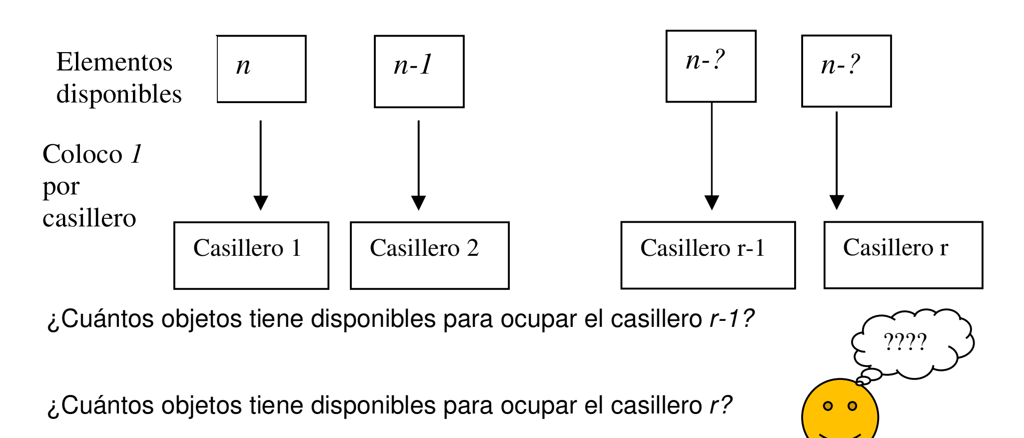
La idea es recurrir a llenar *r* casilleros, poniendo un objeto por casillero, con todos elementos distintos.

Cuando se va llenar el primer casillero, ¿de cuántos objetos se dispone?

Colocará un objeto en el primer casillero (usa 1), le quedan n-*1* objetos disponibles. Entre ellos puede elegir el que ocupará el segundo casillero.

Y así sigue....

El esquema sugiere:



¿Cuántos objetos tiene disponibles para ocupar el casillero *r-1?*

¿Cuántos objetos tiene disponibles para ocupar el casillero *r?*

Variaciones *(sin repetición)*

Se tienen n objetos distintos, la cantidad de distribuciones distintas de *r* objetos distintos que se pueden formar a partir de los n objetos dados es:

$$V_r^n = n.(n-1).(n-2)\ldots(n-(r-2))(n-(r-1)).$$

EJERCICIO 3.7.2

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n.\,(n-1)! & n \geq 1 \end{cases}$$

a) Exprese V_r^n utilizando el símbolo de productoria.

b) Usando la definición de factorial, compruebe que $V_r^n = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

EJERCICIO 3.7.3

Identifique en los ejemplos o ejercicios anteriores cuáles son ejemplos de variaciones sin repetición.

EJERCICIO 3.7.4

a) Con las letras del conjunto $A= \{a,\ b,\ c,\ d,...,l\}$ ¿cuántas disposiciones distintas de seis letras si no se pueden repetir puede hacer?

b) ¿Cuántas si en todas debe estar a en el primer lugar, sin repetir las letras? ¿Y si debe estar en el último, sin admitir repeticiones?

❖ ***Permutaciones*** *(sin repetición)*

EJEMPLO 3.7.5

En un torneo de football intervienen 22 equipos. ¿Cuántas tablas de posiciones diferentes se pueden dar?

Acá tenemos que llenar 22 casilleros, ya que la tabla estará formada por todos los equipos, todos ocupan algún lugar en la tabla. Tenemos entonces por la regla del producto:

22. 21. 20….1, dicho de otro modo $\prod_{i=1}^{22} i$, o equivalente a 22*!* que son todas las tablas posibles.

Generalizando…

Se tienen n objetos distintos.

El problema a resolver es: cuántas distribuciones distintas de n objetos distintos, se pueden formar a partir de los n objetos dados. Dos distribuciones se consideran diferentes si difieren en el orden de dos objetos.

Al número total de distribuciones cumpliendo los requisitos anteriores se lo anota

$$P^n \quad \text{o} \quad P(n)$$

Y se lee **permutaciones de n.**

Observar: que es un caso particular de variaciones sin repetición con $r = n$.

Por lo tanto el número que se obtiene es:

***Permutaciones** (sin repetición)*

Se tienen n objetos distintos, la cantidad de distribuciones distintas de n objetos distintos, se pueden formar a partir de los n objetos dados es:

$$P^n \quad \text{o} \quad P(n) = n!$$

EJERCICIO 3.7.6

Entre los 65 alumnos de la Comisión 4, hay 32 hombres y 33 mujeres:

a) ¿Cuántas filas distintas con esos alumnos puede hacer?

b) ¿Cuántas filas distintas con esos alumnos puede hacer si primero deben estar todas las mujeres y atrás todos los hombres?

c) ¿Cuántas filas distintas con esos alumnos puede hacer si hay dos (una pareja) que siempre quiere estar uno detrás del otro en la fila?

Un caso particular será un ordenamiento de n objetos entre los que hay elementos indistinguibles.

EJEMPLO 3.7.7

¿De cuántas maneras pueden ordenarse las letras de la palabra MASA?

Tenemos que ordenar 4 letras donde hay claramente 2 repetidas. Si ordenamos las 4 letras pensando que para el primer lugar disponemos de 4 posibilidades, para el 2do de 3 para el tercero de 2 y para el último de una, por la regla del producto tendremos 4! ordenamientos.

Pero acá estaríamos contando $\mathrm{MA_1SA_2}$ Y $\mathrm{MA_2SA_1}$ como ordenamiento distintos.

Por cada ordenamiento de las 4 letras estamos contando dos veces el mismo.

Por lo tanto las maneras posibles de ordenar las letras son: $\frac{4!}{2!}$

Permutaciones con elementos indistinguibles

Dados n objetos entre los que hay n_1 elementos iguales del tipo 1, n_2 elementos iguales del tipo 2, . . . , n_k elementos iguales del tipo k, el número de permutaciones distinguibles de los n objetos es:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

EJEMPLO 3.7.8

¿De cuántas maneras pueden ordenarse las letras de la palabra MATEMATICA?

En este caso se trata de ordenar 10 letras, donde claramente hay letras repetidas, si pensamos en llenar 10 casilleros, disponiendo para el primero de 10 letras, para el segundo de 9 letras, y así sucesivamente, estaremos repitiendo ordenamientos, ya que las 3 A son indistinguibles entre sí, las 2 T también lo son y las 2 M también son indistinguibles.

Tenemos entonces que descontar esos casos de más, los ordenamientos posibles son:

$$\frac{10!}{2!.2!.3!}$$

EJERCICIO 3.7.9

Identifique en los ejemplos o ejercicios anteriores cuáles son ejemplos de permutaciones sin repetición y permutaciones con elementos indistinguibles.

En muchos problemas es difícil identificar el modelo al que responden, se requiere de mucha práctica para poder advertir si un problema es una variación o una permutación, etc. Por eso es conveniente pensar la resolución de los ejercicios ordenando los casos y organizando la información buscando patrones y recién después analizar si responde a alguna fórmula o a una combinación de ellas.

EJEMPLO 3.7.10

a) ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 22 bolitas en 9 cajas numeradas?

b) De cuántas maneras si:

   i) ninguna caja debe quedar vacía

   ii) la tercera caja debe quedar vacía

   iii) la primera caja y la cuarta deben contener exactamente una bolita.

a) En este caso podemos pensar el problema con 22 elementos indistinguibles y 9 objetos que dejaremos en orden del 1 al 9.

Gráficamente:

•••█•██••█••••••█••█•••••••█•██

Cómo interpretamos esto???: 

Acá hemos dispuesto 3 bolitas en la primera caja, 1 en la segunda, ninguna en la tercera, 2 en la cuarta, 6 en la quinta, 2 en la sexta, 7 en la séptima, 1 en la octava y ninguna en la novena.

Pensando esto como un ordenamiento en hilera, los posibles casos se encuentran permutando las bolitas con las cajas, con la condición de que la caja 9 siempre vaya al final, ya que si la

secuencia termina con bolitas indicaría que no están en ninguna caja. Por lo tanto la caja 9 está fija y no permuta, esto daría el número *P(30)=30!*

Sin embargo,

las bolitas son indistinguibles entre sí y las cajas también ya que están numeradas en orden de aparición en la secuencia.

Por lo tanto las formas de poner las 22 bolitas en las 9 cajas son: $\frac{30!}{8!22!}$ que son las permutaciones de 30 objetos con 8 indistinguibles entre sí y 22 indistinguibles entre sí.

b) i) Si ninguna caja debe quedar vacía, asignamos primero una bolita a cada caja, de manera que quedan 13 bolitas para asignar a las 9 cajas. Con un proceso similar al anterior queda: $\frac{21!}{8!13!}$

ii) Si la tercera caja debe quedar vacía, descontamos esa caja del total y queda $\frac{29!}{7!22!}$

iii) Si la primera y la cuarta deben contener una bolita exactamente, descontamos dos bolitas y dos cajas y queda $\frac{26!}{6!20!}$

❖ ***Variaciones con elementos repetidos***

EJEMPLO 3.7.11

¿Cuántos números enteros de a lo sumo 4 cifras hay?

En este caso debemos considerar los números de 1 cifra, los de 2, los de 3 y los de 4.

Podemos considerar que el número 0002 es de 1 cifra, así como el número 0053 es de 2. Por lo tanto, podemos pensar en que queremos llenar 4 casilleros y para cada uno disponemos de 10 dígitos, esto es: 10x10x10x10

Esa es la cantidad de números enteros de a lo sumo 4 cifras.

Generalizando…

Se tienen n objetos distintos. Además admitimos que hay una cantidad ilimitada (al menos *r*) de copias de cada uno de ellos.

El problema a resolver es: cuántas distribuciones distintas de *r* objetos, se pueden formar a partir de los n objetos dados (y sus copias).

Dos distribuciones se consideran diferentes: si difieren en algún objeto que las forma o si los objetos son iguales deberán diferir al menos en el orden de dos objetos.

Al número total de distribuciones cumpliendo los requisitos anteriores se lo anota indistintamente

$$V_r^{*n} \quad \text{o} \quad V^*(n,r)$$

Y se lee **variaciones con repetición de *r* objetos elegidos entre *n*.**

Variaciones con elementos repetidos

Se tienen n objetos distintos. La cantidad de distribuciones distintas de r objetos, a partir de n objetos es:

$$V_r^{*n} \quad o \quad V^*(n,r) = n^r$$

EJERCICIO 3.7.12

Identifique en los ejemplos o ejercicios anteriores cuáles son ejemplos de variaciones con repetición.

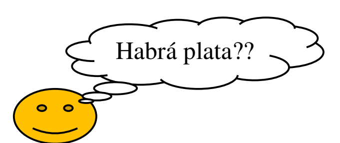
EJERCICIO 3.7.13

a) Hallar la cantidad de números enteros pares de cuatro cifras.
b) Hallar la cantidad de números enteros capicúas de cuatro cifras.
c) Hallar la cantidad de números de teléfono de cuatro cifras por característica.
d) Hallar la cantidad de números de teléfono capicúas de cuatro cifras por característica.

EJERCICIO 3.7.14

Para el lenguaje binario sabe Ud. que se usan los símbolos 0 y 1 como alfabeto.

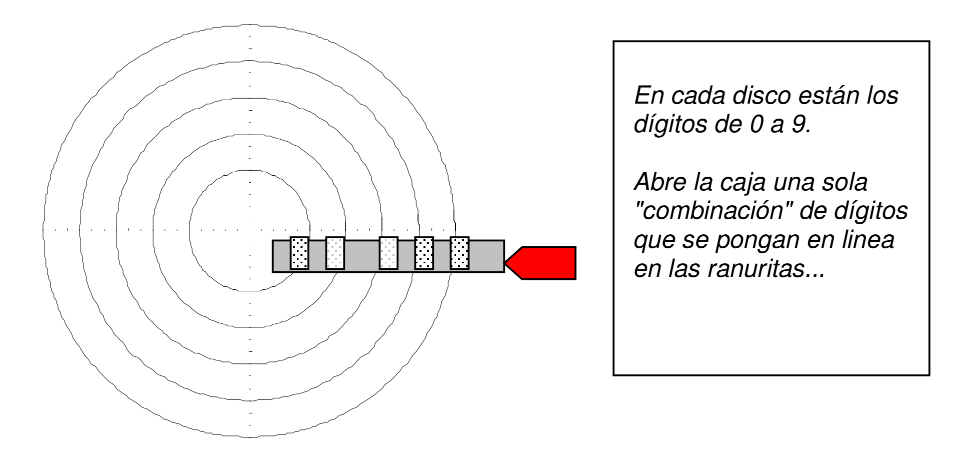
a) En ese lenguaje, ¿cuántas cadenas de 8 símbolos puede formar?
b) En binario, ¿cuántas cadenas de 8 símbolos puede formar que comiencen con 01?
c) En binario, ¿cuántas cadenas de 8 símbolos puede formar que tengan 01 como subcadena?
d) En ese lenguaje, ¿cuántas cadenas de 24 símbolos puede formar?
e) En ese lenguaje, ¿cuántas cadenas de hasta 24 símbolos puede formar?
f) En ese lenguaje, ¿cuántas cadenas de hasta n ($n > 0$) símbolos puede formar?



EJEMPLO 3.7.15

Una cerradura de combinación.

En una caja fuerte hay una "cerradura de combinación". Son cinco discos concéntricos, cada uno con números del 0 al 9. Para abrir la caja hay que encontrar una clave determinada por 5 números particulares, uno de cada disco. ¿Cuántas tentativas inservibles se pueden hacer?



En cada disco hay 10 dígitos posibles (de 0 a 9) para elegir.

En este caso también podemos analizar: ¿cuántas disposiciones de 5 dígitos podemos hacer? Resulta ser elegir un dígito por disco.

Como la elección de cada dígito es independiente en cada disco respecto de otro, se tiene que este número es 10^5.

Por lo tanto el número de intentos inútiles es $10^5 - 1 = 100000 - 1 = 99999$

¿En qué tipo de problema combinatorio lo encuadra?

Seguiremos con otro tipo de problemas que tiene características un poco distintas a los anteriores.

Es cuando ***el orden entre los elegidos no tiene significación***.

Algunas situaciones casi cotidianas permitirán comprender mejor.

EJEMPLO 3.7.16

Volvamos al EJEMPLO 3.7.1, contamos las posibles ternas con 1er., 2do. y 3er. puesto.

Pensemos ahora que los equipos que ocupan los tres primeros puestos quedan seleccionados para jugar la Copa Interplanetaria. Está claro el asunto es salir 1ro., 2do. ó 3ro para disputar esta nueva Copa, para ello no importa el orden.

Con cualquiera de estas tablas los mismos equipos disputan la Interplanetaria:

Tabla de Posiciones	**Pts.**
1. Deportivo Estudiantil	37
2. Joven Boca	35
3. Plateado Arroyo	34
....	....
22. Los Diablos Rojos	13

Tabla de Posiciones	**Pts.**
1.Deportivo Estudiantil	40
2.Plateado Arroyo	36
3.Joven Boca	33
....	......
22. Los Diablos Rojos	17

Dentro de la misma temática pero más triste: los últimos dos equipos de la tabla del torneo "se van" al descenso. El asunto acá es que "nuestro" equipo no ocupe las dos últimas posiciones, es indistinto ocupar el lugar 21 ó 22.

Con cualquiera de las dos situaciones los mismos "se van, ..."

Tabla de Posiciones	**Pts.**
....	.....
21.Gimnasia Artística	17
22.Deportivo Esperanza	13

Tabla de Posiciones	**Pts.**
....	.....
21. Deportivo Esperanza	15
22. Gimnasia Artística	11

EJEMPLO 3.7.17

Otra situación de la misma estructura: dentro de los 127 alumnos presentes en el aula se quiere elegir una comisión de cinco alumnos para que los represente en un Acto Académico. Para ir al Acto no importa el orden, interesa el conjunto de los alumnos elegidos.

Está claro que es la misma delegación:

Pablo, Ignacio, Fiorella, Ramiro, Luciano

que Ignacio, Fiorella, Luciano, Pablo, Ramiro,

que Fiorella, Pablo, Ramiro, Luciano, Ignacio,

y otras más. Cuántas más?

En los casos en que no interesa el orden de los elementos en la distribución, sino solamente su composición se dice que se trata de una **combinación.**

❖ ***Combinaciones*** *(sin repetición)*

Se tienen n objetos distintos.

El problema a resolver es: cuántas combinaciones distintas de r objetos distintos, se pueden formar a partir de los n objetos dados.

Dos combinaciones de r objetos elegidos entre n posibles, se consideran diferentes si difieren al menos en uno de los r objetos.

También se puede interpretar que se está buscando el número de todos los subconjuntos de r elementos a partir de un conjunto de n elementos.

Al número total de distribuciones cumpliendo los requisitos anteriores se lo anota indistintamente

$$C_r^n \quad \text{o} \quad C(n,r) \quad o \quad \binom{n}{r}$$

Y se lee **combinaciones de n tomados de a r.**

Observación 1: como no se admiten objetos repetidos debe ser $r \leq n$.

Observación 2: En estas condiciones se admite que $r = 0$, bajo la interpretación de formar subconjuntos de r elementos se está calculando la cantidad de subconjuntos de 0 elementos a partir de n dados. Cuántos son?

Resolveremos los ejemplos planteados y luego se derivará una forma general para calcular el número $C(n,r)$.

EJEMPLO 3.7.18
Cuántas ternas de equipos de football pueden formarse para ir a la Copa Interplanetaria?

En el torneo de preselección hay 22 equipos y para disputar la Copa Interplanetaria un equipo debe ocupar uno de los tres primeros puestos de la tabla de posiciones de ese torneo.

Al número que estamos buscando (el que se pretende encontrar) lo simbolizamos por

$$C(22,3)$$

esto indica la cantidad de ternas de equipos (sin importar el orden) elegidos sobre 22 posibles.

Si ahora se piensa en intercambiar el orden dentro de **todas las ternas posibles**, se obtendrán todas las variaciones de 22 objetos tomados de a 3.
Cómo se hace para tener el número de $V(22,3)$ de esta manera? Lo que se propone es intercambiar el orden dentro de cada una de las ternas.

Cada terna tiene 3 elementos y el número que da todas las distintas disposiciones de 3 elementos es $P(3) = 3!$. Esto se tiene por cada terna.

Y para obtener el número cuando se **permutan** los elementos de **todas las ternas** posibles?

Por la Regla del Producto para Enumerar, resulta que: *V(22,3) = 3!.C(22,3)*

Por lo tanto el número buscado es:

$$C(22,3) = \frac{V(22,3)}{3!}$$

Y esto es $C(22,3) = \dfrac{\frac{22!}{(22-3)!}}{3!} = \dfrac{22!}{(22-3)!.3!} = \dfrac{22.21.20}{3.2.1} = 1540$

Luego, 1540 es el número de todas las ternas de equipos que pueden quedar seleccionados en el torneo preliminar para disputar la Copa Interplanetaria.

En manera similar podemos razonar para determinar el número de posibles duplas (no importa el orden) para "irse al descenso": 👎☹

Este número buscado lo representamos por *C(22,2)*, esto es el número de todas las posibles selecciones de dos equipos sobre 22 posibles, sin importar el orden.

Si se reordenan con todos los ordenes posibles dentro de **todas las duplas posibles**, se obtendrán todas las variaciones de 22 objetos tomados de a 2.

Cada dupla tiene 2 elementos, y el número de todas las disposiciones distintas con ellos es *P*(2) = 2!. Esto es por cada una de las duplas.

Para obtener el número cuando se **intercambian** los elementos de **todas las duplas**, se aplica la Regla del Producto para Enumerar, por lo cual resulta que:

V(22,2) = P(2).C(22,2) = 2!.C(22,2)

Entonces el número buscado es: $C(22,2) = \dfrac{V(22,2)}{2!}$

Reemplazando por los valores correspondientes se tiene:

$$C(22,2) = \frac{\frac{22!}{(22-2)!}}{2!} = \frac{22!}{(22-2)!.2!} = \frac{22.21}{2.1} = 231$$

Así que el número de posibles parejas de equipos para descender de categoría es 231.

EJEMPLO 3.7.19

¿Cuántas delegaciones de 5 alumnos para un Acto Académico, sobre una clase de 127 alumnos?

Llamando *C(127,5)* al número buscado.

Por cada uno de estos conjuntos de 5 alumnos, consideramos todas las posibles disposiciones distintas considerando las posibles permutaciones de sus elementos, es decir 5*!*.

Si esto se realiza con cada uno de los subconjuntos dados por *C(127,5),* obtenemos todas las variaciones de 127 tomados de a 5. El número de éstas es *V(127,5)*

Y por la Regla del Producto resulta: *V(127,5) = P(5) . C(127,5)*

Así se tiene:

$$C(127,5) = \frac{V(127,5)}{P(5)} = \frac{\frac{127!}{(127-5)!}}{5!} = \frac{127!}{122!.5!} = \frac{127.126.125.124.123}{5.4.3.2.1} = \frac{127.126.125.124.123}{120}$$

El caso general:

Se tienen n objetos y se quiere calcular $C(n, r)$, es decir el número de combinaciones de n tomados de a r.

Este es el número de todas las posibles selecciones de r objetos a partir de los n dados sin importar el orden. Para la deducción consideramos $r > 0$.

Con la idea de los ejemplos, formemos todas las combinaciones de n objetos tomados de a r. Si cada una de ellas las ordenamos en todos los ordenes posibles, el número de las disposiciones así obtenidas es el de las variaciones de n tomados de a r, es decir $V(n, r)$.

El número de elementos de cada una de las $C(n, r)$ es r. El número de todos los posibles ordenamientos de r objetos (las permutaciones de r objetos) está dado por $P(r)$.

Para obtener el número de todas las distribuciones distintas cuando se permutan los elementos de todas las $C(n, r)$, aplicamos la Regla del Producto para Enumerar.

Y resulta:

$$V(n, r) = P(r).C(n, r)$$

Entonces el número buscado es:

$$C(n,r) = \frac{V(n,r)}{P(r)}$$

Combinaciones de n tomados de a r:

$$C(n,r)=\frac{V(n,r)}{P(r)}=\frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!} \qquad \textbf{(I)}$$

Observación: Para la deducción de la fórmula general **(I)** y en los ejemplos hemos considerado $r > 0$.

Si interpretamos que *C(n, r)* da el número de subconjuntos de *r* elementos a partir de un conjunto de n elementos, tiene sentido admitir $r = 0$ (también $n = 0$).

El vacío ($\varnothing$) es el único conjunto de 0 elemento y es subconjunto de cualquier conjunto. Por lo cual $C(n,0)=1$.

Si evaluamos el último miembro de **(I)** para $r = 0$, se obtiene:

$$\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}=\frac{n!}{(n-0)!.0!}=\frac{n!}{n!.1}=1 \text{ cualquiera sea } n$$

Por lo tanto se define para todo n natural, si $r \le n$, $C(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$ **(II)**

si $n < r$ ó $r < 0$ se define $C(n, r)=0$

En estos últimos casos también concuerda con la intuición si interpretamos que elegimos subconjuntos de *r* elementos de un conjunto de n.

EJERCICIO 3.7.20

Resuelva el ejercicio 3.7.10 usando la fórmula de combinaciones.

¿Cuántas asignaciones posibles habría si tuviera n bolitas indistinguibles y k cajas numeradas?

EJERCICIOS 3.7.21

1. ¿De cuántas formas pueden alinearse 6 hombres y 6 mujeres?:

a) sin restricciones;

b) en forma alternada;

c) los hombres primero y las mujeres después;

d) primero tres hombres, luego las 6 mujeres y finalmente los restantes 3 hombres.

2. Quince personas asisten a una conferencia. ¿De cuántas formas pueden sentarse a una mesa redonda si el presidente ha de ocupar una silla particular?

3. ¿De cuántas formas pueden sentarse 20 personas en dos mesas redondas, 11 en una y 9 en otra?

4. La cantidad de estudiantes en la ciudad de La Plata es de 20.000. Si cada estudiante se identifica con las 3 iniciales de sus nombres, ¿habrá al menos dos con las mismas iniciales?

5. De un grupo formado por 6 hombres y 8 mujeres se quiere seleccionar 2 hombres y 3 mujeres para formar una comisión. ¿De cuántas formas puede hacerse?
a) sin restricciones,
b) si Juan y Pedro no pueden estar juntos;
c) si Juan y Martín no pueden estar juntos
d) si Nicolás y Luciano deben ser incluidos.

6. Un examen tiene 20 preguntas.
a) Si el alumno debe responder 15 y omitir 5, ¿de cuántas maneras puede hacer la selección?
b) Y si debe contestar 5 y omitir 15?

7. Treinta jugadores participan de un torneo de volley y deben formar dos equipos, ambos con igual número de integrantes; uno de ellos debe estar dirigido por Martín y el otro por Patricio:
a) ¿Cuántos equipos distintos pueden formarse?
b) ¿Cuántos equipos distintos si hay 1 jugador particular que debe estar en el equipo de Martín y 2 que deben estar con Patricio?

8. En las pruebas de natación de los Juegos Olímpicos para disputar la final hay una serie de carreras previas. En una de ellas interviene 8 nadadores y los 3 primeros pasan a la final.
a) ¿Cuántos grupos de finalistas distintos pueden salir de esa semifinal?
b) En la final intervienen 10 nadadores, todos con iguales posibilidades de ganar, ¿de cuántas maneras distintas pueden subir al podio?
c) Explique la diferencia o analogía entre a) y b).

9. En una Conferencia de 57 participantes se debe elegir una Comisión de 7 personas para redactar las conclusiones. ¿De cuántas maneras puede hacerse?

10. En un club deportivo con 30 miembros hay que formar un equipo de 4 personas que lo represente en una carrera de 1000 metros.
a) ¿De cuántas maneras puede hacerse?
b) ¿De cuántas si dos deportistas indiscutidos deben estar en la representación?

11. Una persona tiene 6 amigos y quiere invitar diariamente a su casa un grupo de 3 de ellos de modo que cada grupo sea distinto día a día. Por cuántos días lo logrará?

12. Si en una carrera de caballos intervienen 15 caballos todos competitivos. Se premia a los que llegan 1, 2 ó 3 (no hay repeticiones). Para que un cuidador gane algo es si su caballo sale 1ro., 2do. ó 3ro.. ¿Cuántas posibles ternas hay?

Hay distintos tipos de jugadas para el apostador. Supongamos que una de ellas es acertar el 1ro. y el 2do. Cuántas contras tiene?
Supongamos que otra es acertar la dupla 1ro- 2do. ¿Cuántas contras tiene?

13. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 20 bolitas indistinguibles en 50 cajas numeradas con la condición de que cada caja contenga a lo sumo 1 bolita?

14. De cuántas maneras se pueden ubicar 15 bolitas indistinguibles en 10 cajas numeradas con la condición:
a) ninguna caja quede vacía.
b) la quinta caja quede vacía.
c) la primera caja quede vacía y la segunda contenga exactamente 2 bolitas.
d) queden a lo sumo 3 cajas vacías.

15. Una heladería ofrece 20 gustos distintos de helados. ¿De cuantas maneras distintas se puede servir un kilo de helado si en el pote puede haber a lo sumo 3 gustos?

16. ¿Cuántas palabras de 8 letras distintas y que contengan exactamente 3 vocales se pueden formar?

17. ¿Cuántos segmentos de recta se pueden formar con 46 puntos en el plano tal que ninguna terna de ellos está alineada?

18. ¿Cuántas poligonales formada por segmentos paralelos a los ejes se pueden trazar en el plano entre el punto (2*;* 3) y el punto (8*;* 6) si sólo se permiten *pasos* ascendentes y de izquierda a derecha?

19. ¿Cuántas poligonales formada por segmentos paralelos a los ejes se pueden trazar en el espacio $\mathbb{R}^3$ entre (-1,2,0) y (1,3,7) si solo se permiten *pasos* de alguno de estos tres tipos
De: $(x; y; z)$ a $(x + 1; y; z)$
De: $(x; y; z)$ a $(x; y + 1; z)$
De: $(x; y; z)$ a $(x; y; z + 1)$?

20. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar 12 frutas, en una verdulería en la que venden manzanas, peras, bananas?

21. ¿Cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones si en cada caso x_i debe ser un entero no negativo?
a) $x_1 + x_2 + x_3 = 4$
b) $x_1 + x_2 + x_3 = 8$

8. Propiedades de los números combinatorios

Propiedad 3.8.1: Es evidente que dados n elementos de un conjunto, cada subconjunto de *r* elementos determina otro de n-*r* elementos, por lo tanto:

$$C(n,r) = C(n,n-r)$$

Además la propiedad se puede demostrar viendo la fórmula que define cada miembro de la igualdad anterior.

Propiedad 3.8.2: Como casos particulares de la anterior Propiedad se tienen:

$$C(n,0) = C(n,n) = 1$$

$$C(n,1) = C(n,n-1) = n$$

♦ ***Propiedad de Pascal*** 3.8.3

Para todo *r* entero y n natural vale que: $C(n+1,r) = C(n,r) + C(n,r-1)$

Demostración:

a) Supongamos que $0 < r \leq n$.

Para estas condiciones hagamos la siguiente interpretación: consideremos un elemento en particular y fijo de los $n+1$ dados, por ejemplo, el elemento e_{n+1}.

Los subconjuntos que de *r* elementos a partir de los $n+1$ dados se subdividen en dos clases **disjuntas**:

Pero Claro!!!!!

S: los subconjuntos de *r* elementos que tienen al elemento e_{n+1}

Y

N: los subconjuntos de *r* elementos que **no** tienen al elemento e_{n+1}

Observar que al estar el elemento e_{n+1} fijo en uno de ellos, esos conjuntos *S* y *N* eligen sus elementos entre los n objetos restantes. En la formación de *S* hay que elegir sólo *r-1*, pues uno de los *r* objetos de ese conjunto es el elemento e_{n+1} , por lo tanto:

La cantidad de subconjuntos que tiene *S* es $C(n, r-1)$ y la cantidad de subconjuntos que tiene N es $C(n, r)$.

Tenemos entonces que la cantidad de subconjuntos de *r* elementos de un conjunto de $n+1$ elementos es igual a la cantidad de elementos de **S** + la cantidad de elementos de **N**, esto es:

$$C(n+1,r) = C(n,r) + C(n,r-1)$$

Es un buen ejercicio que verifique la igualdad propuesta usando la definición del número combinatorio.

SI!!

b) Para los casos en que $r = 0$ ó $n < r$ ó $r < 0$ la igualdad se verifica casi trivialmente.

♦

Un poquito de historia y otras cosas

Consideremos el siguiente *triángulo aritmético*:

$n=0$	1							
$n=1$	1	1						
$n=2$	1	2	1					
$n=3$	1	3	3	1				
$n=4$	1	4	6	4	1			
$n=5$	1	5	10	10	5	1		
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1	
$n=7$	1	7	21	35	35	21	7	1

$n=0$	1			
$n=1$	1	1		
$n=2$	1	2	1	
$n=3$	1	3	3	1
$n=4$ 1	4	6	4	
$n=51$	5	10	10	5
$n=6$ 6	15	20	15	
$n=77$	21	35	35	21

Sobre él se pueden hacer las siguientes observaciones:

- Cada número que está en el triángulo (no sobre los lados no horizontales) es suma de los elementos de la fila de anterior entre los cuales se encuentra.

Podríamos seguir su construcción con el mismo patrón y colocando 1 en los extremos.

Este triángulo se conoce como ***triángulo de Pascal***, aparece en una obra póstuma del pensador francés, en París1665. Pero antes que Pascal (1623-1662), el italiano ***Tartaglia*** (1500-1557) lo conocía. También hay indicios que los matemáticos árabes ***Giyaseddin*** y ***Hayyam*** lo conocían.

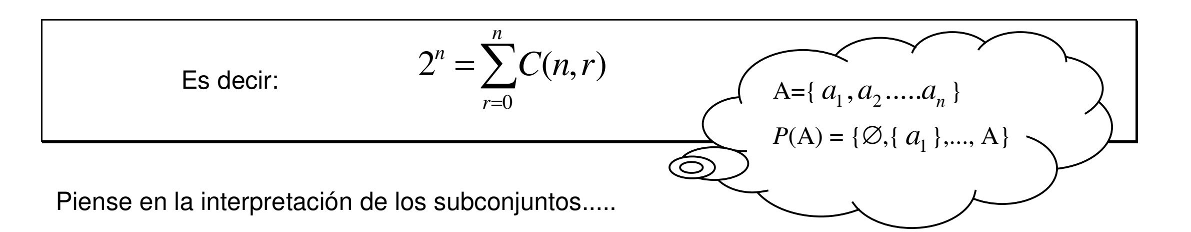
Por ello siendo neutrales es el *triángulo aritmético.*

Miremos otro aspecto del mismo.

- Para cada n o fila del triángulo, se puede comprobar que sucesivamente se tienen los números $C(n, r)$ para cada r tal que $0 \le r \le n$.

Como se ha dicho repetidamente estos números son la cantidad de subconjuntos de *r* elementos a partir de n dados.

➢ Si sumamos todos los elementos de cada fila la suma resulta ser 2^n, resultado que ya conocíamos por un ejercicio de demostración por inducción completa.



Es decir: $$2^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)$$

Piense en la interpretación de los subconjuntos.....

9. Los binomios a la *n*

Vamos a considerar un binomio de la forma $a + b$ para a y b números reales.

Se pretende encontrar una forma de calcular $(a+b)^n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Hay valores de a o b que hacen triviales el cálculo (a = 0, b= 0, $a = b$, $a = -b$) pues el binomio deviene en monomio. Además, recordemos la indeterminación de 0^0

En lo que sigue vamos a considerar $a + b$ para a y b números reales, no nulos y de suma no nula.

¡Aplico distributiva!

Recordemos que por definición de potencia, se tienen las conocidas expresiones:

$$(a+b)^2 = (a+b).(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b)^2.(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2).(a+b) = a^3 + 3a^2.b + 3a.b^2 + b^3$$

es inmediato que:

$$(a+b)^4 = (a+b)^3.(a+b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3).(a+b) = a^4 + 4a^3.b + 6a^2b^2 + 4a.b^3 + b^4$$

Y podríamos seguir...
Vamos a mirar con "espíritu crítico" cada uno de estos desarrollos.

i) Para cada potencia (n = 2, 3,4) el número de términos es $n + 1$.

ii) Si en cada término se suman los exponentes de a y b esa suma es n.(Recuerde que a^0 ó b^0 es 1)

iii) Considerados los términos en el orden expuesto, para cada n=2,3 y 4, los sucesivos coeficientes de las potencias de a y b son $C(n, r)$ con $0 \leq r \leq n$. ¡¡¡ Compruebe!!!

iv) Los coeficientes de los términos, desde los extremos de los desarrollos hacia el centro de los mismos (si el exponente es par hay un término central), son iguales. Esto es por la observación anterior y la Propiedad 1 de los números combinatorios.

Para estos tres casos (n = 2,3 y 4) se puede escribir:

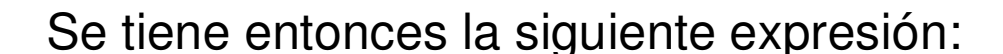
$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r).a^{n-r}.b^r = \sum_{r=0}^{n} C(n,n-r).a^r.b^{n-r} = \sum_{r=0}^{n} C(n,n-r).a^{n-r}.b^r$$



También está claro que:

$$(a+b)^0 = 1 = \sum_{r=o}^{0} C(0,r).a^r.b^{0-r}$$

$$(a+b)^1 = a+b = \sum_{r=0}^{1} C(1,r).a^r.b^{1-r}$$



Se tiene entonces la siguiente expresión:

♦ ***Binomio de Newton*** 3.9.1:

Si a y b son números reales, no nulos y de suma no nula vale que, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)a^r.b^{n-r} = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)a^{n-r}.b^r = \sum_{r=0}^{n} C(n,n-r)a^r b^{n-r} = \sum_{r=0}^{n} C(n,n-r)a^{n-r} b^r$$

Esta fórmula se conoce como ***fórmula de Newton*** para el desarrollo de potencia natural de un binomio o simplemente ***fórmula del binomio de Newton***

Demostración:

Haremos la demostración de la primera igualdad por el principio de inducción completa sobre el natural n:

Queremos ver que $(\forall n)(P(n))$, siendo $P(n):(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)a^r.b^{n-r}$

1) $P(0):(a+b)^0 = \sum_{r=o}^{0} C(0,r).a^r.b^{0-r}$ y como

$(a+b)^0 = 1$ y $\sum_{r=o}^{0} C(0,r).a^r.b^{0-r} = C(0,0).a^0.b^0 = 1$ se cumple la igualdad. Por lo tanto *P (0)* es verdadera.

2) Suponemos que se cumple $P(k):(a+b)^k = \sum_{r=o}^{k} C(k,r).a^r.b^{k-r}$ siendo la hipótesis inductiva

Queremos probar entonces que se cumple $P(k+1):(a+b)^{k+1} = \sum_{r=o}^{k+1} C(k+1,r).a^r.b^{k+1-r}$

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k (a+b) = (\sum_{r=o}^{k} C(k,r).a^r.b^{k-r})(a+b) =$$

↑ usando la hipótesis inductiva ↑ por prop distributiva y potencia de igual base

q

$$= \sum_{r=o}^{k-1} C(k,r).a^{r+1}.b^{k-r} + C(k,k)a^{k+1}b^0 + \sum_{r=1}^{k} C(k,r).a^r.b^{k+1-r} + C(k,0)a^0b^{k+1} =$$

↑ Haciendo un corrimiento de índice en la primer suma

$$= \sum_{r=1}^{k} C(k,r-1).a^{r-1+1}.b^{k-(r-1)} + a^{k+1}b^0 + \sum_{r=1}^{k} C(k,r).a^r.b^{k+1-r} + a^0b^{k+1} =$$

↑ Agrupando las dos sumatorias

$$= \sum_{r=1}^{k} (C(k,r-1)+C(k,r)).a^r.b^{k+1-r} + a^{k+1}b^0 + a^0b^{k+1} =$$

↑ Usando la propiedad de Pascal

$$= \sum_{r=1}^{k} C(k+1,r).a^r.b^{k+1-r} + a^{k+1}b^0 + a^0b^{k+1} =$$

↑ Reescribiendo los dos últimos términos usando propiedades de los números combinatorios

$$\sum_{r=1}^{k} C(k+1,r).a^r.b^{k+1-r} + C(k+1,k+1)a^{k+1}b^0 + C(k+1,0)a^0b^{k+1} = \sum_{r=0}^{k+1} C(k+1,r).a^r.b^{k+1-r}$$

Por lo tanto *P(k+1)* es verdadera y en virtud del principio de inducción completa

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)a^{n-r}.b^r \quad \forall n, n \in \mathbb{N}$$

♦

EJERCICIO 3.9.2

Demostrar las otras igualdades de la Fórmula del Binomio de Newton

Observación: Hemos supuesto que a y b son números reales, no nulos y de suma no nula ya que es el conjunto numérico más amplio que hemos considerado por el momento, pero esta fórmula también vale para números complejos con las mismas restricciones y para indeterminadas cuyo producto conmute.

EJERCICIO 3.9.3

Como aplicación de la fórmula anterior y con las limitaciones necesarias, demuestre que:

$$i)\quad (a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n,k) a^{n-k}.b^k$$

$$ii)\quad 0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n,k) \qquad\qquad iii)\quad 2^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)$$

Observación: Por las propiedades de los números combinatorios y la fórmula demostrada para el desarrollo de la potencia n de un binomio, resulta que los coeficientes del desarrollo son precisamente los elementos del triángulo aritmético para la fila correspondiente a n. Usar el triángulo da un método para encontrar los coeficientes del desarrollo cuando n no es muy grande.

EJERCICIO 3.9.4

1) Utilizando la definición, probar:

a) $C(n\text{-}1, r) + C(n\text{-}1, r\text{-}1) = C(n, r)$.

b) $C(n + 2, r) = C(n, r) + 2 \,.\, C(n, r - 1) + C(n, r - 2)$.

c) $C(n + 3, r) = C(n, r) + 3 \,.\, C(n, r - 1) + 3 \,.\, C(n, r - 2) + C(n, r - 3)$.

2) a) Hallar r si $V(m, r) = 720 \,.C(m, r)$.

b) Hallar x si $V(x, 3) = 240 \,.\, x$.

c) Hallar m y r si: $\dfrac{V(m,r)}{V(m,r-1)} = 3$, $\dfrac{C(m,r)}{C(m,r-1)} = \dfrac{3}{5}$

3) Sea C_r es el coeficiente del r-ésimo término del desarrollo de $(1+x)^n$. Sabiendo que $C_5 = 70 \ y \ C_7 = 28$, determinar n.

4) Hallar el término independiente de x en el desarrollo de $(x^2 - 2x^{-1})^{12}$.

5) En el desarrollo de $(2+3b)^n$ el coeficiente de b^{12} es cuatro veces el coeficiente de b^{11}. Hallar n.

6) En el desarrollo de $(3x+7)^{39}$, $C_{r+1} = C_r$. Hallar r.

7) Evaluar las siguientes sumas (sin desarrollar los combinatorios, usando binomios apropiados):

a) $C(6, 0) + C(6, 1) + \ldots + C(6, 5)$.

b) $C(6, 0) - C(6, 1) + C(6, 2) - C(6, 3) + \ldots + C(6, 6)$.

8) Probar que (use binomios apropiados):

a) $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$

b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^n C(n,k) = 0$

9) Demostrar que si n es par, entonces:

$C(n, 0) + C(n, 2) + \ldots + C(n, n) = C(n, 1) + C(n, 3) + \ldots + C(n, n - 1) = 2^{n-1}$

10) Usando el desarrollo de $(1+x)^n$ y dando a x un valor adecuado, probar:

a) $1 - 2C(n, 1) + 2^2 C(n, 2) - 2^3 C(n, 3) + \ldots + (-1)^n 2^n C(n, n) = (-1)^n$

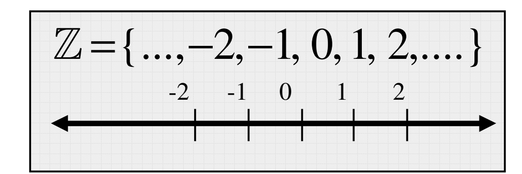
b) $1 + 2C(n, 1) + 2^2 C(n, 2) + 2^3 C(n, 3) + \ldots + 2^n C(n, n) = 3^n$

11) Desarrolle $(1+4a)^{16}$; $(2-ab^3)^7$; $(a^{-2}+2a^3b^5)^{12}$

12) Calcular el término de grado 34 en x de: a) $(1+x)^{156}$ b) $(x^3+3)^{46}$

13) Calcular el coeficiente del término de grado 15 en x de $(\frac{1}{x} - 3x^3)^{245}$; y el de grado 17.

10. Números Enteros



Se trabajará con los conocidos números enteros resaltando los aspectos importantes de la divisibilidad y de la división entera.

➤ **Un poquito de Historia importante de saber:**

En las primeras épocas de la matemática occidental los enteros eran sólo los números que conocemos por enteros positivos, pues los negativos se incorporan en las matemáticas occidentales de manera definitiva a fines del siglo XVII (de nuestra era).

En oriente los matemáticos hindúes del siglo VII (positivo) ya los usaban, para indicar deudas y los anotaban con un circulito arriba del número. Brahmagupta (aprox. en 628) fue el primero en dar reglas precisas para trabajar con números negativos.

La aparición del 0 como lo usamos hoy también aparece en la India, en una inscripción del año 876 y los árabes lo llevan a Europa en el siglo XII, junto con la notación que usamos para representar los números que por eso se la llama indoarábiga.

Porqué el interés desde el comienzo de los trabajos matemáticos (antiguos chinos, hindúes, babilonios, egipcios, griegos,...) en el estudio de los enteros? Además de ser los números que representaban la mayoría de los problemas prácticos que abordaban, también los racionales que permiten resolver la mayoría de esos problemas, se escriben como cociente de enteros.

La teoría de los números enteros es una motivación para otras teorías matemáticas, además de ser un tema rico en si mismo que permite con muy pocas definiciones hacer un desarrollo dentro de la teoría, dando la posibilidad al alumno de adquirir manejo de la manera de proceder en matemática: hacer demostraciones.

La mayoría de los resultados que se presentarán son conocidos por los alumnos desde su enseñanza elemental, lo que seguramente es novedoso para gran parte de ellos es la demostración de esas propiedades.

➤**Recordando definiciones y algo más.**

● **Operaciones**

Recordamos que el conjunto de los números enteros son los números naturales al que se le unen los opuestos de cada número natural. Son los que vulgarmente llamamos los enteros negativos.

¿Qué es el opuesto?

La definición formal es aquel número que al sumarse entre sí, número y su opuesto, de por resultado el 0. Por lo tanto observemos que el opuesto del 0 es 0.

Tenemos así que $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^{-}$, siendo $\mathbb{N}^{-} = \{-0, -1. -2, -, ...\}$.

De acuerdo a la definición formal, **todo entero tiene opuesto**:

Ya que si $m \in \mathbb{Z}$ entonces m = 0, m > 0 ó m < 0.



Así si $m \geq 0$, entonces $-m \in \mathbb{N}^{-}$ por la definición del conjunto.

Si m < 0 entonces $m \in \mathbb{N}^{-}$, luego existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $m = -a$, y $a + m = 0$.

Las operaciones usuales de suma y multiplicación de $\mathbb{N}$ sabemos que se extienden de la manera conocida a $\mathbb{Z}$. Las propiedades que cumplen son similares a las que se vieron en el apartado **0**.

Recordatorio 1:
La suma es asociativa, existe el 0 (neutro), conmutativa.
Ahora se enriquece con que cada elemento tiene opuesto.
La multiplicación es asociativa, existe el 1 (neutro), conmutativa.
La suma se distribuye en la multiplicación.

Ah!!

Recordatorio 2:
Regla de los signos para la multiplicación: + . + = +   + . - = -
- . - = +   - . + = -

EJERCICIO 3.10.1

a) Probar que no existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que 0 < m < 1.

b) Si $n \in \mathbb{Z}$, probar que no existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $n < m < n + 1$.

Para la operación de la suma cada elemento de $\mathbb{Z}$ tiene su opuesto: m + ($-m$) = 0 (da por resultado el neutro respecto de esa operación).

¿Habrá una propiedad similar para la multiplicación? Es decir: dado un número entero a habrá otro número entero que multiplicado por él de por resultado 1 (neutro para esta operación).

En ese caso se dirá que a **es invertible**.

Es claro que esta pregunta debe ser para $a \neq 0$, pues 0. m = 0 para todo $m \in \mathbb{Z}$.

La siguiente propiedad es algo muy conocido pero muy útil, como se verá a lo largo del texto.

Monotonía de la multiplicación en $\mathbb{R}$, en particular en $\mathbb{Z}$:

$a \leq b$, si $c \geq 0$ entonces $a.c \leq b.c$

$a \leq b$, si $c < 0$ entonces $a.c \geq b.c$

♦ PROPOSICION 3.10.2

Los únicos elementos invertibles en $\mathbb{Z}$ son 1 y -1.

Demostración:

Sean $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z}$ y supongamos que $m\ .\ n = 1$.

Por la regla de los signos ambos son positivos no nulo o ambos son negativos no nulos

Primero supongamos $m > 0$ y $n > 0$ y ambos distintos de 1. Por cual $m \geq 2 \quad \wedge n \geq 2$

Por lo tanto $m\,.\,n \geq 2\,.\,2 = 4$, por monotonía.

Supongamos que $m < 0$ y $n < 0$ y ambos distintos de -1. Por lo cual $m \leq -2 \quad \wedge n \leq -2$

Por lo cual $m\,.\,n \geq (-2)\,.(-2) = 4$, por monotonía.

Por lo cual todo par de enteros distintos de 1 y -1 su multiplicación no puede dar 1.

Pero claramente 1. 1 = 1 y (-1) . (-1) = 1.

Por lo tanto el inverso de 1 es 1 y el inverso de -1 es -1.

♦

● **Divisibilidad**

Dados dos enteros por ejemplo 8 y - 4, se dice que - 4 *divide a* 8 pues existe el número - 2 tal que (-4).(-2) = 8.

También se dice que 8 *es múltiplo de* - 4, -4 *es un divisor de* 8, 8 *es divisible por* - 4.

No siempre ocurre que dados dos enteros se pueda encontrar un tercer entero que cumpla que el producto de uno de ellos por el tercero sea el segundo de ellos (aún intercambiando el papel del 1ro. y el 2do.), piense en 7 y - 4.

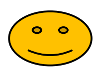
Para que - 4. x = 7 , x debe ser negativo

Si x = -1 , -4. (-1) = 4

Si x = -2 , -4. (-2) = 8 > 7

Por monotonía del producto en $\mathbb{R}$, en particular en $\mathbb{Z}$, cualquier otro valor negativo x < -2 , al multiplicarlo por - 4 será aún mayor que 8. Por lo tanto no es posible encontrar un entero que multiplicado por -4 de 7.

Justifique que tampoco 7 divide a -4.



Justifique que 8 *no divide a* 4.

En el caso de 7 y -4, es posible encontrar enteros que permiten expresar 7 = (-4).(-2) + (-1), pero también 7 = (-4).(-1) + 3 = (-4).3 + 19 y podríamos encontrar más...

Como se ve las cosas entre los enteros no siempre son tan triviales, vamos a poner algunos límites y definiciones.

Dados dos enteros a y b, se dice que ***a* divide a *b*** si existe un entero c tal que $b = a.\,\boldsymbol{c}$

Si ***a*** divide a ***b*** se anota $a \mid b$

Son sinónimos:

a **es divisor de *b*, *b* es divisible por *a*, *a* es factor de *b*, *b* es múltiplo de *a***

$a \nmid b$ indica que ***a* no divide a *b***.

Para pensar

- En la definición de divisibilidad en los enteros dice "si existe un entero ***c*** tal que ***b* = *a*. *c***".

Piense porqué "no tiene gracia" si ***c*** pudiera ser racional en el caso de ser a no nulo.



- La restricción inicial de considerar a y b enteros por qué es?

- Explique claramente que significa que dados los enteros a y b, $a \nmid b$

EJERCICIO 3.10.3

Probar que para todo n natural impar, $8 \mid n^2 - 1$

♦ PROPIEDADES 3.10.4:

1) Dado $a \in \mathbb{Z}$ entonces $a \mid 0$

2) Dado $a \in \mathbb{Z}$ entonces $a \mid a$

3) Dado $a \in \mathbb{Z}$ entonces $1 \mid a$

4) Dado $a \in \mathbb{Z}$ entonces $-a \mid a$

5) Dado $a \in \mathbb{Z}$ entonces $-1 \mid a$

Se demostrará la 1):

Sea a un número entero. Hay que encontrar un entero que multiplicado por a dé por resultado 0.

Existe algún entero en esas condiciones? Cuál es el número?

$a.$? $= 0$, ese número es 0, ya que $a.\ 0 = 0$

Observar que de a sólo se dice que es un entero. Por lo tanto esta propiedad la cumple cualquier entero.

♦

La propiedad 1) permite concluir que ***el 0 tiene infinitos divisores***.

Por las propiedades 2), 3), 4) y 5), ***salvo el 1 y -1 todos los enteros admiten al menos cuatro divisores.***

EJERCICIO 3.10.5

a) Probar las propiedades 2) a 5) de 3.10.4.
b) Probar que los únicos divisores de 1 y de -1 son 1 y -1.
c) Probar que dados $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$, si $a \mid b$ entonces $-a \mid b$.
d) Los divisores "aparecen de a pares"... En qué caso de a y b esos divisores coinciden?
e) Analizar el valor de verdad de la siguiente afirmación: $a \mid b$ y $-a \nmid b$. Justificar
f) Probar que dados $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$, si $a \mid b$ entonces $a \mid -b$.
g) Analizar el valor de verdad de la siguiente afirmación:

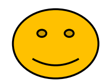
   $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \wedge (a \mid b \ \wedge \ b \mid a) \rightarrow a = b$ (Demuestre su posición)

Por este ejercicio concluimos que es suficiente estudiar la divisibilidad en los números enteros positivos.

Dado el entero a se llaman ***divisores triviales de a*** a los números: ***a, -a, 1 y -1.***

En el ejemplo inicial se vio que el número 8 admite más de cuatro divisores. Pero hay otros números, por ejemplo el 2 que sólo admite 2, -2, 1 y -1 como divisores, como 2 no es el único con estas característica bien vale recordar otra definición fundamental

Un número entero es ***primo*** si admite exactamente cuatro divisores.



EJERCICIO 3. 10. 6

Demostrar que si *p* es primo entonces -*p* es primo.

Los primos aparecen de a dos.....

EJEMPLO 3.10.7

Probar que 3 es primo.

Se debe ver que sólo dividen a 3 los enteros 1, -1, 3 y -3.

Ya sabemos que esos números lo dividen por las propiedades 2) a 5) de 3.10.5 que valen para todo entero.

Su pongamos entonces que existen divisores no triviales de 3.

Es decir que 3 = $a.\,b$ con a y b ambos distintos de 1 , -1 , 3 y -3.



(Observar que si esto lo pedimos sólo para a resulta suficiente...).

También por 3.10.5 es suficiente analizar sólo los divisores positivos.

Analicemos primero el caso a >1.

Es decir $a \geq 2$. Cómo tampoco permitimos que b sea 1, $b \geq 2$.

Por la regla de monotonía de la multiplicación se tiene:

$$a.\,b \geq 2.\,b \geq 2.2 = 4\,,\ \text{por lo tanto no da 3.}$$

Es decir 3 no tiene divisores no triviales positivos, por lo tanto tampoco no triviales negativos.

Por lo cual los únicos divisores que admite son 1-1, 3 y -3. Luego, 3 ES PRIMO.

Ya conoce al menos 4 primos: 2, -2, 3 y -3 de *los infinitos* que existen.

EJERCICIO 3.10.8

Probar que 5 y 7 son primos. ¿Cuáles enteros primos arrastra esta prueba?

EJERCICIO 3.10.9

Más propiedades de la divisibilidad en $\mathbb{Z}$

a) Probar que dados $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Z},$ si $a \mid b \ \wedge \ b \mid c$ entonces $a \mid c$.

b) Probar que para todo a, b, c si

$a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Z},$ si $a \mid b \ \wedge \ a \mid c$ entonces $a \mid m.b + n.c$ para cualquier $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$.

c) Probar que dados $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Z},$ si $a \mid b \ \wedge \ a \mid b + c$ entonces $a \mid c$.

d) Probar que si $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z},$ si $a \mid b \ \wedge \ a \mid 3.b + 5$ entonces $a = \pm 1 \ \vee \ a = \pm 5$

¡¡Vamos a colaborar!! Haremos a):

Si a, b, c son enteros, si $a \mid b \ \wedge \ b \mid c$ entonces por definición, se tiene que existen números enteros k y t tales que $b = a.\,k$ (1) y $c = b\,.\,t$ (2).

Reemplazando (1) en (2): $c = (a.\,k).\,t$ y como vale la propiedad asociativa de la multiplicación $c = a.(\,k.\,t\,)$ como producto $k.\,t$ es un entero, se tiene que $a \mid c$.

También haremos b):

a, b, c son números enteros, si $a \mid b \ \wedge \ a \mid c$ entonces por definición, se tiene que existen números enteros

k y t tales que $b = a.\,k$ (1) y $c = a\,.\,t$ (2).

Es así como dado cualquier par de enteros m y n, usando (1) y (2):

$$m.\,b + n.\,c = m.\,(a.k) + n.\,(a\,.\,t) = m.\,(k.\,a) + n.\,(\,t.\,a) = (m.\,k).\,a + (n.\,t).\,a$$

por las propiedades conmutativas y asociativas de la multiplicación.

Como valen la conmutatividad de la multiplicación y la distributividad de la multiplicación en la suma de enteros, resulta: $m.\,b + n.\,c = (m.\,k).\,a + (n.\,t).\,a = (m.\,k + n.\,t).\,a = a.\,(m.\,k + n.\,t)$

y sabemos que $m.\,k + n.\,t$ es un número entero.

Por lo cual $a \mid m.b + n.c$ para cualquier $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z}$.

EJERCICIO 3.10.10

a) ¿Si a, b, c son números enteros y $a \mid b.c$ entonces $(a \mid b \ \vee \ a \mid c)$?

b) Demostrar que si a, b, c son enteros $a \nmid b.c$ implica que $a \nmid b \ \wedge a \nmid c$

c) Sean a, b y c números naturales, tales que $a = b.c$ y $a \neq 0$. Demostrar que $b \leq a$ y $c \leq a$.

En otras palabras en $\mathbb{N}$, si $b \mid a$ y $a \neq 0$ entonces $b \leq a$.

Ayudita, haremos c): (no hay porque!!!)

Como a, b y c son números naturales y a no nulo por hipótesis, resulta que tampoco pueden ser 0 ni b ni c. Por lo tanto, $b \geq 1$ y $c \geq 1$ (*).

Vamos a usar la propiedad de monotonía de la multiplicación de naturales, resulta así que multiplicando ambos miembros de (*) por b:

$$b.c \geq b.1 = b \text{ como } a = b.c \text{ se tiene } b \leq a.$$

De similar forma se puede demostrar que $c \leq a$.

♦ TEOREMA 3.10.11

Todo número entero distinto de 1 y -1 es divisible por un número primo.

Demostración:

Supongamos que la propiedad no es cierta, entonces hay al menos un entero distinto de 1 y de -1 para el cual ningún primo lo divide.

Formamos el conjunto:

$$S = \{k \in \mathbb{N} : k \neq 1 \wedge k \text{ no tiene divisores primos}\}$$

Veremos que el suponer que *S* es no vacío lleva a contradicción, luego *S* no puede existir.

Sea $S \neq \emptyset$. Por el principio de buena ordenación, existe

$m \in S$, m primer elemento de S.

Por lo tanto, m no es primo. Si lo fuera, como siempre $m \mid m$, m tiene un divisor primo en contra de lo que verifica por estar en S.

Por lo cual $m = r.s$ con r, s divisores no triviales de m. Se los puede considerar ambos positivos.

Por lo tanto $r < m$ y $s < m$. (justifique). Por lo cual ambos no son elementos de *S* ya que m es mínimo de *S*.

Luego existe p, primo tal que $p \mid r$.

Por la propiedad 3.10.9 a) existe un primo p, tal que $p \mid m$.

Por construcción de *S* ningún primo divide a m, sin embargo se ha encontrado un primo que lo divide. Esta contradicción significa que m no puede existir.

Por lo tanto *S* debe ser vacío.

Por el ejercicio 3.10.5, dentro de los enteros negativos distintos de -1 debe pasar lo mismo, sino sería construible un conjunto como *S,* pues todo numero si tiene un divisor positivo, también tiene un divisor negativo. (Justifique)

Es así entonces que todo entero distinto de 1 y -1, tiene un divisor primo!!

♦

El siguiente resultado se debe a Euclides (siglo IV a. C.), está en el libro IX de los *Elementos*.

Más adelante veremos porque la inquietud de estudiar a los números primos…..

♦ TEOREMA 3.10.12

Existen infinitos números primos

Demostración:

Se supondrá que hay un número finito de números primos y se llegará a una contradicción.

Sean $p_1, p_2, \cdots, p_n$ todos los primos que existen.



Se calcula $z = \prod_{i=1}^{n} p_i$.

Considerar el número $z + 1$.

Por construcción $z+1 \neq 1$ y $z+1 \neq -1$. (Pues z no es 0 ni -2) (Justifique!!!).

Por el teorema anterior, existe un primo *p* que divide a $z + 1$.

Pero ese primo *p* es uno de los factores de *z* ya que hemos supuesto que sólo existen esos primos. Es entonces que $p \mid z$

Por lo cual, $p \mid 1$, ya que si $p \mid z \quad \wedge \quad p \mid z+1$. (por ejercicio 3.10.9 c))

Lo que es un absurdo ya que los únicos divisores de 1 son 1 y -1, y ellos no son primos.

Por lo tanto no hay un número finito de primos, sino es posible construir *z*, que lleva a contradicción.

♦

Como se viene diciendo los números primos son importantes, ya verá porque (sea paciente…).

A lo largo de la historia de la Matemática se trató de encontrar una fórmula que los generara, pero no la hay pero se tiene la posibilidad de determinar si un número es primo conociendo algunos primos menores que él.

Para un método que se enuncia a continuación se necesita el siguiente concepto:

Se llama **raíz cuadrada natural de un número natural *b*** al mayor natural que es menor o igual que su raíz cuadrada.

Se la anota $\left(\sqrt{b}\right)$.

Si $b \in \mathbb{N}$, existe $c \in \mathbb{N}$

$\left(\sqrt{b}\right) = c \leftrightarrow c^2 \leq b$

$\left(\sqrt{1}\right) = 1 \quad \left(\sqrt{3}\right) = 1$

$\left(\sqrt{25}\right) = 5$

Este método permite determinar los primos positivos, pero use el ejercicio 3.10.6, para determinar los que son enteros.

● ***CRIBA de ERATOSTENES:*** *Un método para enumerar los primos positivos.*

Si $m \in \mathbb{N}$ y $m \neq 1$ entonces existe el menor primo positivo p tal que $p \mid m$.

Por lo cual $p.a = m$ con $a \in \mathbb{N}$. Entonces $p^2 \leq p.a = m$ (justifique).

Luego:

a) Si m no es primo existe *p* primo que es divisor de m y es menor o igual que la raíz cuadrada natural de m.

b) El número $m > 1$ es primo si no es divisible por ningún primo menor o igual que su raíz natural.

Este resultado da el método para determinar los primos sucesivamente, dados los números naturales y conociendo los primos menores se va avanzando, marcando los primos que se van determinando.

Por los ejercicios, se sabe que 2, 3, 5 y 7 son primos. Además los números pares, salvo el 2 no son primos. Si un número no es par no es divisible por 2. El 9 es divisible por 3.

Vemos como haríamos por este método el estudio si el 11 es primo o no:

$\left(\sqrt{11}\right) = 3$, es divisible el 11 por los primos menores o iguales que 3?

No lo es por 2 ni por 3. Luego, 11 es primo. También lo marcamos.

0	1	2 /	3 /	4	5 /	6	7 /	8	9
10	11 /	12	13	14	15	16	17	18	19

¿Es el 13 primo? $\left(\sqrt{13}\right) = 3$, como 13 no es divisible ni por 2 ni por 3. Luego 13 es primo.

Y de este modo se sigue.

0	1	2 /	3 /	4	5 /	6	7 /	8	9
10	11 /	12	13 /	14	15	16	17 /	18	19 /
20	21	22	23 /	24	25	26	27	28	29 /
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

¿Qué pasa con el 31? $\left(\sqrt{31}\right) = 5$. ¿Es 31 divisible por 2, 3 ó 5? NO. 31 es primo. Tacha?

Supongamos que queremos saber si el número 211 es primo.

$\left(\sqrt{211}\right) = 14$, ver si 211 es divisible por 2, 3 ,5, 7, 11, 13.

Por criterios conocidos de divisibilidad no es por 2, ni por 3 ni por 5.

Lo será por 7? No (haga la cuenta)

Será por 11? No (hice la cuenta).

Será por 13? No. Por lo tanto 211 es primo.

Siendo más "grande" el número se nota más la ventaja del método.

Justifique esta afirmación.

Supongamos que queremos saber si el número 323 es primo.

$\left(\sqrt{323}\right) = 17$, ver si 323 es divisible por 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17.

Por criterios conocidos de divisibilidad no es por 2, ni por 3 ni por 5.

Será por 7? No.... Por 11? Tampoco. Por 13? No. Por 17? Si.

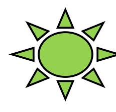
Por lo tanto 323 NO es primo.

EJERCICIO 3.10.13

Determine los primos menores que 100.

❖ División entera

Si un entero a no es divisible por otro b se expresa a como una suma de un producto de b por otro entero más un entero "corrector". Se hacen algunas limitaciones para que sean únicos los enteros que permiten relacionar a con b. Volver a mirar el caso de 7 y -4 en la página 2.



♦ TEOREMA 3.10.14

Dados $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$ y $b > 0$ existen enteros q y r tales que $a = q.b + r$ con $0 \leq r < b$.

Los números q y r son únicos en esas condiciones.

A q se lo llama **cociente** y a r **resto**.

Demostración:



1) Si $b \mid a$, por definición de divisibilidad el teorema vale con $r = 0$ y $a = q.\ b.$

Es fácil probar que ambos son únicos.

2) Supóngase que b no divide a a.

Se construye el conjunto $A = \{h \in \mathbb{N} : h = a - k.b,\ \text{con } k \in \mathbb{Z}\}$.

Obsérvese que el 0 no está en A (sino b divide a a).

Por construcción A es un subconjunto de $\mathbb{N}$.

Usando el principio de buena ordenación, resulta que A tiene un mínimo. Sea r el mínimo de A.

Al ser r un elemento de A, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $r = a - q.b$.

Es entonces $a = q.b + r$.

Falta ver que $0 < r < b$. Como $r \in A$, r es natural.

Veamos qué $r < b$:

Supongamos que $r \geq b$, entonces $r - b \geq 0$. Además $r = a - q.b$, entonces restando b a ambos miembros y agrupando convenientemente, se tiene $r - b = a - (q+1) . b$, como $q+1 \in \mathbb{Z}$ y además $r - b$ es natural, resulta que $r - b \in A$.

Como $b > 0$, $-b < 0$ y sumando r a ambos miembros de esta desigualdad entonces $r - b < r$, absurdo porque r es el mínimo de A. Por lo tanto $r < b$.

Veamos que q y r son únicos si $0 < r < b$:

Supongamos que existen q y q' enteros y r y r' naturales tales que $0 < r < b$ y $0 < r' < b$ que verifican $a = q.b + r$ y $a = q'.b + r'$.

Igualando, pasando de miembro resulta y factoreando, resulta:

$$b .(q - q') = r' - r.$$

Al ser b > 0, si $q - q' \geq 1$ entonces $b.(q - q') \geq b$ y por lo tanto $r' - r \geq b$, esto es absurdo ya que como $0 < r' < b$ y $r > 0$, entonces $r' - r < b - r < b$.

Análogamente, si $q - q' \leq -1$ entonces $q' - q \geq 1$ como $b > 0$ y por lo tanto

$$b.(q' - q) = r - r' \geq b$$

lo que es absurdo ya que sería $r - r' \geq b$ y como $0 < r < b$ y $r' > 0$ entonces $r - r' < b - r' < b$.

Por lo tanto $q - q' = 0$ y entonces $q = q'$ y en consecuencia $r' - r = 0$ por tanto $r' = r$.

Se tiene entonces que q y r son únicos en las condiciones del teorema.

♦

♦ COROLARIO (***Teorema del algoritmo de la división***) 3.10.15

Dados $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$ existen enteros q y r tales que $a = q.b + r$ con $0 \leq r < |b|$.

Estos enteros q y r son únicos en esas condiciones.

Demostración:

Dado $b \neq 0$, entonces $b > 0 \vee b < 0$.

Para la primera situación como $|b| = b > 0$ es el teorema anterior.

Para el segundo caso, $b < 0$, $|b| = -b > 0$. Luego vale que para a y $-b$, existen únicos q^* y r tales que

$$a = q^* .|b| + r \text{ con } 0 \leq r < |b| \text{ reeplazando}$$
$$a = q^* .(-b) + r = (-q^*).b + r = q.b + r$$
$$\text{llamando } q = -q^*$$

♦

Justifique porqué $b \neq 0$, que inconvenientes habría si b = 0?



EJERCICIO 3.10.16

Hallar el resto y el cociente en los siguientes casos

a) a = 287 y b = 56313

b) a = 287 y b = - 56313

c) a = 1335 y b = 213

d) a = -1335 y b = - 213

e) a = 1335 y b = - 213

f) a = - 1335 y b = 213

EJERCICIO 3.10.17

a) Hallar el dividendo si el cociente es 456 y el resto es 45 y el divisor es 7

b) Hallar el divisor si el cociente es - 5928 y el resto es 45 y el dividendo es 33.

c) Cuáles son los posibles valores del resto si se divide por 13.

d) Cuáles son los posibles valores del resto si se divide por 60.

❖ Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo

Dos conceptos muy importantes y conocidos cuyas aplicaciones son interesantes en todo lo que sigue en el texto.

Dados dos enteros a y b, el entero $\boldsymbol{d}$ **es máximo común divisor de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$** si cumple:

1) $d > 0$

2) $d \mid a \wedge d \mid b$

3) Si $d^* \mid a \quad \wedge \quad d^* \mid b$ entonces $d^* \mid d$

Se anota $d = (a, b)$

• Claramente $d = (a, b) = (b, a)$

EJEMPLO 3.10.18

Si b es un entero no nulo, $(0, b) = |b|$.

Pues $|b| \mid 0$ y además $|b| \mid b$, por ejercicios 3.10.4 y 3.10.5

Además si d^* es tal que $d^* \mid 0$ y $d^* \mid b$ también $d^* \mid |b|$, por los mismos ejercicios.

Por lo cual $|b|$ cumple, 1), 2) y 3) de la definición.

• Observar que si $a = b = 0$, como todo entero divide a 0 si un d cumple 1) y 2) de la definición no necesariamente cumple 3). Por ejemplo, tome $d = 5$, cumple 1) y 2) y $d^* = 8$ cumple el antecedente de 3) pero no su consecuente pues 8 no divide a 5.

Luego **no existe el máximo común divisor entre $a = b = 0$.**

La existencia y unicidad del máximo común divisor la asegura el siguiente teorema para enteros no simultáneamente nulos.

♦ TEOREMA (**Existencia y unicidad del máximo común divisor en** $\mathbb{Z}$) 3.10.19

Dados enteros a y b no simultáneamente nulos, entonces existe d que verifica:

1) $d > 0$
2) $d \mid a \quad \wedge d \mid b$
3) Si $d^* \mid a \quad \wedge \quad d^* \mid b \quad$ entonces $d^* \mid d$
4) Existen m y n enteros tales que $d = m.\, a + n.\, b$
5) d es único

Demostración:

Por el ejercicio 3.10.18 habrá que probarlo para a y b enteros ambos no nulos, ya que si uno solo es 0, por ejemplo $a = 0$ se tiene $|b| = m.\, 0 + 1.\, b$ ó $|b| = m.\, 0 + (-1).\, b$

según sea b positivo o negativo y para cualquier entero m, luego vale 4) y 5).

En esta demostración también haremos uso del principio de buena ordenación para un conjunto conveniente cuyo mínimo verificará lo pedido. Sean a y b enteros ambos no nulos.

Sea $M = \{ h.a + k.b : \text{para todo par de enteros } h \text{ y } k \ \wedge \ h.a + k.b \neq 0 \}$.

El conjunto $M \neq \varnothing$: $|a| + |b| = a + b = 1.a + 1.b$ si $a > 0$ y $b > 0$;

$|a| + |b| = -a + b = (-1).a + 1.b$ si $a < 0$ y $b > 0$;

$|a| + |b| = -a + b = (-1).a + (-1).b$ si $a < 0$ y $b < 0$;

$|a| + |b| = a + (-b) = 1.a + (-1).b$ si $a > 0$ y $b < 0$

Por lo cual $|a|+|b| \in M$. Además $|a|+|b| \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $M \cap \mathbb{N} \neq \varnothing$.

Aplicando el principio de buena ordenación $M \cap \mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo.

Sea d el mínimo de $M \cap \mathbb{N}$.

Por estar d en $M \cap \mathbb{N}$ entonces $d > 0$ y existen enteros m y n tales que $d = m.\, a + n.\, b.$ (*)

Por lo cual ya se tiene probado 1) y 4).

Por ser el mínimo de un conjunto, d es único.

Además si $d^* | a \quad \wedge \quad d^* | b$ entonces $d^* | d$, al ser $d = m.\, a + n.\, b,$ por la propiedad a) del ejercicio 3.10.9. Es así que vale 3).

Falta ver que $d | a \quad \wedge d | b$:

Como $d > 0$, por el teorema del Algoritmo de la División existen únicos q y r tales que

(**) $a = q.\, d + r$ con $0 \leq r < d$.

Veamos qué ocurre si $r \neq 0$:

Despejando r de (**), se tiene $r = a - q.d$ ahora sustituimos usando (*) a d, así resulta usando las propiedades distributiva de la multiplicación en la suma y asociativa

$$r = a - q.\,(m.\, a + n.\, b) = (1\text{-}q.m).\, a + (\text{-}q.\, n).\, b$$

Es así que r es un elemento de $M \cap \mathbb{N}$.

Pero como $r < d.$ esto es absurdo pues d es el mínimo de $M \cap \mathbb{N}$.

Por lo cual debe ser $r = 0$.

Por lo tanto $d | a$.

De igual manera se demuestra que $d | b$ (hágalo!!!) 

Por lo cual ya tenemos probado 2).

♦

La propiedad 4) que da el teorema es de mucha utilidad en diferentes demostraciones.

• Observar que el m y n no son únicos como lo prueba el ejemplo

4 = (4, 8) y 4 = 1. 4 + 0. 8 = -1.4 + 1. 8 = ... (complete Ud.)

EJERCICIO 3.10.20

a) Sean a y b no simultáneamente nulos tales que $a \mid b$. Hallar $d = (a,b)$

b) Sea p un número primo y a un entero, ¿cuáles son los posibles valores de (p, a) ?

c) Sean p y q números primos, ¿cuáles son los posibles valores de (p, q)?

d) Demostrar que para todo entero a, vale que $(a, 1) = 1$

e) Demostrar que para todo par de enteros a y b no simultáneamente nulos, vale que $(a, b) = (a, -b) = (-a, b)$

Este ejercicio, parte e) permite trabajar con positivos en lo relativo al cálculo del máximo común divisor

Por propiedades anteriores 1 es divisor de todo entero, por lo tanto al menos 1 está dentro de los divisores positivos comunes a cualquier par de enteros.

Dos enteros a y b son **coprimos** o **primos entre sí**, si $(a, b) = 1$



Una de las tesis del teorema de existencia y unicidad del máximo común divisor entre enteros no simultáneamente nulos a y b es que se puede escribir $d = (a, b) = m.\, a + n.\, b$ para algún par de enteros m y n no necesariamente únicos como se hizo notar en un ejemplo.

¿Es cierto que si un entero $h = m.\, a + n.\, b$, con $h > 0$, es h el máximo común divisor entre a y b?

Se habrá dado cuenta que no es así, salvo que sea la menor combinación entera positiva entre a y b.

Ya que por ejemplo 2.3 + 5.6 = 36 y sin embargo $36 \neq (2,5)$.

Para el caso que a y b sean coprimos vale. Es decir:

♦ PROPOSICIÓN 3.10.21

$$a, b \in \mathbb{Z}, \quad 1 = m.a + n.b \quad \text{para } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \quad \text{si y sólo si} \quad (a,b) = 1$$

Demostración:

Si $(a, b) = 1$ por el teorema 3.10.19 vale que $1 = m.\, a + n.\, b$ con m y n enteros.

Veamos la recíproca:

Esto significa que se tiene por hipótesis $1 = m.\ a + n.\ b$, con m y n enteros. Hay que probar que $d = (a, b) = 1$.

Como $1 = m.\ a + n.\ b$, claramente a y b no son simultáneamente nulos (justifique), por lo cual existe $d = (a, b)$.

Por la definición de d, d divide a a y d divide a b, entonces se tiene que

$a = d.q$ y $b = d.k$ para q, k enteros y reemplazando

$1 = m.d.q + n.d.k = d.(m.q + n.k)$ como $m.q + n.k \in \mathbb{Z}$ por ser cerrada la suma y el producto en los enteros. Por lo tanto d divide a 1.

Como d es positivo y divide a 1, entonces $d = 1$.

♦

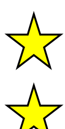
EJERCICIO 3.10.22

a) Sea $d = (a, b)$, con a y b números enteros, $a = d.A$ $b = d.B$ para A y B enteros

Probar que $(A, B) = 1$

b) Para a entero $(a, a - 1) = 1$

Ya se ha visto en algunos ejercicios cual es el máximo común divisor en algunos casos particulares. Si los números a y b no son "muy grandes" se pude escribir en cada caso el conjunto de sus divisores positivos y elegir de la intersección de ambos conjuntos el mayor. Si los números son algo grandes ese método no es práctico. Pero se tiene la propiedad siguiente que permite ir achicando los números:



♦ PROPIEDAD 3.10.23

Si $b \neq 0$ entonces $(a, b) = (b, r)$ donde $a = q.b + r$ y $0 \leq r < |b|$

Es decir el máximo común divisor entre a y b coincide con el máximo común divisor entre b y el resto de la división de a por b.

Demostración:

Sea $d_1 = (a, b)$ y sea $d_2 = (b, r)$. Ambos existen pues $b \neq 0$.

Se quiere probar que coinciden.

Se usará la siguiente técnica: se probará que se dividen mutuamente y por ser naturales no nulos son iguales.

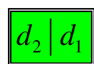
Como $d_1 \mid a$ y $d_1 \mid b$, por definicion, luego por propiedad anterior $d_1 \mid a - q.b$ que es una combinación entera entre a y b. Y precisamente es $r = a - q.\, b$ por la hipótesis.

Luego, se tiene: $d_1 \mid b \;\wedge\; d_1 \mid r$ y por propiedad 3 del máximo común divisor entre b y r:

$$d_1 \mid d_2$$

Como $d_2 \mid b$ y $d_2 \mid r$, por definicion, luego por propiedad anterior $d_2 \mid q.b + r$ que es una combinación entera entre b y r. Precisamente es $a = q.\, b + r$ por la hipótesis.

Luego, se tiene: $d_2 \mid a \;\wedge\; d_2 \mid b$ y por propiedad 3 del máximo común divisor entre a y b:



$$d_2 \mid d_1$$

Por lo tanto, como son enteros positivos: $d_1 = d_2$

♦

➢ ***ALGORITMO DE EUCLIDES* 3.10.24*:* método para calcular $d = (a, b)$**

> **Algoritmo**: es una cadena de operaciones a seguir con precisión a partir de datos iniciales para llegar al resultado esperado en un número finito de pasos.
> El algoritmo descripto está en el libro VII de los *Elementos*. La palabra **algoritmo** fue de uso posterior a Euclides.

El objetivo es calcular $d = (a, b)$.

Si a y b son ambos no nulos y grandes es complicado.

Por propiedades anteriores:

$$(a, b) = (b, a) = (a, -b) = (-a, b)$$

- Podemos considerar $a > 0$ y $b > 0$

Por la propiedad anterior:

Si $b \neq 0$ entonces $(a, b) = (b, r)$, donde $a = q.b + r$ y $0 \le r < |b|$

> Para achicar los números, cuál es conveniente pensar como a ???
> (¿Qué ocurre si toma como a al menor entre a y b? Pierde tiempo. Justifique)



✳ Como $(a, b) = (b, r)$ si $r = 0$ (es decir, b divide a a) se terminó el cálculo, $d = |b|$

✳ Cómo se sigue si $r \neq 0$?

Es conveniente un cambio de nomenclatura que será muy provechoso:

$$a = q.b + r \quad \text{con } 0 \leq r < b$$
$$q = q_0 \quad r = r_0$$

Por lo cual:

$$a = q_0.b + r_0 \qquad \boxed{(a,b) = (b,r) = (b,r_0)}$$

La idea es ir aplicando reiteradamente mientras sea necesario la propiedad anterior.

Como $r_0 \neq 0$, para calcular (b, r_0) se recurre a la propiedad anterior.

Se divide b por r_0 y se tiene $b = q_1.r_0 + r_1$ con $0 \leq r_1 < r_0$

$$\boxed{(a,b) = (b,r_0) = (r_0, r_1)}$$

Si $r_1 = 0$, terminamos...

$$\boxed{(a,b) = (b,r_0) = (r_0, r_1) = (r_0, 0) = r_0}$$

Si $r_1 \neq 0$, para calcular (r_0, r_1) nuevamente se recurre a la propiedad anterior.

Se divide r_0 por r_1 y se tiene $r_0 = q_2.r_1 + r_2$ con $0 \leq r_2 < r_1$

$$\boxed{(a,b) = (b,r_0) = (r_0, r_1) = (r_1, r_2)}$$

Si $r_2 = 0$, terminamos...

$$\boxed{(a,b) = (b,r_0) = (r_0, r_1) = (r_1, r_2) = (r_1, 0) = r_1}$$

Si $r_2 \neq 0$, para calcular (r_1, r_2) nuevamente se recurre a la propiedad anterior.

Se divide r_1 por r_2 y se tiene $r_1 = q_3.r_2 + r_3$ con $0 \leq r_3 < r_2$

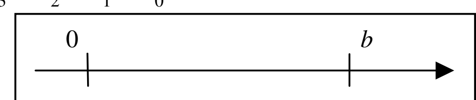
$$\boxed{(a,b) = (b,r_0) = (r_0, r_1) = (r_1, r_2) = (r_2, r_3)}$$

Si $r_3 = 0$, terminamos...

$$\boxed{(a,b) = (b,r_0) = (r_0, r_1) = (r_1, r_2) = (r_2, r_3) = (r_2, 0) = r_2}$$

Si $r_3 \neq 0$.........Terminará????

Observar la sucesión de los restos: $0 \leq r_3 < r_2 < r_1 < r_0 < b$



Entre 0 y b hay un número finito de restos posibles, al cabo de a lo sumo b pasos se tendrá resto 0. Sea entonces n tal que $r_{n+1} = 0$.

En el paso anterior se ha realizado la división de

$$r_{n-1} \text{ por } r_n \text{ y se tiene } r_{n-1} = q_{n+1}.r_n + r_{n+1} \text{ con } 0 \leq r_{n+1} < r_n$$
$$\text{como } r_{n+1} = 0, \text{ resulta } r_{n-1} = q_{n+1}.r_n$$

Por fin!!!

Entonces si $r_{n+1} = 0,$ terminamos...

$$(a,b) = (b,r_0) = (r_0,r_1) = (r_1,r_2) = (r_2,r_3) = \cdots = (r_n,0) = r_n$$

Es decir el máximo común divisor entre a y b es el último resto no nulo, de las sucesivas divisiones.

EJEMPLO 3.10.25

Hallar el (-1348, 3457)

Por propiedades anteriores es equivalente a calcular (1348, 3457). Como se aplicará el algoritmo de Euclides, considerar para el papel de a 3457 y para el de b 1348.

Se divide a por b, se halla cociente y resto, se efectúan sucesivas divisiones hasta obtener resto 0:

3457 = 2. 1348 + 761 $r_0 = 761$

(-1348, 3457) = (1348, 3457) = (3457, 1348) = (1348, 761)

divide 1348 por $r_0 = 761$

1348 = 1. 761 + 587 $r_1 = 587$

(-1348, 3457) = (1348, 3457) = (3457, 1348) = (1348, 761) = (761, 587)

divide 761 por $r_1 = 587$

761 = 1. 587 + 174 $r_2 = 174$

(-1348, 3457) = (1348, 3457) = (3457, 1348) = (1348, 761) = (761, 587) = (587, 174)

divide 587 por $r_2 = 174$

587 = 3. 174 + 65 $r_3 = 65$

(-1348, 3457) = (1348, 3457) = (3457, 1348) = = (1348, 761) = (761, 587) = (587, 174)= (174, 65)

divide 174 por $r_3 = 65$

174 = 2. 65 + 44 $r_4 = 44$

divide 65 por $r_4 = 44$

(-1348, 3457) = (1348, 3457) = (3457, 1348) =
(1348, 761) = (761, 587) = (587, 174) = (174, 65) =
= (65, 44)

65 = 1. 44 + 21 $r_5 = 21$

divide 44 por $r_5 = 21$

(-1348, 3457) = (1348, 3457) = (3457, 1348) =
= (1348, 761) = (761, 587) = (587, 174)= (174, 65)=
= (65, 44) = (44, 21)

44 = 2. 21 + 2 $r_6 = 2$

divide 21 por $r_6 = 2$

(-1348, 3457) = (1348, 3457) = (3457, 1348) =
= (1348, 761) = (761, 587) = (587, 174)= (174, 65)=
= (65, 44) = (44, 21) = (21, 2)

21 = 10. 2 + 1 $r_7 = 1$ Cuál será el siguiente resto???

$r_8 = 0$ JUSTIFIQUE.

(-1348, 3457) = (1348, 3457) = (3457, 1348) = (1348, 761) = (761, 587) =(587, 174) =
= (174, 65) = (65, 44) = (44, 21) = (21, 2) = (2, 1) = (1, 0) = 1

Los números -1348 y 3457 son coprimos.

Un método efectivo para expresar el máximo común divisor entre los números como combinación entera de ellos, como lo asegura el teorema de existencia y unicidad:

"*Suba por los restos" de las sucesivas divisiones efectuadas siguiendo la regla del algoritmo.*



21 = 10. 2 + 1 de acá se despeja 1 = 21 - 10. 2 (1)

44 = 2. 21 + 2 de acá se despeja 2 = 44 - 2. 21 (2) se reemplaza en (1)

65 = 1. 44 + 21 de acá se despeja 21= 65 - 1. 44 (3) se reemplaza en (2)

174 = 2. 65 + 44 de acá se despeja 44= 174 - 2. 65 (4) reemplaza en (3)

587 = 3. 174 + 65 de acá se despeja 65 = 587 - 3.174 (5) reemplaza en (4)

761 = 1. 587 + 174 de acá se despeja 174 = 587 - 3.174 (6) reemplaza en (5)

1348 = 1. 761 + 587 se despeja 587 = 1348 - 3.761 (7) se reemplaza en (6)

3457 = 2. 1348 + 761 se despeja 761 = 3457 - 2.1348 y se reemplaza en (7)

Luego de efectuar los reemplazos (hágalo...) quedará 1 = m. (-1348) + n. 3457 para un m y n convenientes.

EJERCICIO 3.10.26

Hallar el máximo común divisor entre los siguientes números:

a) 5985 y 2520

b) -5985 y 2520

d) 12665 y 55980

e) 2346 y 56901

EJERCICIO 3.10.27

Sean a, b y c números enteros.

a) Demostrar que si $a \mid b.c \ \wedge (a,b) = 1$ entonces $a \mid c$

b) Demostrar que si p es primo y $p \mid a.b$ entonces $p \mid a \vee p \mid b$

c) Si en b) saca la hipótesis de primo, qué ocurre?

d) Demostrar que si $a \mid c \ \wedge \ b \mid c \ \wedge (a,b) = 1$ entonces $a.b \mid c$

e) Si en d) saca la hipótesis (a, b) = 1, qué ocurre??

f) Demostrar que si t es un entero, $t \mid a \ \wedge \ t \mid b \ \wedge \ (a,b) = 1$ entonces $t = 1 \vee t = -1$

g) Demostrar que (a, (b, c)) = ((a, b), c).

Otras ayuditas:

Se hará a).

Como $a \mid b.c$ existe $h \in \mathbb{Z}$ tal que $b. c = a. h$ (1)

Además por propiedad del máximo común divisor: 1 = $k. a + s. b$, (2) para enteros k y s.

Multiplicamos (2) por c a ambos miembros:

$$1. c = (k. a + s. b) . c = k. a. c + s. b . c$$

Reemplazando por (1) y por propiedades de la multiplicación y la suma de enteros:

$$c = k. a. c + s. a.h = a. (k. c + s. h)$$

como $k. c + s. h$ es un número entero, por lo tanto a divide a c.

Se hará b):

Siendo p un número primo por ejercicio 3.10.20 para todo a entero vale que

$p \mid a$ o $(a, p) = 1$

Como $p \mid a.b$, si $p \nmid a$ vale que $(a, p) = 1$ y por a) se tiene que $p \mid b$.

Para d) haga algo parecido a como se resolvió a).



Diofanto de Alejandría (aprox. 250 d.C.) Fue uno de los "padres del álgebra" al introducir notación simbólica para las expresiones algebraicas. Su obra la *Aritmética* fue de 13 libros, tiene soluciones a distintos problemas algebraicos. Precursor de la teoría de números.

➢Ecuaciones diofánticas (lineales)

Una ecuación de la forma: $a.x + b.y = c$ con $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$ y $c \in \mathbb{Z}$ es una ***ecuación diofántica*** de la cual se buscan las soluciones enteras para x e y.

Es interesante cuando tanto a como b son no nulos. Así los consideraremos.

Como x e y están a la primera potencia, es por eso que se llama lineal.

Una ***solución*** de la ecuación es un par de enteros (x_0, y_0) de modo que $a.x_0 + b.y_0 = c$

♦ PROPOSICION 3.10.28

$a.x + b.y = c$ con $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$ y $c \in \mathbb{Z}$ tiene solución si y sólo si $d \mid c$ siendo $d = (a,b)$

Demostración:

Mostraremos que si $a\,x + b\,y = c$ tiene solución entonces $d \mid c$. Sea la solución (x*, y*).

Por ser d el máximo común divisor entre a y b sabemos que $d \mid a$ y $d \mid b$, entonces existen m y n enteros tales que $a = d.\,m$ y $b = d.\,n$ (1)

Reemplazando (1) en la expresión $a\,x^* + b\,y^* = c$, se tiene que $d.m\,x^* + d.n\,y^* = c$ entonces usando propiedades de las operaciones de los números enteros ya que x^* e y^* son enteros

$d.\,(m\,x^* + n\,y^*) = c$ y como $m\,x^* + n\,y^*$ es un número entero por ser suma y producto de enteros, tenemos que $d \mid c$.

Mostraremos ahora que si $d \mid c$ entonces $a\,x + b\,y = c$ tiene solución.

Por el Teorema de existencia y unicidad del máximo común divisor, sabemos que existen enteros m y n tales que $d = a.\,m + b.\,n$ (1)

y como $d \mid c$ por hipótesis, existe k entero tal que $c = d.\,k$ (2)

Multiplicando por k a ambos miembros de (1) tenemos que

$d.\,k = (a.\,m + b.\,n).\,k = a\,.m.\,k + b.\,n.\,k$, por lo tanto por (2)

$c = a\,.m.\,k + b.\,n.\,k$

Siendo $m.\,k$ y $n.\,k$ enteros, por lo tanto llamando $x_0 = n.\,k$ y $y_0 = m.\,k$ tenemos que existen x_0 e y_0 tales que es solución de $a\,x + b\,y = c$

♦

♦ PROPOSICION 3.10. 29

Si $a.x + b.y = c$ con $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$ y $c \in \mathbb{Z}$ tiene solución entonces tiene infinitas soluciones.

Demostración:

Sea x_0, y_0 solución de $a.x + b.y = c$

Si hubiera otra solución x_1, y_1, se cumple que $a.x_0 + b.y_0 = c = a.x_1 + b.y_1$, trabajando con la igualdad y usando propiedades de las operaciones se tiene

$$a.(x_0 - x_1) = b.(y_1 - y_0) \quad (1)$$

Sea $d = (a, b)$ entonces $a = d.\,A$ y $b = d.\,B$, con A y B enteros coprimos (por un ejercicio anterior), y reemplazando en (1) resulta

$$d.A.(x_0 - x_1) = d.B.(y_1 - y_0) \quad (2)$$

Tenemos por ser d no nulo y $\mathbb{Z}$ anillo de integridad, que $A.(x_0 - x_1) = B.(y_1 - y_0)$.

Esto dice que $A \mid B.(y_1 - y_0)$, pero como $(A,B)= 1$, $A \mid (y_1 - y_0)$, entonces

$(y_1 - y_0) = A.k$ con k entero. (3)

Por otro lado $B \mid A(x_0 - x_1)$ pero como $(A,B)= 1$, $B \mid (x_0 - x_1)$, entonces

$(x_0 - x_1) = B.w$ con w entero. (4)

Tenemos entonces que (2) resulta:

$d.A.B.w = d.B.A.k$ por lo tanto $k = w$, pues $d.A.B = d.B.A$ y es no nulo.

Por lo tanto de (3) y (4) se tienen $y_1 = y_0 + A.k \qquad x_1 = x_0 - B.k$ (5)

Veamos para qué valores de k obtenemos una nueva solución:

Como $a.x_1 + b.y_1 = c$ reemplazando por (5)

$a.(x_0 - B.k) + b.(y_0 + A.k) = c$ entonces $a.x_0 - a.B.k + b.y_0 + b.A.k = c$ y como $a.x_0 + b.y_0 = c$, haciendo cuentas se tiene que $-a.Bk + b.Ak = 0$.

Entonces $a.B.k = b.A.k$ y como $a = d.A$ y $b = d.B$ se tiene que

$d.A.B.k = d.B.A.k$, y esto vale para todo valor entero de k, pues $d.A.B \neq 0$.

En consecuencia, si x_0, y_0 es solución de $a.x + b.y = c$ hay infinitas soluciones x_1, y_1 dadas por $y_1 = y_0 + A.k$ $x_1 = x_0 - B.k$ para cualquier valor entero de k

♦

EJERCICIO 3.10.30

Halle soluciones para las siguientes ecuaciones

a) $3x + 4y = 17$

b) $5x - 65y = 25$

c) $9x + 48y = 81$

d) $6x + 4y = 17$

Dados dos enteros a y b, el entero m **es mínimo común múltiplo de a y b** si cumple

1) $m > 0$

2) $a | m \wedge b | m$

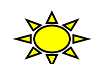
3) Si $a | m^* \wedge b | m^*$ entonces $m | m^*$

Se anota $m = [a, b]$

Claramente $[a, b] = [b, a]$

Existe un Teorema análogo al de la existencia del máximo común divisor que garantiza la existencia y unicidad del mínimo común múltiplo entre dos enteros no simultáneamente nulos.

Para el caso que $a = 0$ ó $b = 0$ se define $m = 0$.



EJERCICIO 3.10.31

Probar que si a y b son enteros no simultáneamente nulos $[a,b] = \dfrac{|a.b|}{(a,b)}$.

Para determinar $[a, b]$ se puede usar el algoritmo de Euclides para hallar (a, b) y usar la igualdad anterior.

EJERCICIO 3.10.32

a) Justificar que $[a, b] = [-a, b] = [a, -b]$ para todo par de enteros a y b.

b) Si los enteros a y b son coprimos, cuánto vale $[a, b]$?

c) Dados los números enteros a, b y c probar que vale $[a, [b, c]] = [[a, b], c]$

EJEMPLO 3.10.33

Hallar el mínimo común múltiplo entre 348 y 144.

Se halla (348, 144) =12 (compruebe...)

Luego [348, 144] = $\dfrac{348.144}{12}$ = 4176

EJERCICIO 3.10.34

Hallar [-5348, 8932]

EJERCICIO 3.10.35

a) Sean a = 3467 y $[a, b]$ = 991562. Determinar b sabiendo que es coprimo con a.

b) Sean $[a, b]$ = 5148, (a, b) = 6. Determinar a y b.

➢"El" Teorema: Teorema Fundamental de la Aritmética

Este resultado da la descomposición única en factores primos de todos los enteros no nulos y no unitarios, permite caracterizar a esos números y por defecto da un método para buscar irracionales (los que no son cociente de enteros). Esas aplicaciones son las que se verán en algunos ejercicios. Las propiedades de los números primos son tan estudiadas (además de por la curiosidad natural de los matemáticos de todas las épocas) pues los enteros se descomponen de manera única en función de ellos.

Ya ha demostrado que si p es primo $p \mid a.b$ entonces $p \mid a \vee p \mid b$,

Esta propiedad se puede generalizar a:

♦ PROPIEDAD 3.10.36

Si *p* es primo y $p \mid \prod_{i=1}^{n} a_i$ entonces $(\exists i)\ (1 \leq i \leq n \ \wedge \ p \mid a_i)$, es decir,

si un primo p divide a un producto, entonces p divide a alguno de los factores.

La demostración de esta propiedad queda como ejercicio (usar inducción).

♦ TEOREMA: **Teorema Fundamental de la Aritmética 3.10.37**

Todo entero no nulo y distinto de 1 y de -1 es producto finito de números primos y esa factorización es única salvo el orden.

(Esto significa que un número entero como producto de números primos tiene los mismos factores salvo que se ubiquen en distinto orden en esa multiplicación)

Demostración (idea, Ud. la completa):

- Observar que basta probarlo para los naturales y luego justificarlo para los enteros menores que -1.
- Como ejemplo de aplicación del Segundo principio de inducción se demostró que todo natural $m \neq 0$ y de 1, es producto finito de números primos.

$m = p_1.p_2.....p_n$
con los p_i primos, para $1 \leq i \leq n$

- También usaremos el Segundo principio para probar la parte de la unicidad de la factorización.

Si $m = 2$ vale que se expresa de manera única.

Aceptamos que vale para todo entero menor que m y mayor o igual que 2, que se expresa de manera única como producto de primos salvo el orden.

Supongamos que $m = p_1.p_2.....p_k = q_1.q_2.....q_h$ (1) ☆

con factores primos p_i para $1 \leq i \leq k$ y factores primos q_j para $1 \leq j \leq h$.

Lo que se quiere probar: que los factores de ambos miembros de (1) son los mismos y que el número de factores también es igual.

Claramente $p_1 \mid m = q_1.q_2......q_h$ Por la propiedad 3.10.36, existe un factor q_t para un t con $1 \leq t \leq h$ tal que $p_1 \mid q_t$ y como es primo $p_1 = q_t$ Justifique!

Por lo tanto se pude cancelar ambos miembros de la igualdad (1) por $p_1 = q_t$, quedando entonces $\boxed{p_2.....p_k = q_1.q_2....q_h}$

En el 2do.miembro falta el factor $p_1 = q_t$

Cada miembro es menor que m. (Justifique!).
Concluya Ud. solo la demostración....

♦

Veamos un ejemplo elemental, es claro que el número 24 = 2. 3. 2. 2 = 3. 2. 2 .2 = ?? .
Los primos que están en la descomposición de 24 son 2 y 3.
El 2 está tres veces, por lo cual podemos escribir: $24 = 2^3.3 = 3.2^3$

> Se acostumbra a escribir la descomposición de un número en factores primos escribiendo los primos en orden creciente. (Se tienen en la Criba de Eratóstenes)

Si el número entero es negativo por ejemplo -336, se realiza la descomposición de 336 y luego antepone el signo - .
Para hacer la descomposición ⇨

$-336 = -2^4.3.7$

336	2
168	2
84	2
42	2
21	3
7	7
1	

EJEMPLO 3.10.38 (*reflexión acerca de la factorización)*
Pensemos en positivo y positivos.

Sea a un entero, por tanto $a = p_1^{h_1}.p_2^{h_2}.....p_n^{h_n}$ esto significa que hay n primos en la factorización de a y que cada uno de ellos se lo eleva a la potencia h_j si es que el j-ésimo primo se repite h_j veces en la factorización de a.

Mirar el ejemplo anterior: $336 = 2^4.3.7 = 2^4.3^1.7^1$
Los exponentes que se han puesto en la descomposición del 336 son 4 para el 2, 1 para el 3 y 1 para el 7. Se estará de acuerdo con que también $336 = 2^4.3^1.5^0.7^1$ más aún se podría poner que

$$336 = 2^4.3^1.5^0.7^1 = 2^4.3^1.5^0.7^1.11^0.13^0 = 2^4.3^1.5^0.7^1.11^0.13^0.17^0.?.?$$

> Para el 336:
> 4 para el primo 2
>
> 1 para el primo 3
>
> 1 para el primo 7
>
> 0 para cualquier otro primo

El Teorema Fundamental de la Aritmética nos permite asegurar que para cada entero a hay sólo un número finito de primos que lo factoriza, por lo cual hay sólo un número finito de exponentes no nulos que se corresponden con los primos que "realmente" están en la factorización de a. Además esos exponentes son números naturales y únicos.
Recordemos que hay infinitos primos.

Dado el número entero no nulo a, para cada primo *p* se define

$v_p(a)$ **= el exponente del primo *p* en la factorización de a.**

Resulta $v_p(a) \geq 0$:

$v_p(a)$ **=** 0 si *p* no está en la factorización de a.

$v_p(a) > 0$ para un número finito de primos *p* de los infinitos que existen.

Con estas definiciones podemos expresar todo entero $a = \prod_{p \text{ primo}} p^{v_p(a)}$

Se pueden pensar los primos positivos, si el número a es negativo se coloca el signo adelante.

En esta productoria (infinita) hay un número infinito de factores 1
(no molestan, dan 1)
Esa representación aún vale para el 1 y -1. ¿Porqué???

Se conviene que el producto de infinitos factores 1 es 1.

Observación:

$v_p(a)$ es la mayor potencia del primo p que divide a a (a no nulo).

Para $a \neq 0$, si $p^h \mid a$ entonces $h \leq v_p(a)$

EJERCICIO 3.10.39

Calcular para los números 345, 78973, -1237 los valores $v_p(a)$ para los 9 primeros números primos positivos, para a respectivamente igual a c/u de esos números.

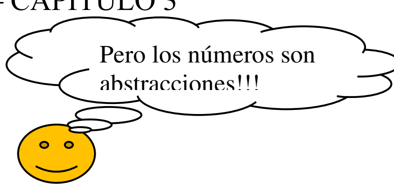
EJEMPLO 3.10.40 (*reflexión a cerca de la divisibilidad)*

¿Por qué a **divide a** b?

$a \mid b$ si y sólo si $(\exists c)(c \in \mathbb{Z} \wedge a.c = b)$

Sigamos pensando en positivo y positivos.

Veamos un ejemplo para ver algo concreto….



Sean los números a = 12 = 2^2 . 3= 2^2. 3^1 y b= $336 = 2^4.3.7 = 2^4.3^1.7^1$.

Claramente 12 divide a 336. ¿Porqué es tan claro que existe c entero tal que 12. c = 336?

12. c = (2^2 . 3) . (2^2 . 7) = 336.

$$12 = 2^2 . 3 = \prod_{p \text{ primo}} p^{v_p(12)} = 2^{v_2(12)}.3^{v_3(12)}.5^{v_5(12)}.7^{v_7(12)}.11^{v_{11}(12)}....$$

con infinitos factores 1.

$$336 = 2^4.3^1.7^1 == \prod_{p \text{ primo}} p^{v_p(336)} = 2^{v_2(336)}.3^{v_3(336)}.5^{v_5(336)}.7^{v_7(336)}.11^{v_{11}(336)}....$$

con infinitos factores 1.

Porque el 12 divide a 336: porque "la factorización del 12 está dentro de la factorización de 336".

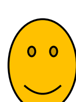
Lo que le sobra a 336 respecto de 12 en esa factorización es el entero c.

Se pudo evaluar c porque para todo primo p es $v_p(12) \le v_p(336)$.

Con las herramientas de 3.10.38, en general se tiene que

$$a = \prod_{p \text{ primo}} p^{v_p(a)}, \qquad b = \prod_{p \text{ primo}} p^{v_p(b)},$$

Si a divide a b, se tiene: para todo primo p, $v_p(a) \le v_p(b)$. De acuerdo??.



EJERCICIO 3.10.41

Probar que: $v_p(m.n) = v_p(m) + v_p(n)$ para enteros no nulos m y n.

Verifique lo anterior para enteros concretos. Es decir, mírelo en ejemplos.

EJEMPLO 3.10.42

Contemos divisores de un número.

$$45 = 3^2.5^1 = \prod_p p^{v_p(45)} \; ; p \text{ primo}$$

Los divisores positivos de 45 se pueden pensar que se obtienen a partir de las potencias de los primos que lo dividen:

$$3^h \mid 45 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le h \le v_3(45) = 2$$

Por lo tanto el primo 3 aporta como divisores positivos de 45: $3^0, \quad 3^1, \quad 3^2$.

Es decir tres divisores ($v_3(45)+1=2+1$)

$$5^h \mid 45 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le h \le v_5(45)=1$$

Por lo tanto el primo 5 aporta como divisores positivos de 45: $5^0, \quad 5^1$.

El 5 aporta dos divisores ($v_5(45)+1=1+1$).

Cada divisor determinado por el primo 3, al multiplicarlo por un divisor determinado por el 5 da un divisor del 45:

$$3^0 \Rightarrow \begin{cases} 3^0.5^0 = 1 \\ 3^0.5^1 = 5 \end{cases}$$

$$3^1 \Rightarrow \begin{cases} 3^1.5^0 = 3 \\ 3^1.5^1 = 15 \end{cases}$$

$$3^2 \Rightarrow \begin{cases} 3^2.5^0 = 9 \\ 3^2.5^1 = 45 \end{cases}$$

por lo cual el número es 3 .2 = $(v_3(45)+1).(v_5(45)+1)$ = 6

Calcule cuántos divisores enteros.

EJERCICIO 3.10.43

a) Calcule el número de divisores positivos de 3458, de 134890345
b) Calcule el número de divisores de 3458, de 134890345
c) Calcule el número de divisores positivos de - 3458, de -134890345

EJERCICIO 3.10.44

a) Calcule el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor entre 24 y -36.
   Use el método que aprendió en su infancia o el algoritmo de Euclides.

b) Idem para los números 456 y 333.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$24 = 2^3.3 \quad 36 = 2^2.3^2$$

EJERCICIO 3.10.45

Demostrar que para todo par de enteros no nulos a y b vale que

a) $d = (a,b) = \prod_{p \text{ primo}} p^{m_p}$ siendo $m_p = \text{min imo}\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$

b) $m = [a,b] = \prod_{p \text{ primo}} p^{s_p}$ siendo $s_p = \text{max imo}\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$

Así lo
aprendí en
el colegio!!

Idea para la demostración: para a) use que d divide tanto a a como a b y las observaciones hechas en 3.10.40;

para b) use el hecho que tanto a como b dividen a m y nuevamente las observaciones.

EJERCICIO 3.10.46

a) Exprese 4! como producto de números primos.

b) Exprese 6! como producto de números primos.

c) Exprese 7! como producto de números primos.

d) Exprese 85! como producto de números primos.

e) Exprese m! como producto de números primos, para m no nulo.

EJEMPLO 3.10.47

Probar que no existen enteros m y n no nulos simultáneamente tales que m^3= 3. n^3

A esta igualdad la llamaremos (1).

Para esto aplicaremos el Teorema Fundamental de la Aritmética.

Sean m y n números enteros.

Observar que para $m = n = 0$, se verifica la igualdad (1).

Supongamos que m es distinto de 0 y que también n es distinto de 0.

Supongamos $m = 1$.

Por lo tanto sustituyendo en (1): 1 = 3. n^3 , como n^3 es un entero esta igualdad significa que 3 es invertible en $\mathbb{Z}$, lo que es absurdo (los únicos invertibles son 1 y -1).

Si suponemos que $m = -1$.

Se tiene que (1) resulta: -1 = 3. n^3 , y por tanto 1= (-3). n^3 y como n^3 es un entero esta igualdad significa que - 3 es invertible en $\mathbb{Z}$, lo que es absurdo.

Por lo tanto m no es 1 ni -1.

Consideremos m natural. Si es m entero negativo, luego multiplicaríamos por -1.

Usando el Teorema Fundamental de la Aritmética, existen finitos primos tales que

$m = p_1^{h_1}.p_2^{h_2}.....p_k^{h_k}$ con $k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \wedge h_k \neq 0$ para algún k..

$m^3 = (p_1^{h_1}.p_2^{h_2}.....p_k^{h_k})^3 = (p_1^{h_1})^3.\left(p_2^{h_2}\right)^3......(p_k^{h_k})^3$.

Supongamos $n = 1$, por lo cual (1) significa: $m^3 = (p_1^{h_1})^3.\left(p_2^{h_2}\right)^3......(p_k^{h_k})^3 = 3.1 = 3$.

Vamos a contar los factores primos de cada miembro de la igualdad.

En el primer miembro hay $3.(h_1+ h_2+ \ldots + h_k)$ factores primos y en el segundo miembro hay 1 solo factor primo.

El Teorema dice que los factores son iguales en número y son iguales dos a dos salvo el orden, por lo tanto $3.(h_1+ h_2+ \ldots + h_k) = 1$. (2)

Pero $h_1+ h_2+ \ldots + h_k$ es un número natural (no nulo), por lo tanto esta igualdad (2) significa que 3 es invertible, lo que ya hemos dicho que es absurdo.

Por lo tanto n no es 1.

Análogamente si n = -1, resulta el absurdo que -3 es invertible.

Por lo cual n no es 1 ni -1.

Consideremos n natural. Si es n entero negativo, luego multiplicaríamos por -1.

Luego por el Teorema Fundamental de la Aritmética, existen finitos primos tales que

$n = q_1^{k_1}.q_2^{k_2}.....q_t^{k_t}$ con $t \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq t \wedge k_t \neq 0$ para algún t.

Veamos qué ocurre si se verifica la igualdad (1):

$$(p_1^{h_1})^3.\left(p_2^{h_2}\right)^3......(p_k^{h_k})^3 = 3.\ (q_1^{k_1})^3.(q_2^{k_2})^3.....(q_t^{k_t})^3$$

El Teorema dice que los factores son iguales en número y son iguales dos a dos salvo el orden, por lo tanto, en el segundo miembro no olvidarse del 3.

$$3.(h_1+ h_2+ \ldots + h_k) = 1 + 3.(k_1+ k_2+ \ldots + k_t) \quad (3)$$

Por lo cual: $3.(h_1+ h_2+ \ldots + h_k) - 3.(k_1+ k_2+ \ldots + k_t) = 1$

$3.[(h_1+ h_2+ \ldots + h_k) - (k_1+ k_2+ \ldots + k_t)] = 1$ (4)

Siendo $(h_1+ h_2+ \ldots + h_k) - (k_1+ k_2+ \ldots + k_t)$ un número entero (4) significa que el número entero 3 es invertible, lo que es absurdo

.

Por lo tanto m y n no pueden factorearse ni ser 1 ó -1.

Por lo cual sólo vale que sea $m = n = 0$

Recordatorio:

Un número es **racional** si pertenece al conjunto

$$\mathbb{Q} = \left\{ a : a = \frac{k}{t} \wedge k \in \mathbb{Z} \wedge t \in \mathbb{N} \wedge t \neq 0 \right\}$$

Un número es **irracional** si es un número real pero no racional.

EJERCICIO 3.10.48

a) Demuestre que $\sqrt{5}$ es un número irracional.

b) Demuestre que $\sqrt{p}$ es un número irracional para cualquier primo *p*.

c) Demuestre que $\sqrt{21}$ es un número irracional.

d) ¿Cómo puede generalizar c)? Justifique su respuesta.

Idea para la solución: para a): Suponga $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$ para $m, n \in \mathbb{Z}$, eleve al cuadrado y vea que se contradice el teorema Fundamental de la Aritmética.
De manera similar a lo realizado en el 3.10.47.

Para las otras partes es análogo.

EJERCICIOS 3.10.49

1) Sean a, b y c números enteros. Probar: Si $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b+c \wedge a|b-c$

2) Sean a, b y c números enteros. Analizar la validez de:

a) Si $a|b+c \Rightarrow a|b \vee a|c$

b) Si $a|b \wedge c|b \Rightarrow ac|b$

3) Sean n y m números naturales. Probar: n es par si y sólo si n^m es par.

4) Si $n \in \mathbb{Z}$, determinar si son o no par los siguientes números: $3n^2 + 1$, $n(n + 1)$, $n^3 - n$.

5) Sean $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Si $a - b = 175$ y la división de a por b tiene cociente 13 y resto 7, Hallar a y b.

6) Hallar el resto de dividir x por 42 en los siguientes casos: ($a \in \mathbb{N}$)

a) $x = a.42 + 86$

b) $x = a.42 - 61$

3) $x = a.42 + 11$

4) $x = a.42 - 10$

7) Sean a y b dos números enteros que tienen restos 5 y 8, respectivamente, en la división por 13. Hallar los restos de la división por 13 de los siguientes enteros:

a) $5a - 4b$

b) $a + b^2$

c) $(26b^2 - 39a^2)^{50}$

8) a) Si a un número se lo divide por 4, el resto es 2 y si se lo divide por 3, su resto es 1. ¿Cuál es el resto si se lo divide por 12?

b) El resto de la división de un número por 7 es 2; si se lo divide por 3, su resto es 1. ¿Cuál es el resto si se lo divide por 21?

9) Probar que si a es número entero

a) $(a, 1) = 1$

b) $(a, a) = |a|$

10) Si p es primo y siendo a entero cualquiera, calcular (a, p).

11) Determinar cuáles de los siguientes enteros son primos: 91, 307, 1001.

12) Calcular (a, b) y expresarlo como combinación lineal entera de a y b, siendo:

a) $a = 47$, $b = 10$

b) $a = 352$, $b = 16$

c) $a = 12001$, $b = -12002$

13) Sean $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$. Calcular:

a) $(a + 1, a)$

b) $(a, a. b + 1)$

14) Calcular $[a, b]$ en los siguientes casos:

a) $a = 1$, $b = 384$

b) $a = 4$, $b = -4$

c) $a = 284$, $b = -13$

15) Encontrar todos los números enteros a y b que verifican simultáneamente:

$(a, b) = 54$

$[a, b] = 810$

16) Sean $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$ y $c \in \mathbb{Z}$, demostrar:

a) Si $(a, b) = 1$ entonces $(a, a + b) = 1$

b) Si $(a, b) = 1$ entonces $(a, b.\, c) = (a, c)$

17) Probar:

a) 29 no es divisor de $7^{30} + 7^{32}$

b) 33 es divisor de $11^{11} + 11^{12}$

18) Probar que hay dos únicos primos pares.

19) Hallar el resto de dividir a por b en los siguientes casos: (usar binomio de Newton).

a) $a = 438 + 1$, $b = 3$

b) $a = 4^{1010101}$, $b = 5$

c) $a = 9^{32}$, $b = 7$

d) $a = 6^{55} + 1$, $b = 7$

20) ¿Son primos los siguientes números? Justifique su respuesta.

a) $46^{104} - 1$

b) $1000^{501} - 4$

21) Si m y n son enteros de igual paridad, probar que $m^2 - n^2$ es múltiplo de 4.

22) Si r y q son impares, probar que $r^3 - q^3$ es par, pero no múltiplo de 4.

23) Demostrar que no existen enteros m y n no nulos tales que $m^2 = 2 \,.\, n^2$

24) i)¿Cuál es el menor entero positivo que admite exactamente 6 divisores?

ii) Hallar $m \in \mathbb{N}$ con exactamente 10 divisores.

iii) Hallar $m \in \mathbb{N}$ con exactamente 25 divisores POSITIVOS y solo uno de ellos primo.

25) Hallar el menor entero positivo q tal que 6552 q es un cuadrado.

26) Determinar el conjunto de soluciones enteras de las siguientes ecuaciones:

a) $5x + 8y = 3$

b) $24x + 14y = 7$

c) $20x + 16y = 36$

CAPITULO 4
Relaciones y funciones. Operaciones

1. Introducción

Al igual que en capítulos anteriores, vamos a seguir trabajando con algunas situaciones que se presentan en la vida diaria y en situaciones más formales. La idea es mirar algunos ejemplos y luego abstraer de ellos algunos aspectos que permitan generalizar esas situaciones, para luego según sea el caso particular volver a usar las definiciones generales. Este es el camino constante del trabajo matemático.

Para el desarrollo de este tema, **relaciones*,*** tendrá aplicación todo lo visto y algo más.
Comenzamos, como se dijo, con ejemplos.

EJEMPLO 4.1. 1
A cada ciudadano de la República Argentina le corresponde un D.N.I. que le asigna un número de matrícula.
A cada butaca de los cines le corresponde un par de números (uno por fila y otro por butaca de esa fila).
A cada asiento de los aviones un par de elementos: un número de fila y una letra para cada butaca de esa fila.
A cada auto se le asigna una patente distinta de tres letras y tres números.

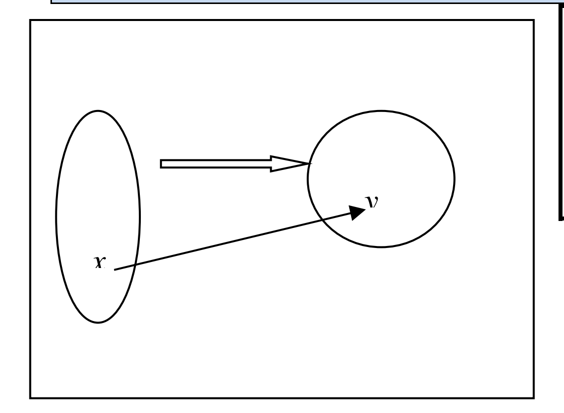
Hay otro tipo de asignaciones que son menos exigentes, cuando no se requiere una identificación.

EJEMPLO 4.1.2
Asignar:
1. A cada persona el número de hijos.
2. A cada persona en un momento de su vida su edad.
3. A cada persona en un momento de su vida su peso.

Está claro que puede haber personas distintas con igual número de hijos, edad o peso.

➢ **¿Qué tienen en común ambos ejemplos**?

A los elementos de un conjunto le asignamos elementos de otro conjunto.



Una manera usual de visualizar estas asignaciones es por medio de un **diagrama de flechas**. La flecha tiene origen en un elemento de un conjunto y final en el elemento que le es asignado en el otro conjunto.

EJEMPLO 4. 1. 3

Asignar a cada escritor el número de los libros que ha escrito (i)) ;

otra asignación distinta es a cada escritor el título de cada uno de sus libros (ii)) y

otra diferente es a cada escritor el conjunto de libros escritos por él (iii))

Para estos casos podemos representar algunos casos:

i)

Cortázar $\to$ n

Sarmiento $\to$ m

....

Busque estos números, por ejemplo en Wikipedia



ii)

Sarmiento $\to$ Facundo

Sarmiento $\to$ Recuerdos de Provincia

....

Sarmiento $\to$ Viajes

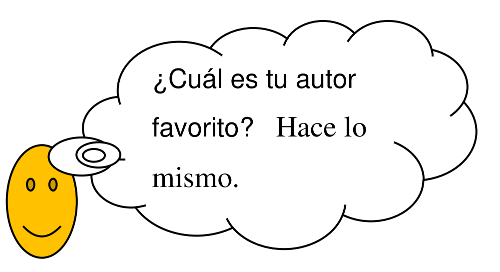
Cortázar $\to$ Rayuela

Cortázar $\to$ Los Premios

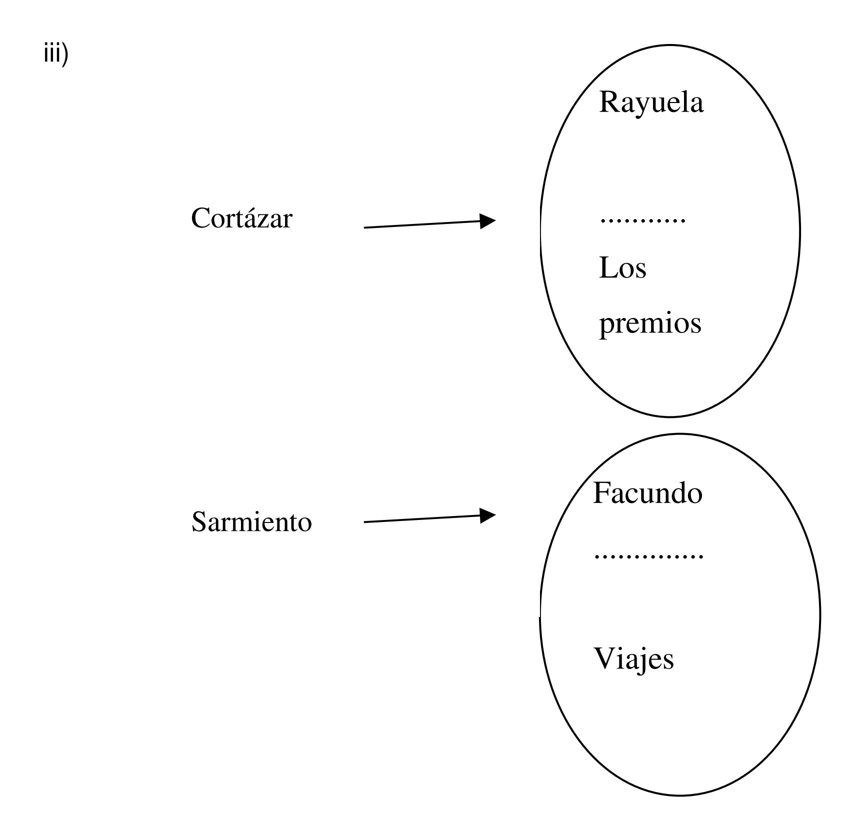
....

Cortázar $\to$ Bestiario

....



iii)



Escriba más ejemplos de estas asignaciones.

EJEMPLO 4. 1. 4

1. A cada persona su padre.
2. A cada persona su padre y su madre.
3. A cada persona su hijo o hija.

Algunos elementos del diagrama de flechas para estas asignaciones:

1.

Abel $\rightarrow$ Adán

Caín $\rightarrow$ Adán

Merceditas $\rightarrow$ José de San Martín

Manuela $\rightarrow$ Juan Manuel de Rosas

Dominguito $\rightarrow$ Domingo F. Sarmiento

2.

Caín $\rightarrow$ Adán, Eva

Abel $\rightarrow$ Adán, Eva

Edipo $\rightarrow$ Laio, Yocasta

Merceditas $\rightarrow$ José de San Martín, Remedios de Escalada

Manuela → Juan Manuel de Rosas, Encarnación Ezcurra

Dominguito → Domingo F. Sarmiento, Benita Martínez

3.

Adán → Abel

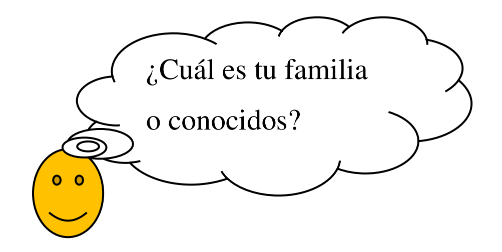
Adán → Caín

Eva → Caín

Eva → Abel

José de San Martín → Merceditas

Remedios de Escalada → Merceditas



Escriba más ejemplos de estas asignaciones.

Otra manera de visualizar estas asignaciones es por medio de **tablas**.

Se fabrica una tabla disponiendo filas y columnas.

Las columnas serán dos:

En la primera "las entradas" y en la segunda "las salidas".

Esto es, en la primera columna un elemento y

en la segunda el elemento que le corresponde por la asignación.

¿Y cuántas filas tendrá?

Tendrá tantas filas como elementos sean los que tienen asignación.

Por ello en casi todos los casos será una representación parcial.

entrada	*salida*
x	y

Para los ejemplos anteriores, pasemos a tabla la asignación. Está claro que en ellos no podremos poner todas las filas, sería algo cansador.

Para el EJEMPLO 4. 1.2, la tabla en el apartado:

3.A cada persona en un momento de su vida su peso.

PERSONA	El PESO a los 13 Años (en kg)
José Pérez	30
María Rucci	42
Pedro Soler	34,5

Ud. ponga algunas filas más……

Las tablas para el 4.1.3: (recuerde de agregar más filas)

(i)

ESCRITOR	**NÚMERO de LIBROS que ha escrito**
Cortázar	N
Sarmiento	M

¿Buscó estos números, por ejemplo en Wikipedia?

(ii)

ESCRITOR	**TITULOS de LIBROS que ha escrito**
Sarmiento	Facundo
Sarmiento	Recuerdos de Provincia
Sarmiento	Viajes
Cortázar	Rayuela
Cortázar	Los Premios
Cortázar	Bestiario

(iii)

ESCRITOR	**CONJUNTO de LIBROS que ha escrito**
Sarmiento	{Facundo, Recuerdos de Provincia, Viajes,...}
Cortázar	{Rayuela, Los Premios, Bestiario, ...}

Para el EJEMPLO 4.1.4. Ud. ponga algunas filas más en cada caso:

1.

Persona	**El Padre (de la persona)**
Abel	Adán
Caín	Adán
Edipo	Laio
Merceditas	José de San Martín
Manuelita	Juan Manuel de Rosas
Dominguito	Domingo F. Sarmiento

2.

Persona	El Padre y la madre (de la persona)
Abel	Adán, Eva
Caín	Adán, Eva
Edipo	Laio, Yocasta
Merceditas	José de San Martín, Remedios de Escalada
Manuelita	Juan Manuel de Rosas, Encarnación Ezcurra
Dominguito	Domingo F. Sarmiento, Benita Martínez

3.

Persona	Hijo o hija (de la persona)
Adán	Abel
Adán	Caín
Eva	Abel
Eva	Caín
Yocasta	Edipo
José de San Martín	Merceditas
Paula Albarracín	Domingo F. Sarmiento

EJERCICIO 4. 1.5

Más asignaciones:

1. A cada club de fútbol los jugadores de su primer equipo.
2. A cada jugador de fútbol su club.
3. A cada número entero sus múltiplos.
4. A cada número entero sus divisores.
5. A cada número natural sus múltiplos.
6. A cada número natural sus divisores.

Para estas asignaciones haga un esquema similar a los dados en los ejemplos anteriores, diagrama de flecha y tabla (para algunos casos....).

- Todas las asignaciones tienen en común lo siguiente: **relacionan objetos de dos conjuntos y según una determinada ley.**
  Los conjuntos relacionados no tienen porque ser distintos.

Vamos a formalizar nuestros comentarios con algunas definiciones.

2. Definiciones Básicas

Dados dos conjuntos A y B llamamos **producto cartesiano de A por B** y lo anotamos $A \times B$ al conjunto determinado por:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

En $A \times B$ están todos **los pares ordenados** con primer elemento en el conjunto A y segundo elemento en el conjunto B.

(u, w)

primer elemento ó primera componente ↵ ↓

segundo elemento ó segunda componente

Dos pares son iguales si y sólo si tienen respectivamente igual primera y segunda componente:

$(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c \wedge b = d$

Nota: La definición rigurosa de par ordenado está dada por:

$(a, b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$

A partir de esta definición resulta que vale la condición de la igualdad, sin haber visto la noción de orden.

Su demostración la puede ver por ejemplo, en el libro de Lia Oubiña, *Teoría de Conjuntos*.

EJEMPLO 4. 2.1:

a) $A = \{2, 3\}$; $B = \{0, 2\}$

$A \times B = \{ (2, 0), (2, 2), (3, 0), (3, 2) \}$

b) $A = \{a, b\}$; $B = \{-2\}$

$A \times B = \{ (a, -2), (b, -2) \}$

El producto cartesiano se distribuye en las otras operaciones de conjuntos!!!!

c) Propiedades del producto cartesiano:

Sean A, B, C y D conjuntos cualesquiera

1. $(A\times B)\cup(C\times B)=(A\cup C)\times B$
2. $(A\times B)\cap(C\times B)=(A\cap C)\times B$
3. $(A\times B)\cup(A\times C)=A\times(B\cup C)$
4. $(A\times B)\cap(A\times C)=A\times(B\cap C)$
5. $(A\times B)-(C\times B)=(A-C)\times B$
6. $(A\times B)-(A\times C)=A\times(B-C)$
7. Si $X\subseteq A$, entonces $X\times B\subseteq A\times B$
8. Si $Y\subseteq B$, entonces $A\times Y\subseteq A\times B$

de 1. y 3.:

9. $(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$

de 2. y 4.:

10. $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$
11. $\varnothing\times B=A\times\varnothing=\varnothing$ (usar bien Lógica!!!)
12. Sean $A\times B=C\times B\wedge B\neq\varnothing$ entonces $A=C$

Recordatorios: En Conjuntos

- $E=F$ si y sólo si $E\subseteq F\wedge F\subseteq E$
- $E\subseteq F: u\in E$ entonces $u\in F$
- $v\in E\cup F$ si y sólo si $(v\in E\vee v\in F)$
- $v\in E\cap F$ si y sólo si $(v\in E\wedge v\in F)$
- $v\in E-F$ si y sólo si $(v\in E\wedge v\notin F)$

En Lógica

- $(p\wedge q)\vee r\Leftrightarrow(p\vee r)\wedge(q\vee r)$
- $(p\vee q)\wedge r\Leftrightarrow(p\wedge r)\vee(q\wedge r)$
- $(p\wedge q)\wedge r\Leftrightarrow(p\wedge r)\wedge(q\wedge r)$

Demostraremos algunas.

Para 1.:

Sea $(x,y)\in(A\times B)\cup(C\times B)$ por definición de unión resulta $(x,y)\in A\times B)\ \vee\ (x,y)\in C\times B$ de la definición de producto cartesiano se tiene que $(x\in A\wedge y\in B)\ \vee\ (x\in C\wedge y\in B)$ por propiedades de la Lógica : $(x\in A\ \vee\ x\in C)\wedge y\in B$, entonces por definición de unión resulta $x\in A\cup C\wedge y\in B$ y por definición de producto cartesiano $(x,y)\in(A\cup C)\times B$.

Hasta ahora: $(A\times B)\cup(C\times B)\subseteq(A\cup C)\times B$.

Para la otra contención también hacemos especulaciones similares pero cambiando un poco el orden de las mismas.

Sea $(x,y)\in(A\cup C)\times B$ entonces por definición de producto cartesiano $x\in A\cup C\wedge y\in B$ de la definición de unión resulta $(x\in A\ \vee\ x\in C)\wedge y\in B$ por propiedades de la Lógica: $(x\in A\wedge y\in B)\ \vee\ (x\in C\wedge y\in B)$ y por la definición del producto cartesiano sale: $(x,y)\in A\times B\ \vee\ (x,y)\in C\times B)$, nuevamente por definición de unión es $(x,y)\in(A\times B)\cup(C\times B)$.

Y así tenemos: $(A\cup C)\times B\subseteq(A\times B)\cup(C\times B)$

Luego vale al igualdad propuesta en 1..

Para 4.:

Sea $(x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$ por definición de intersección sale $(x,y)\in A\times B \ \wedge\ (x,y)\in A\times C$ ahora por la definición de producto cartesiano se tiene que $(x\in A\wedge y\in B)\ \wedge\ (x\in A\wedge y\in C)$ por propiedades de la Lógica : $x\in A\wedge(y\in B\wedge y\in C)$, entonces por definición de intersección resulta $x\in A\wedge y\in B\cap C$ usando la definición de producto cartesiano $(x,y)\in A\times(B\cap C)$.

Hasta ahora: $(A\times B)\cap(A\times C)\subseteq A\times(B\cap C)$.

Para la otra contención también hacemos especulaciones similares pero cambiando un poco el orden de las mismas.

Sea $(x,y)\in A\times(B\cap C)$ por definición de producto cartesiano sale $x\in A\ \wedge\ y\in B\cap C$ ahora por la intersección se tiene que $x\in A\wedge(y\in B\ \wedge\ y\in C)$ por propiedades de la Lógica: $(x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in A\wedge y\in C)$, entonces por definición de producto cartesiano resulta $(x,y)\in A\times B\wedge(x,y)\in A\times C$ usando la definición intersección $(x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$.

Así llegamos: $A\times(B\cap C)\subseteq(A\times B)\cap(A\times C)$.

Luego vale al igualdad propuesta en 4..

Recordatorio:

En Lógica

$$\frac{\begin{array}{l} p\vee q \\ \sim q \end{array}}{p} \quad \text{regla de deducción S.D.}$$

Ahora alguna que se tenga de diferencia entre conjuntos.

Para 5.:

Sea $(x,y)\in(A\times B)-(C\times B)$ aplicando definición de diferencia,

$(x,y)\in(A\times B)\wedge(x,y)\notin(C\times B)$

Es así que $(x,y)\in(A\times B)\wedge\sim((x,y)\in(C\times B))$ usando la definición de producto cartesiano es $(x\in A\wedge y\in B)\wedge\sim(x\in C\wedge y\in B)$. Por propiedad de la Lógica, resulta $(x\in A\wedge y\in B)\wedge(\sim(x\in C)\vee\sim(y\in B))$ lo que significa: $(x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\notin C\vee y\notin B)$ por propiedades lógicas: $((x\in A\wedge y\in B)\wedge x\notin C)\vee((x\in A\wedge y\in B)\wedge y\notin B)$ luego también Lógica:

$$((x\in A\wedge x\notin C)\wedge y\in B))\vee(x\in A\wedge(y\in B\wedge y\notin B))$$

¡Atención!!! Que ocurre con el segundo conyunto del segundo disyunto: es una contradicción. Por lo cual el segundo disyunto no se puede dar. Por regla válida de deducción, se da el primero:

$((x\in A\wedge x\notin C)\wedge y\in B))$ es decir que por definición de diferencia $x\in A-C\wedge y\in B$, por lo cual por producto cartesiano se tiene: $(x,y)\in(A-C)\times B$

Hasta ahora resulta: $(A\times B)-(C\times B)\subseteq(A-C)\times B$

Falta la otra contención. Sea $(x,y)\in(A-C)\times B$, usando definición de producto cartesiano se obtiene $x\in(A-C)\wedge y\in B$, por la definición de diferencia es $(x\in A\wedge x\notin C)\wedge y\in B$ usando equivalencia lógica, $(x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\notin C\wedge y\in B)$. Para que un par este en un producto cartesiano de conjuntos, la primera componente debe estar en el primer factor y la segunda componente debe estar en el segundo factor (ambas condiciones. Sino no está!!!!!).

Luego $(x,y)\in A\times B\wedge(x,y)\notin C\times B$,y por definición de diferencia queda

$(x,y)\in(A\times B)-(C\times B)$

Resulto en este caso que $(A-C)\times B\subseteq(A\times B)-(C\times B)$

Por tanto ambas contenciones nos han demostrado la igualdad propuesta en 5..

Recordatorio:

$\dfrac{p\wedge q}{p}$ regla de simplificación S

Para 12.:

Hay que probar que $A = C$, con algunas hipótesis.

Las hipótesis se usarán en la situación oportuna.

Sea $x\in A$. Como $B\neq\varnothing$, existe en B algún elemento ,

por ejemplo $b\in B$, luego existe $(x,b)\in A\times B$ y como $A\times B=C\times B$ se tiene que $(x,b)\in C\times B$.

Es entonces por definición del producto cartesiano $x\in C\wedge b\in B$. Y por simplificación $x\in C$.

Es decir así resulta que $A\subseteq C$.

De similar manera se prueba que $C\subseteq A$.. Por tanto se tiene la igualdad propuesta.

EJEMPLO 4. 2.2

Como caso particular de producto tenemos:

$A = B = \mathbb{R}$ (conjunto de los números reales)

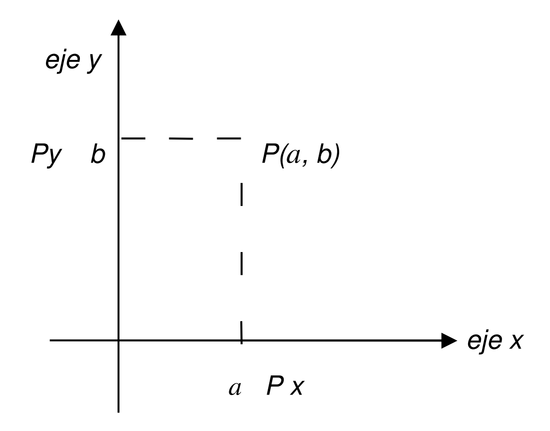
$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(a,b):a\in\mathbb{R}\wedge b\in\mathbb{R}\}$$

Que por analogía con las operaciones dentro de los números se anota también: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$

Este es el ejemplo motivador de la definición general.

Se acostumbra a representar $\mathbb{R}^2$ como los **puntos en un plano** - que es un espacio bidimensional - **asociándolos a pares de números reales de manera 1 a 1** (a un punto del plano un par de números reales y recíprocamente).

Para representar puntos en un plano mediante pares de números, elegimos dos rectas que se intercepten y establecemos una escala en cada una de ellas - cada recta es una "recta real", cada uno de sus puntos está en correspondencia con un número real - como vemos en la figura



a es la coordenada sobre el *eje x* del punto *P*, y *b* es la coordenada sobre el *eje y* del punto *P*

El punto de intersección de las rectas es el **origen del sistema**.

Estas dos rectas se llaman **ejes coordenados**, y se diferencian mediante símbolos, que normalmente son las letras *x* e *y*.

En el caso que las rectas sean perpendiculares, se dice que el sistema es **ortogonal**.

Se llama **plano Cartesiano** (sinónimo de **plano coordenado**) al plano en el que se ha introducido un sistema de referencia que asigna a cada punto sus coordenadas

Para un punto dado *P* en el plano, corresponde un punto *Px* en el eje *x*. Es el punto de intersección del eje *x* con la recta que contiene *P* y es paralela al eje *y*. (Si *P* está en el eje *y*, esta recta coincide con el eje *y*)

Igualmente, existe un punto *Py* en el eje *y*, que es el punto de intersección de ese eje y la recta que pasa por *P* que es paralela al (o que es el) eje *x*.

Las coordenadas de esos puntos (*Px* y *Py*) en los ejes son las coordenadas de *P.* La coordenada sobre el eje *x* se llama **abscisa** y la definida sobre el eje *y*, se le dice **ordenada.**

Comentarios importantes sobre el plano cartesiano y su representación.



En un plano coordenado se acostumbra utilizar las siguientes convenciones:

•Los ejes son perpendiculares entre sí.

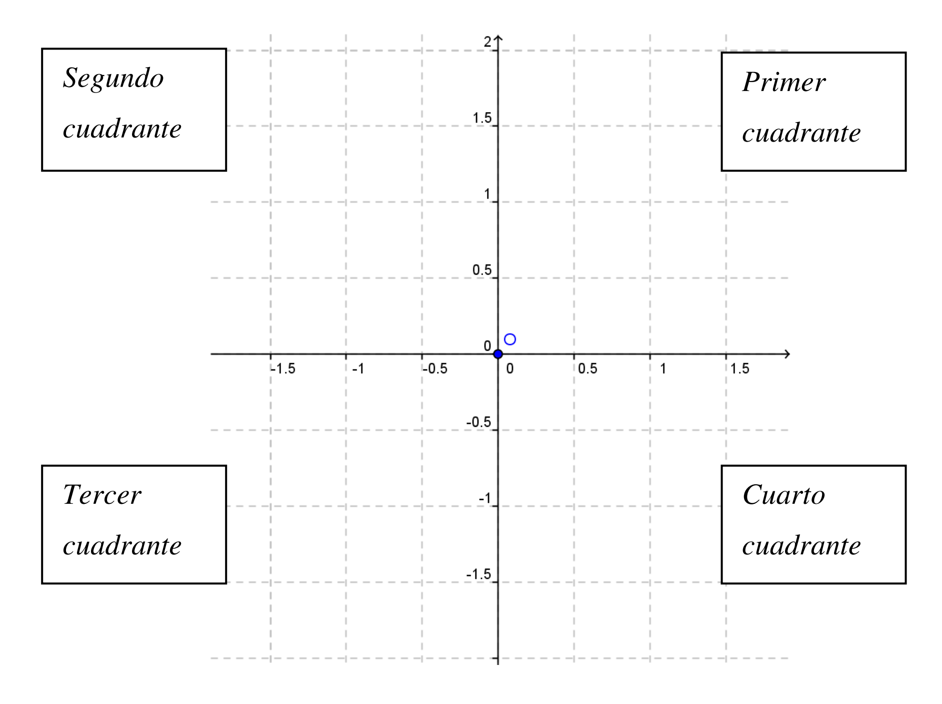
•El eje *x* es una recta horizontal con sus coordenadas positivas hacia la derecha del origen, y el eje *y* es una recta vertical con sus coordenadas positivas arriba del origen.

•Se usa la misma escala en ambos ejes.

Naturalmente, no es indispensable apegarse a estas convenciones cuando haya otras que sean más cómodas.
Con frecuencia se viola la tercera, cuando se trabaja con figuras cuyo trazo podría ser muy difícil si insistiéramos en usar la misma escala en ambos ejes. En esos casos podremos usar libremente escalas distintas, sin olvidar que con ello distorsionamos la figura.

Nótese que todos **los puntos en el eje *x* tienen ordenada cero**, mientras que los que están **en el eje *y* tienen abscisa cero**.
El origen tiene sus dos coordenadas iguales a cero, porque está en ambos ejes.

PLANO COORDENADO



Los ejes dividen al plano en cuatro regiones, que se llaman **cuadrantes,** los cuales conviene identificar con los números que se muestran en la figura.

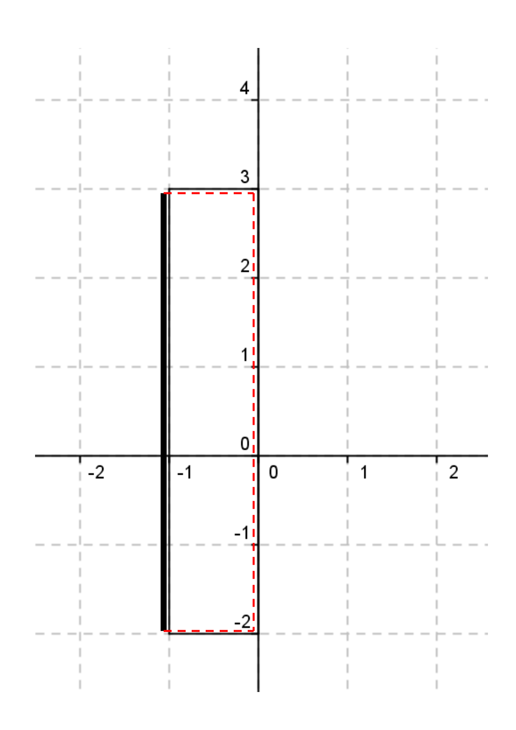
En el primer cuadrante abscisa y ordenada positivas. ($x > 0$; $y > 0$)
En el segundo cuadrante abscisa negativa y ordenada positiva. ($x < 0$; $y > 0$)
En el tercer cuadrante abscisa y ordenada negativas. ($x < 0$; $y < 0$)
En el cuarto cuadrante abscisa positiva y ordenada negativa. ($x > 0$; $y < 0$)
Los puntos que están en esos ejes no están en ningún cuadrante.

Nota histórica: A las coordenadas de un punto determinadas de esta manera, con frecuencia se les llama **coordenadas cartesianas**, en honor al matemático y filósofo francés **René Descartes** (1596-1650), que utilizaba **Cartesius** como seudónimo. En el apéndice de un libro publicado en 1637 (el "Discours de la Méthode pour bien conduire sa Raison et chercher la Vérité dans les Sciences") Descartes presentó la primera descripción de la Geometría Analítica.
A partir de allí vinieron grandes avances en la Matemática que condujeron entre otras cosas, a la invención del cálculo infinitesimal.
En el "Discours" Descartes presenta un programa para sistematizar el conocimiento aceptado, que permitiría construir un edificio de verdades sobre claros y ciertos principios. Uno de esos principios es el conocido: "*Pienso, luego existo"*

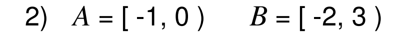
Para representar $A \times B$, si $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}$, es decir A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$, también se representa sobre un sistema de ejes coordenados, A como subconjunto en el eje horizontal y B como subconjunto en el eje vertical.

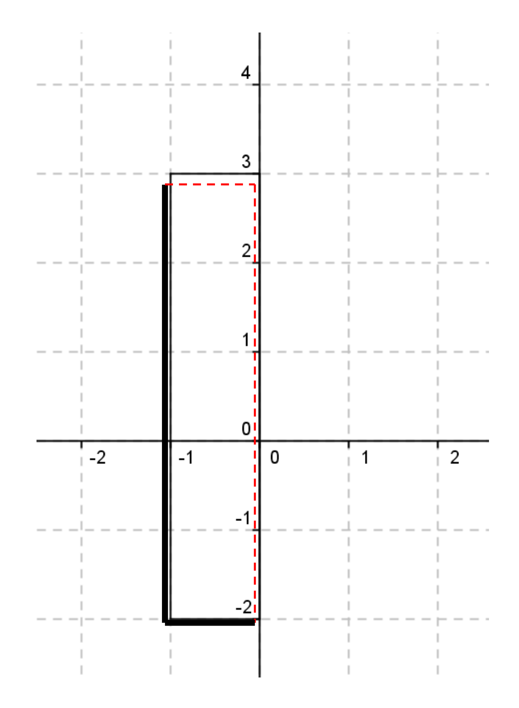
EJEMPLO 4.2.3:

1) $A = [-1,\ 0) = \{x \in \mathbb{R} : -1 \le x < 0\}$ $B = (-2,\ 3) = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 3\}$



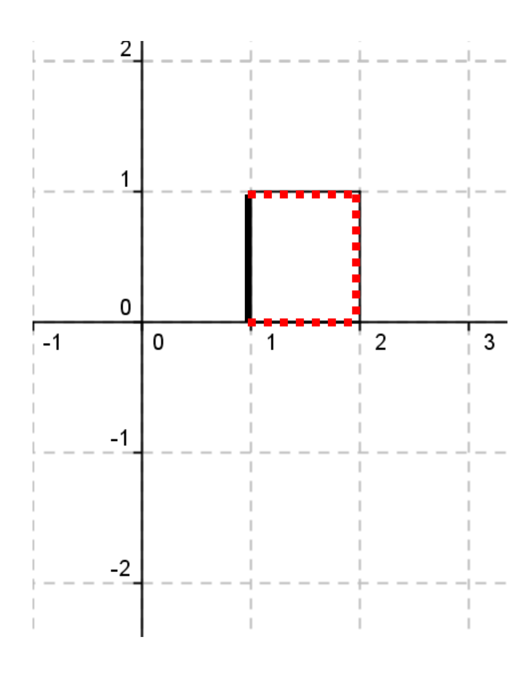
El conjunto $A \times B = [-1, 0) \times (-2, 3)$ es una región del plano encerrada por los segmentos dibujados.
Se han dibujado con líneas punteadas rojas a los segmentos que no pertenecen al conjunto y con línea llena el segmento que pertenece al conjunto


2) A = [-1, 0) B = [-2, 3)



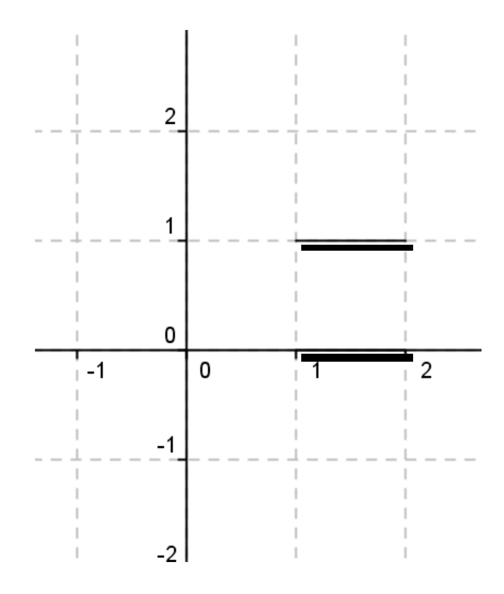
El conjunto $A \times B = [-1, 0) \times [-2, 3)$ es una región del plano encerrada por los segmentos dibujados.
Se han dibujado con líneas punteadas rojas a los segmentos que no pertenecen al conjunto y con línea llena los segmentos que pertenece al conjunto

3) $A = [\,1, 2\,)$ $B = (\,0, 1\,)$



El conjunto $A\times B=[-1,0)\times[-2,3)$ es una región del plano encerrada por los segmentos dibujados.
Se han dibujado con líneas punteadas rojas a los segmentos que no pertenecen al conjunto y con línea llena los segmentos que pertenece al conjunto

4) $A = [\,1, 2\,]$ $B = \{\,0, 1\}$



El conjunto $A\times B=[1,2]\times\{0,1\}$ es una región del plano.
Son dos segmentos. Se dibujaron los puntos del conjunto con línea llena.

EJERCICIO 4.2.4

1. Represente en el plano coordenado los siguientes conjuntos:

a) $[3,5] \times (-3,5]$

b) $(-2,1) \times (-3,5]$

c) $[2,6) \times [3,6]$

d) $(-3,5] \times (1,4)$

e) $\mathbb{R} \times (1,4)$

f) $(1,4) \times \mathbb{R}$

2. Halle un punto P del plano tal que:

a) P no pertenezca al conjunto dado en 1.b)

b) P pertenezca al conjunto dado en 1.c)

c) P no pertenezca al conjunto dado en 1.f)

d) Hallar la intersección y la unión de las regiones dadas en a) y en b) y represente.

e) Hallar la intersección y la unión de las regiones dadas en e) y en f) y represente.

Ya se tiene lo necesario para una definición general de las situaciones que se han visto en la Sección 1 de este Capítulo.

Una **relación R (binaria) del conjunto A en el conjunto B** es un subconjunto de $A \times B$.

Por ser R subconjunto de $A \times B$, **R es un conjunto de pares ordenados**.

Por ser R conjunto de pares ordenados la relación es **binaria**

EJEMPLO 4.2.5

1. Sean $A = B =$ conjunto de seres humanos masculinos.

a) $P = \{(x, y) : y$ es el padre de $x\} \subseteq A \times B$

b) $H = \{(x, y) : y$ es el hijo de $x\} \subseteq A \times B$

2. Sean $A =$ conjunto de escritores.

$B =$ conjunto de novelas de la literatura universal.

$E = \{(x, y)$: x escribió $y\} \subseteq A \times B$

3. Sean $A =$ conjunto de los ciudadanos argentinos

$B = \mathbb{N}$

$I = \{(x, y) : y$ es el número de documento nacional de identidad de $x\}$

Para referirse a que el par (x, y) está en R diremos:

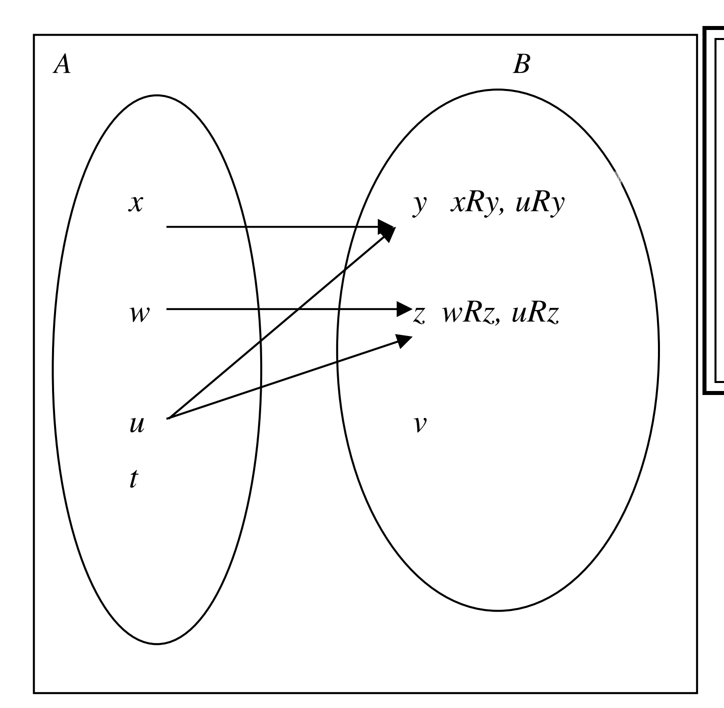
x* está relacionado según *R* con *y

o

***y* es el correspondiente por *R* de *x*.**

$$R = \{ (x, y): x R y \}$$

$(x, y) \in R$ ó $x R y$ expresan simbólicamente que ***x* está relacionado según *R* con *y***



Es claro que una relación R puede ser subconjunto de diferentes productos cartesianos.

Se entiende que si decimos:

la relación *R* de *A* en *B*

hemos fijado A y B.

Dada la relación R de A en B, el **dominio de *R*** es el *subconjunto de A* tal que sus elementos tienen correspondientes por R;
el **conjunto de valores de *R* o imagen por *R*** es el *subconjunto de B* cuyos elementos son correspondientes por R.

Escrito por comprensión, para la relación R de A en B

dom*(R)* $= \{x \in A : (x, y) \in R\}$

imagen*(R)* $= \{y \in B : (x, y) \in R\}$

- **Más definiciones con coincidencias!!!!**

Dada una relación R de A en B

Llamamos **proyección 1 de la relación *R*** al conjunto de las primeras componentes de los pares de R y lo notamos $\Pr_1 R = \{x \in A : (\exists y)(y \in B \wedge (x, y) \in R)\}$

Llamamos **proyección 2 de la relación *R*** al conjunto de las segundas componentes de los pares de R y lo notamos $\Pr_2 R = \{y \in B : (\exists x)(x \in A \wedge (x, y) \in R)\}$

Estos nombres de **proyecciones**, están asociados a la idea de la representación de las relaciones en plano $\mathbb{R}^2$ y su notación usual en coordenadas. La proyección 1 seria "aplastar" el conjunto relación sobre el eje horizontal y la proyección 2 , "aplastar" sobre el vertical…..

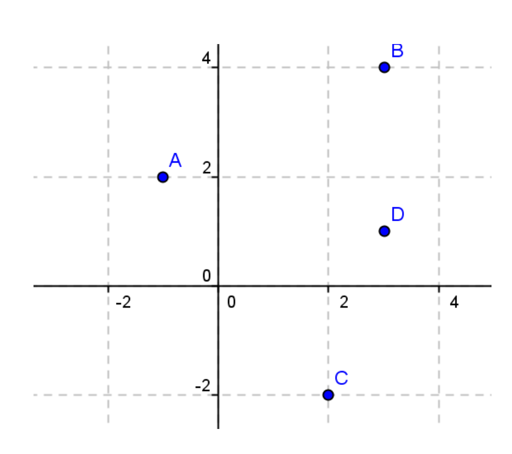
- Observar que las proyecciones se corresponden con la definición de dominio de R e Imagen de R, para cualquier relación independientemente que se represente en $\mathbb{R}^2$

EJEMPLO 4.2.6

Sea R = { (-1, 2), (3, 4), (2, -2), (3, 1) } $\subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{R}$

Entonces: 2 es el correspondiente por R de -1; 4 es el correspondiente por R de 3; -2 es el correspondiente por R de 2; 3 es el correspondiente por R de 1.

Como el conjunto de partida y de llegada ($\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$ respectivamente) son subconjuntos de $\mathbb{R}$, la relación admite una representación en un sistema de coordenadas cartesianas:



Los pares ordenados de R son los puntos del plano representados en el diagrama adjunto.

En este caso $\Pr_1 R = \{-1, 2, 3\}$ y $\Pr_2 R = \{-2, 1, 2, 4\}$

EJEMPLO 4. 2.7

Para los conjuntos A = { -1, 0, 1, 2} y B = {-2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 9}

Sea R = { (2, 3), (1, -2) , (2, 5), (0, -2), (1,1) ,(2,1) }

En este caso $\Pr_1 R = \{2, 1, 0\}$ y $\Pr_2 R = \{-2, 1, 3, 5\}$

Haga Ud. el diagrama cartesiano.

EJERCICIO 4. 2.8

I. Para cada uno de los casos de 4.2.5:

a) De cinco pares que estén en la relación.

b) De tres pares que no estén en la relación.

c) Haga una tabla (parcial) con los pares elegidos en a).

II. Para cada uno de los casos presentados en 4.1.2 , 4.1.3 , 4.1.4 y 4.1.5

a) Determine conjuntos A y B para los que esté definida la relación. ¿Son únicos A y B ? Elija un A y un B.

b) De cinco pares que estén en la relación.

c) De tres pares que no estén en la relación.

d) Haga una tabla (parcial) con los pares elegidos en b).

e) Haga un gráfico cartesiano en los casos posibles.

EJERCICIO 4.2.9

Dadas las siguientes relaciones del conjunto A = { -1, 0, 1, 2} en $B = \mathbb{Z}$

R_1 = { (2, 3), (1, -2) , (2, 5), (0, -2) }

R_2 = { (-1, 3), (0, 3) , (2, 3), (1, 3) }

R_3 = { (-1, 2), (0, -8) , (1,4) }

R_4 = { (1, 2), (0, -3) , (2, 10), (-1, 10) }

a) Representarlas en el plano coordenado.

b) Hallar y tal que $x\ R\ y$, para cada elemento x del dominio de cada una de las relaciones.

c) Haga una tabla de cada relación.

d) Hallar las proyecciones de cada una de las relaciones.

EJERCICIO 4.2.10

Dadas las relaciones definidas por las tablas:

1.

x	y *tal que* $x\ R\ y$
-1	5
0	0
0	2
3	7
2	2

2.

x	*y tal que x R y*
Jorge	rubio
César	negro
Ileana	rubio
Sixto	pelirrojo
María Fernanda	castaño claro

a) Expresarlas como un conjunto de pares ordenados.

b) Dar el dominio y codominio de cada una.

EJERCICIO 4.2.11

Sea el conjunto de alumnos

A = {Carlos Russo, Mariela Monteoliva, Aldo Lede, Leandro Alonso, Silvia Guzmán, Claudia Pastor, Natalia Tori }

y sea el conjunto de materias

M = {Fundamentos de Algebra, Programación en Computadoras, Inglés, Estructuras Algebraicas, Investigación Operativa, Análisis Matemático }.

Se sabe que:

Carlos Russo tiene aprobadas Fundamentos de Algebra, Programación en Computadoras, Estructuras Algebraicas, Investigación Operativa

Aldo Lede tiene aprobadas Fundamentos de Algebra, Estructuras Algebraicas, Ingles.

Leandro Alonso tiene aprobadas Fundamentos de Algebra, Programación en Computadoras, Estructuras Algebraicas, Análisis Matemático.

Silvia Guzmán tiene aprobadas Fundamentos de Algebra, Programación en Computadoras, Inglés, Estructuras Algebraicas, Análisis Matemático.

Mariela Monteoliva, Claudia Pastor y Natalia Tori cada una de ellas tienen aprobadas Fundamentos de Algebra, Programación en Computadoras, Inglés, Estructuras Algebraicas.

a) Exprese estos datos en una tabla de la relación R que se define:

$a\, R\, y$ si y sólo si y es materia aprobada por el alumno a

b) También escriba R como conjunto de pares ordenados.

En ambos casos puede usar las iniciales de nombre y apellido para indicar c/ alumno (esto es también una relación...) e igualmente para las materias.

EJEMPLO 4.2.12

a) En el EJEMPLO 4.2.5 1. sobre $A = B =$ {seres humanos masculino }

P = {(*x, y) : y* es el padre de *x*} $\subseteq A \times B$ y H = {(*x, y*) : *y* es el hijo de *x*} $\subseteq A \times B$

Es fácil ver que si consideramos un par (a, *b*) elemento de *P*, entonces el par (*b*, a) está en *H*.

Claro!!!!!

- ¿Cuál es la razón*?* Lo inverso de ser padre es ser hijo....

b) En el EJERCICIO 4.2.8 2. la relación R descripta por la tabla

X	*y tal que x R y*
Jorge	rubio
César	negro
Ileana	rubio
Sixto	pelirrojo
María Fernanda	castaño claro



es: *x R y* si y sólo si *y es el color de pelo de x*

- ¿Qué ocurre si *intercambiamos las columnas de la tabla*???

Se tendrá otra relación que podríamos bautizar R^* . La tabla resultante es:

z	*w tal que z R* w*
Rubio	Jorge
Negro	Cesar
Rubio	Ileana
Pelirrojo	Sixto
castaño claro	María Fernanda

La relación es: *z R* w* si y sólo si *w tiene el color de pelo z*

La relación R es de A = {Jorge, César, Ileana, Sixto, María Fernanda} en

B = {rubio, negro, pelirrojo, castaño claro}.

La relación R^* es de B en A.

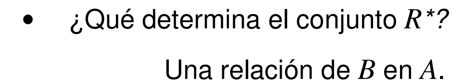
- Consideremos la relación de A = { 0, 1, 2, 3, -1, -2, 5 } en B ={ 0, 1, 4, 9} definida por

  x R y si y sólo si *y es el cuadrado de x,* su representación por pares es:

  R = { (0, 0), (1, 1), (-1, 1), (2, 4), (-2, 4), (3, 9) }

- ¿Si damos vuelta los pares que obtenemos?

  R^* = { (0, 0), (1, 1), (1,- 1), (4, 2), (4, -2), (9, 3) }



- ¿Qué determina el conjunto *R*?*

  Una relación de B en A.

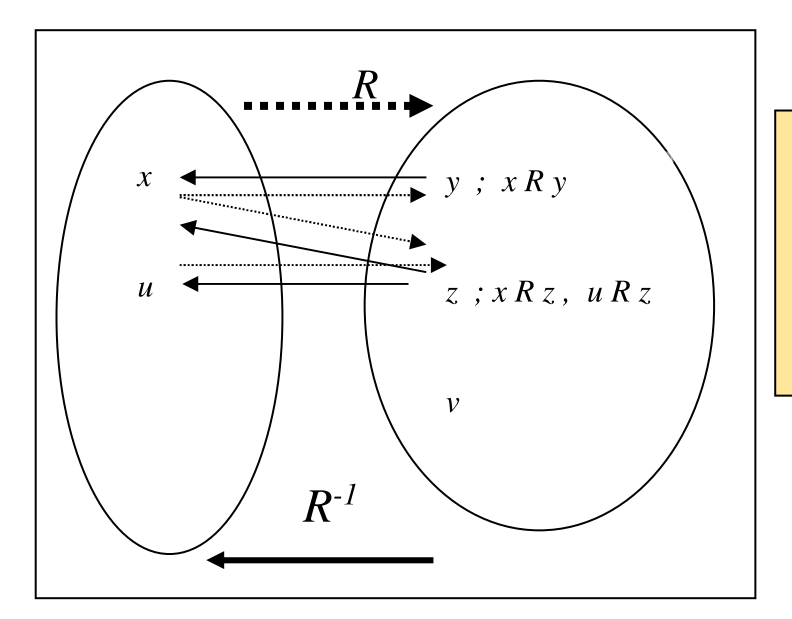
Así se construyó R*
(dando vuelta los pares de R)

- ¿Qué determina algebraicamente *R*?*

Partimos de *y R* x* si y sólo si *x R y*

y R x* si y sólo si *y es el cuadrado de x* si y sólo si *x es raíz cuadrada de y*

> Dada una relación ***R* de *A* en *B*** se define la **relación inversa de *R*,** como la relación ***R*$^{-1}$ de *B* en *A*,** dada por
>
> $x R^{-1} y$ si y sólo si $y R x$



$R^{-1} = \{(x, y) \in B \times A : (y, x) \in R\}$

es decir

$xR^{-1}y$ si y sólo si yRx

EJERCICIO 4.2.13

a) Halle las relaciones inversas de las dadas en el EJERCICIO 4.2.9
b) Representar cada relación obtenida, en un plano coordenado,
c) Hallar y tales que $x\,R^{-1}\,y$, para cada elemento x de B en cada caso.
d) Represente cada una de ellas por tabla.
e) Represente en un mismo gráfico cartesiano para cada uno de los casos, la relación y su inversa. Trace la bisectriz del 1er. y 4to. cuadrante. ¿Qué puede decir?

EJERCICIO 4.2.14

a) Halle la relación inversa de la dada en el EJERCICIO 4.2.10
b) Hallar y tal que $x\,R^{-1}\,y$, para cada elemento x de *M*.
c) Represente por tabla.

EJERCICIO 4.2.15

Sea R^{-1} la inversa de la relación R relación de A en B. ¿Cuál es la inversa de R^{-1} ?

a) Ejemplifique su conjetura.
b) **Demuestre** lo que afirma.
c) **Demostrar** que $\text{Pr}_1(R) = \text{Pr}_2(R^{-1})$ y que $\text{Pr}_2(R) = \text{Pr}_1(R^{-1})$.

➢ Operaciones con relaciones

Las **relaciones son conjuntos**, por lo cual entre relaciones se pueden hacer las operaciones conjuntistas de unión, intersección, diferencia, etc.

Analice cual es el conjunto de partida y conjunto de llegada en cada caso.

Recordar propiedades del producto cartesiano que están formuladas en EJEMPLO 4.2.1.

Por ejemplo , dadas R_1={ (1,2), (-2,3), (-2,4) } y R_2={ (-1,3), (-2, 3), (4,3) }

$R_1 \cup R_2$ = { (1,2), (-2,3), (-2,4), (-1,3),(4,3) } $R_1 \cap R_2$ = { (-2,3) }

Calcule $R_1 - R_2$ y $R_2 - R_1$

¡Ya voy!

Busque sus conjuntos de partida y de llegada.

•

- Hay una operación particular para el caso de tener dos relaciones: la **composición**.

Dadas R_1 de A en B y R_2 de B en C la **composición de R_1 con R_2** es la **relación de A en C**

$R_2 \, o \, R_1$ definida por el conjunto

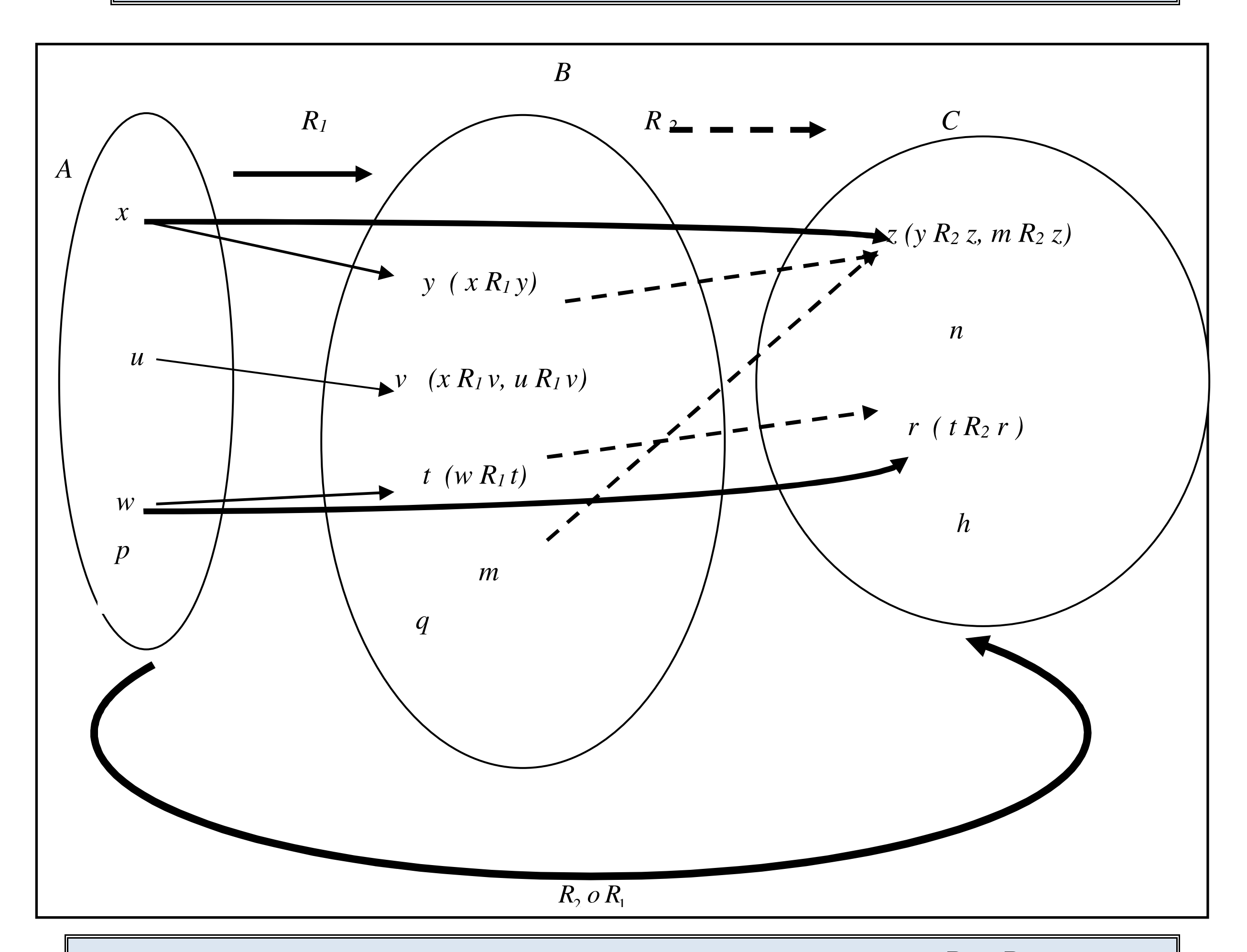
$$R_2 \circ R_1 = \{ (x, y) : (\exists z) \; ((x, z) \in R_1 \wedge (z, y) \in R_2) \; \}$$

o es la operación determinada por:

$$x \; R_2 \circ R_1 \; y \quad \text{si y sólo si} \quad (\exists z)(\, x \, R_1 \, z \, \wedge \, z \, R_2 \, y)$$

Observar que se habla de " **composición de R_1 con R_2** " y se escribe $R_2 \circ R_1$

El siguiente gráfico aclara el porqué:



- **Para que quede definido el correspondiente por la composición** $R_2 \, o \, R_1$ **de** $x \in A$, **debe tener correspondiente** z por R_2 el elemento y tal que $x \; R_1 \; y$, obteniéndose así $x \; R_2 \, o \, R_1 \; z$ debido que $y \, R_2 \; z$ para $x \, R_1 \; y$

EJEMPLO 4.2.16

Sean las relaciones:

R_1 del conjunto A = { -1, 0, 1, 2} en B = {-2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 9}

R_2 del conjunto B = {-2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 9} en $\mathbb{Z}$

R_3 del conjunto B = {-2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 9} en $\mathbb{R}$

Dadas por

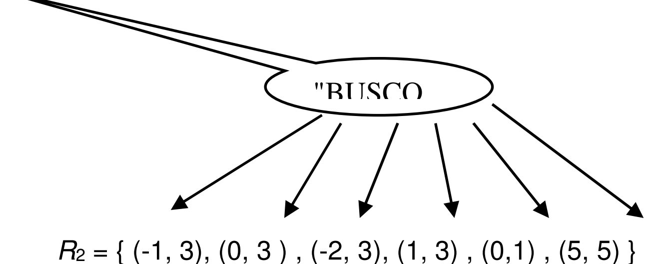
R_1 = { (2, 3), (1, -2) , (2, 5), (0, -2), (1,1) ,(2,1) }

R_2 = { (-1, 3), (0, 3) , (-2, 3), (1, 3) , (0,1) , (5, 5) }

R_3 = { (0, 3), (2, -3) , (0,1) , (9, 5) }

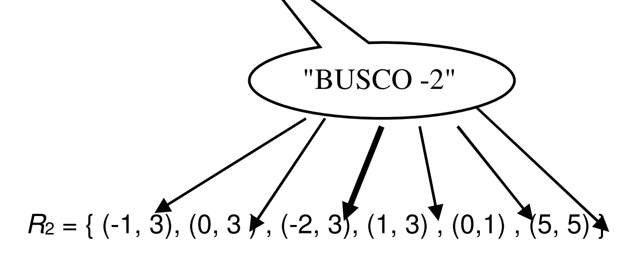
- Son **componibles** R_1 **con** R_2 y R_1 **con** R_3 pues R_1 sale de A y llega a B y tanto R_2 como R_3 salen de B.
- La relación composición $R_2 \circ R_1$ es de A en $\mathbb{Z}$.
- Para hallarla consideramos los pares que definen R_1 y se busca en R_2 los pares cuyas primeras componentes sean las segundas de R_1.

Dado (2, 3) ∈ R_1 , se busca en R_2 si existe un par que "comience" con 3.



R_2 = { (-1, 3), (0, 3) , (-2, 3), (1, 3) , (0,1) , (5, 5) }

Considero el siguiente par de R_1 : como (1, -2) ∈ R_1 se busca en R_2 si existe un par que "comience" con -2.



R_2 = { (-1, 3), (0, 3) , (-2, 3), (1, 3) , (0,1) , (5, 5) }

Está el (-2, 3) en R_2

(1, -2) ∈ R_1 (-2, 3) ∈ R_2

$$(1, 3) \in R_2 \circ R_1$$

Se sigue este procedimiento y se obtiene (verifique...) que

$R_2 \, o \, R_1$ = { (1,3), (2, 3), (0, 3), (2, 5) }

- **No existe** $R_1 o R_2$ pues el *conjunto de llegada de* R_2 *NO es el conjunto de salida de* R_1
- Haciendo un proceso análogo calculemos $R_3 o \, R_1$:

  Para (2, 3) ∈ R_1 , se busca en R_3 si existe un par que "comience" con 3. No existe un elemento en R_3 de esa característica. Luego considero el par (1, -2) ∈ R_1 , se busca en R_3 si existe un par que "comience" con -2. No hay en R_3 un elemento así. Como (2,5) ∈ R_1 , se busca en R_3 si existe un par que "comience" con 5. No hay en R_3 un par así. Seguimos con el par (0, -2) ∈ R_1 , se busca en R_3 si existe un par que "comience" con -2, pero no existe. Dado (1, 1) ∈ R_1 , se busca en R_3 si existe un par que "comience" con 1, pero no hay un elemento así. Por último, (2, 1) ∈ R_1 , se busca en R_3 si existe un par que "comience" con 1 y ya vimos que no hay elemento con esa característica.

  Por lo tanto $R_3 o \, R_1 = \varnothing$.
- $R_1 o \, R_3$ **no existe**. Pues el conjunto de llegada de R_3 NO es el conjunto de salida de R_1

- NO es igual no existir a ser el conjunto vacío.

EJERCICIO 4.2.17

a) Haga un diagrama de flechas para representar el EJEMPLO 4.2.16**,** en un mismo diagrama realice las tres relaciones: R_1 , R_2 , $R_2 \, o \, R_1$.

b) Halle $R_1 \cup R_2$. Haga un diagrama de flechas.

c) Haga una tabla para R_1 y a continuación una para R_2 . Haga una tabla para la relación $R_2 \, o \, R_1$. Qué comentario puede hacer respecto de las tres tablas.

EJERCICIO 4.2.18

¿¿Es conmutativa la operación de composición?? (use el EJEMPLO 4.2.16).

EJERCICIO 4.2.19

Dadas las relaciones R_1 del conjunto A en B , R_2 del conjunto B en C con $A = B = C = \mathbb{R}$ y definidas por

$x \, R_1 \, y$ si y sólo si $y = \sqrt{x}$; $x \, R_2 \, y$ si y sólo si $y = x - x^2$

a) Para algunos casos, haga un diagrama de flechas para representar en un mismo diagrama las tres relaciones R_1 , R_2 , $R_2 \, o \, R_1$.

b) Para algunos casos, haga una tabla para R_1 y a continuación una para R_2 . Haga una tabla para la relación $R_2 \, o \, R_1$. Qué comentario puede hacer respecto de las tres tablas.

c) Cuál es la definición de $R_2 \, o \, R_1$?

d) Haga un diagrama cartesiano para cada una de las relaciones.

e) Es posible hallar $R_1 o R_2$?

f) Para algunos casos, haga un diagrama de flechas para representar en un mismo diagrama realice las tres relaciones R_1 , R_2 , $R_1 o R_2$.

g) Para algunos casos, haga una tabla para R_2 y a continuación una para R_1. Haga una tabla para la relación $R_1 o R_2$.

h) Cuál es la definición de $R_1 o R_2$?

i) Verificar que, si existe la composición $\Pr_1(R_1 o R_2) \subseteq \Pr_1(R_1)$ y $\Pr_2(R_1 o R_2) \subseteq \Pr_2(R_2)$.

EJERCICIO 4.2.20

Repita el 4.2.19 para las relaciones:

R_1, R_2 del conjunto A en B y de B en C, respectivamente, con $A = B = C = \mathbb{R}$ definidas por $x \, R_1 \, y$ si y sólo si $y^2 = x$; $x \, R_2 \, y$ si y sólo si $y = x - x^2$

EJERCICIO 4.2.21

Repita el 4.2.19 para las relaciones:

R_1 del conjunto $A = \mathbb{R}$ en $B = \mathbb{R}$, R_2 del conjunto $B = \mathbb{R}$ en $C = \mathbb{Z}$ definidas por

$x \, R_1 \, y$ si y sólo si $y^2 = x$; $x \, R_2 \, y$ si y sólo si $y = x - x^2$

¿ qué pasa?

EJERCICIO 4.2.22

Sean las relaciones R_1 de A en B y R_2 de B en C.

a) **Demostrar** para que $\Pr_1(R_1 o R_2) \subseteq \Pr_1(R_1)$

b) **Demostrar** que $\Pr_2(R_1 o R_2) \subseteq \Pr_2(R_2)$

Sea R una relación de A en B. Decimos que la relación R es **total** si y sólo si $\Pr_1 R = A$

Decimos que la relación R es **funcional** si y sólo si

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ ((x,y)\in R \wedge (x,z)\in R \rightarrow y = z)$$

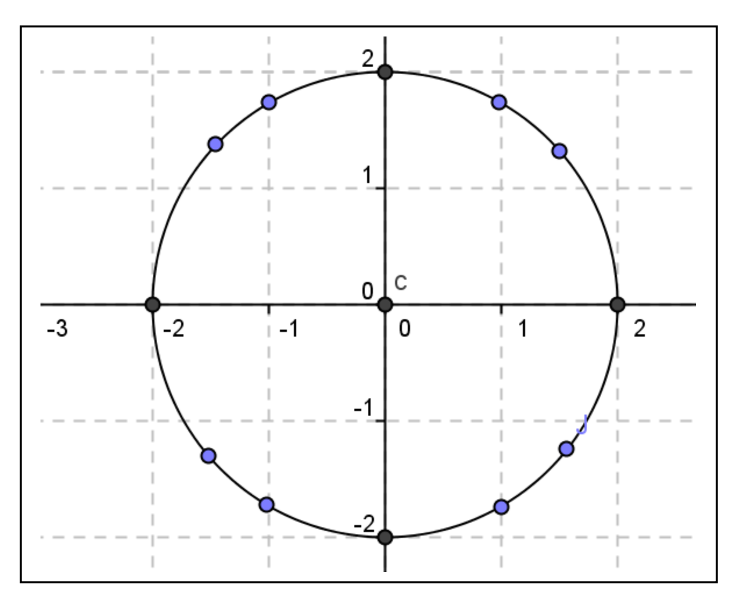
- En una relación total R, la proyección 1 de R coincide con el conjunto de partida o dominio de la relación.
  En el EJERCICIO 4.2.20 la relación R_1 no es total, pues por ejemplo $-1\in A$ y $-1\notin \Pr_1 R_1$
- En una relación funcional un elemento no puede tener dos correspondientes.
  En el EJERCICIO 4.2.20 la relación R_1 no es funcional, $(4,2)\in R_1$ y $(4,-2)\in R_1$.

EJEMPLO 4.2.23

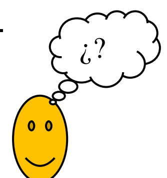
Sea la relación R_1 del conjunto $A = B = \mathbb{R}$, $R_1 = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 = 4\right\}$.

Hagamos la representación por un diagrama de coordenadas cartesiano ortogonal.
Para lo cual hacemos una tabla para algunos valores, representa una circunferencia.

x	*y*	*x*	*y*
0	2	-1	$\sqrt{3}$
0	-2	-1	$-\sqrt{3}$
1	$\sqrt{3}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{7}}{2}$
1	$-\sqrt{3}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{\sqrt{7}}{2}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	-2	0
$\frac{3}{2}$	$-\frac{\sqrt{7}}{2}$	2	0
2	0		



Esta relación representa una circunferencia con centro en el origen y radio 4. Observar que $R_1 = R_1^{-1}$. Justifique.



La relación no es total ni funcional. ¿Por qué? Mire el grafico de la relación.

EJERCICIO 4.2.24

a) Sean A = [-2, 2], B = [-2, 2] y la relación $R_2 = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\right\}$.

Analizar que la relación R_2 es total pero no funcional. Verifique.

b) Hallar un conjunto A y un conjunto B para que la relación

$R = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\right\} \subseteq A \times B$ sea total y funcional.

3. Función

Vamos a introducir uno de los conceptos más importantes que recorre todos los campos de la Matemática y que además tiene aplicaciones interesantes en otros acampos del saber. Son las funciones un caso particular de relaciones, con mayores exigencias en la definición pero no menos útiles por eso, al contrario.

Dados dos conjuntos A y B, se llama **función** de A en B, a una terna $f = (F, A, B)$, donde *F* es una relación de A en B ($F \subseteq A \times B$). Y se cumplen las siguientes condiciones:

1) *F* es total, es decir $\mathrm{Pr}_1\ F = A$,

2) *F* es funcional, es decir:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \in A \wedge y \in B \wedge z \in B) \wedge ((x, y) \in F \wedge (x, z) \in F \rightarrow y = z))$$

***A* el conjunto de partida o dominio de *f* y *B* el conjunto de llegada o codominio de *f*.**

Estas condiciones 1) y 2) implican que todos los elementos de A deben tener un correspondiente y éste debe ser único.

Una función se define por su dominio *A*, codominio *B* y su ley de formación dada por la relación *F*.

Es usual para el caso de las funciones a ***F*** llamarla **gráfica de la función *f*.**

Dada $f = (F, A, B)$, F es el conjunto de pares ordenados tales que x está relacionado con y por la relación, así $F = \{(x, y): x\ F\ y\}$ además se acostumbra escribir $y = f(x)$, para indicar que y **es el correspondiente de** x **por la relación** F que por la condición 2) de la definición el y es único.

Por lo tanto también se representa a la relación $F = \{(x, y): y = f(x)\}$

La notación que a los elementos del dominio de una relación se los simbolice comúnmente con la letra x y a los del codominio con la letra y, está incorporado así por la tradición de la representación en diagramas Cartesianos, y éstas representaciones cuando corresponde como vimos ya en relaciones, son puntos que están en el plano y habitualmente x es la abscisa e y la ordenada de los puntos representados

La **imagen de** $\boldsymbol{f}$, es el conjunto de los elementos del codominio que son correspondientes de algún elemento del dominio

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in B : (\exists x)(x \in A \wedge f(x) = y\}$$

En otras palabras la imagen de f es la proyección 2 de la relación F. Observar que obviamente $\mathrm{Im}(f) \subseteq B$

Otra notación usual para una función f con dominio A y codominio B es:

la función $f : A \rightarrow B$

Esta escritura para la función da la idea visual que f sale de x en A y llega a $f(x)= y$ en B.

EJEMPLO 4.3.1

Si definimos la relación *F* de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dada por $x F y \quad \leftrightarrow \quad |x| = y$

• *F* es total, ya que todo número real tiene definido su valor absoluto y *F* es funcional ya que el valor absoluto de un número es único. Podemos escribir la función

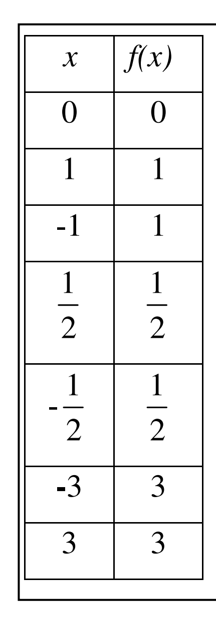
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ definida por } f(x) = |x|$$

• Son Dom (*f*) = $\mathbb{R}$ y Codominio (*f*) = $\mathbb{R}$.

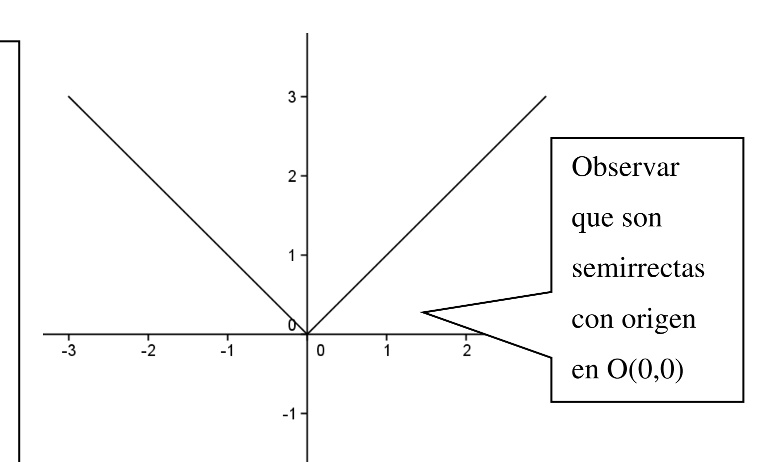
• Resulta que Im(*f*)= $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$. Pues dado $r \in \mathbb{R}$ y $r \geq 0$ existe

$x \in \mathbb{R}$ tal que $x = r$ ó $x = -r$ es $|x| = |r| = |-r| = r$.

La representación gráfica (parcial…) de *f* en un sistema cartesiano:



x	$f(x)$
0	0
1	1
-1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
-3	3
3	3



EJEMPLO 4.3.2

Si definimos ahora la relación $x F y \quad \leftrightarrow \quad |x| = y$ pero modificando el dominio por $\mathbb{N}$, es decir $F \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Desde ya que es otra relación respecto a la anterior*!!!*

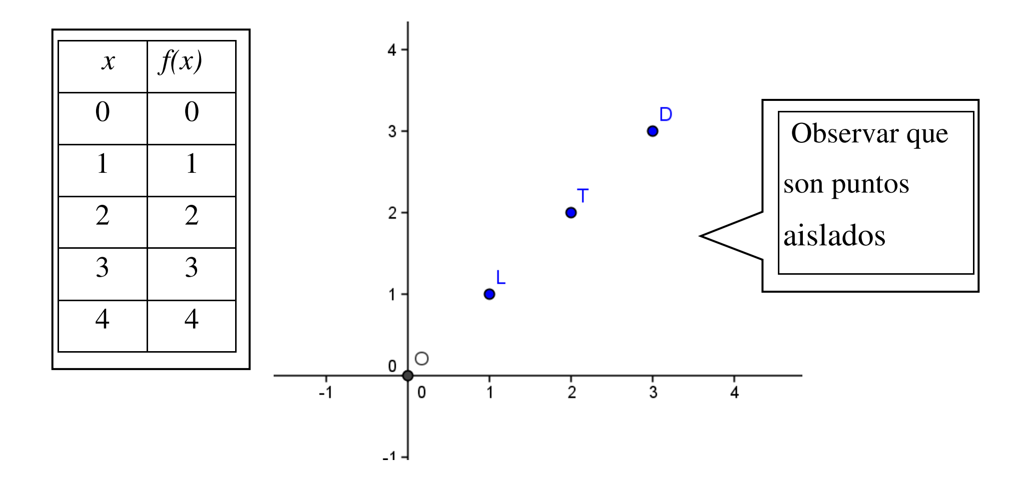
•*F* también es total y funcional, por lo tanto se tiene la función

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \text{ definida por } f(x) = |x|$, pero es distinta a la anterior.

•En este caso Dom (f) = $\mathbb{N}$ y Codominio (f) = $\mathbb{R}$.

•Además Im (f) = $\mathbb{N}$, pues $y \in \mathbb{N}$ resulta que existe $x = y$ en $\mathbb{N}$ tal que $y = |x| = f(x)$.

La representación gráfica (parcial…) de f en un sistema cartesiano:



x	$f(x)$
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4

EJEMPLO 4.3.3

Si definimos ahora la relación $x \, F \, y \quad \leftrightarrow \quad |x| = y$ pero modificando el dominio por $\mathbb{Z}$

es decir $F \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.

Desde ya que es otra relación respecto a las anteriores!!!

• F también es total y funcional, por lo tanto se tiene la función

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$, pero es distinta de la del ejemplo anterior.

• En este caso Dom (f)= $\mathbb{Z}$ y Codominio (f)= $\mathbb{R}$.

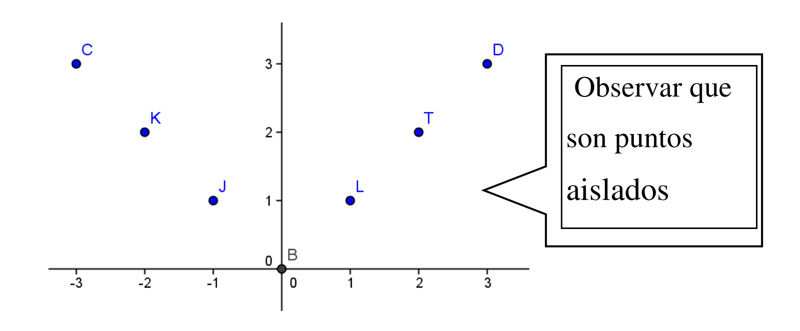
• Además Im (f) = $\mathbb{N}$: pues $y \in \mathbb{N}$ resulta que existe $x = y$ en $\mathbb{N}$

tal que $y = |x| = f(x)$. Además existe $x \in \mathbb{Z}, x = -y$ con $-y \in \mathbb{N}$

tal que $y = |-y| = |\, x \,| = f(x)$

La representación gráfica (parcial…) de *f* en un sistema cartesiano:

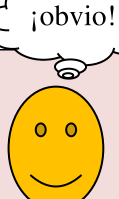
x	$f(x)$
0	0
1	1
2	2
-2	2
-3	3
3	3



Dadas *f* y *g* funciones tales que $f = (F, A, B)$ y $g = (G, C, D)$,

f y ***g*** **son iguales** (se anota ***f = g***) **si y sólo si las ternas que las definen son iguales,**

es decir $F = G, A = C$ y $B = D$.



Por lo tanto las tres funciones de los tres ejemplos anteriores no son iguales. Los ¨dibujitos¨ lo confirman visualmente.

- Uno de los motivos de definir las funciones como ternas es que resulta más claro que para que dos funciones sean iguales no solo la ley de definición debe coincidir sino también dominio y codominio.

¡Acordarse!

EJEMPLO 4.3.4

Definimos la relación *G* de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ por: $x G y \quad \leftrightarrow \quad \sqrt{2x-3} = y$

- *G* no es total, ya que por ejemplo si $x = 0$, resulta $y = \sqrt{-3}$ que no es un número real, por lo tanto no todo número real tiene correspondiente por *G*.

Por lo tanto la relación *G* no es la gráfica de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 4.3.5

Si definimos la relación *F* de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dada por: $x F y \quad \leftrightarrow \quad 2x-3 = y$

- *F* es total, ya que todo número real multiplicado por 2 y disminuido en 3 da un número real, y las operaciones de multiplicación y suma dan resultado único. Podemos justificarlo en general como: $x \in \mathbb{R}$ entonces $2x \in \mathbb{R}$ por ser la multiplicación cerrada en $\mathbb{R}$, entonces $2x-3 \in \mathbb{R}$ por ser la suma cerrada en $\mathbb{R}$, por lo tanto todo elemento x de $\mathbb{R}$ tiene una imagen.
- *F* es funcional ya que el resultado de una multiplicación y una suma es único, por lo tanto podemos escribir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x-3$ resulta f una función tal que
- Dom (f)= $\mathbb{R}$, Codominio (f) = $\mathbb{R}$.
- Probemos que Im(f)= $\mathbb{R}$: dado $y \in \mathbb{R}$ debemos ver que proviene por la función de algún x del dominio, es decir que existe x real tal que $f(x) = y$.

Por definición de la función y debe ser igual a *2 x – 3.*

Aceptemos que vale esa igualdad y probemos que en esas condiciones el x es un número real. Sea entonces "*aceptado*" que $y = 2x-3$ para y real. Por propiedades de las operaciones en $\mathbb{R}$, resulta que $2\ x = y+3$ (pues – 3 tiene opuesto….).

Como 2 es *no nulo* (tiene inverso multiplicativo) y se obtiene $x = \frac{y+3}{2}$, que es un número real ya que la suma de números reales es un número real al igual que el cociente!!!!

Por lo tanto $x = \frac{y+3}{2}$ es el número real que hace que $f(x) = f(\frac{y+3}{2}) = y$, Verifique.

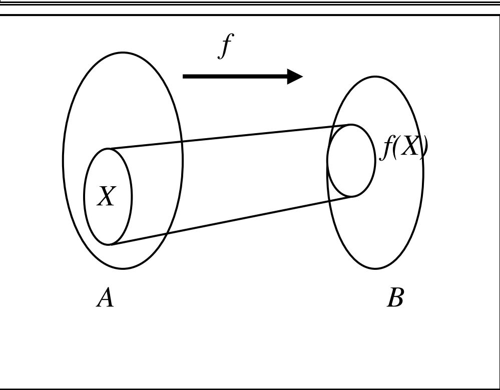
- Notemos que para mostrar que una relación no es total (y por lo tanto no es grafica de una función) alcanza con mostrar un elemento del dominio que no tenga correspondiente, pero para mostrar que sí es total, hay que *demostrarlo* justificando con propiedades conocidas o teoremas que todo elemento del dominio tiene su correspondiente.



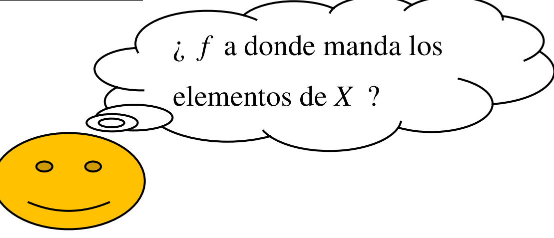
➢ Más Definiciones

Si $f : A \to B$ es una función la **imagen por *f* de un subconjunto *X* de** A es el siguiente subconjunto de B:

$$f(X) = \{y \in B : (\exists x)(x \in X \wedge f(x) = y)\}$$



Informalmente son los elementos de B que provienen por f de algún elemento de X. *Piense por qué se llama "imagen".*



EJEMPLO 4.3.6

a) Sea la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$. Si $X = \{0, 3, 4, 7\}$ resulta que $f(X) = \{0, 3, 4, 7\}$.

b) Dada la función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$. Sea $X = \{-5, -7, 0, 3, 4, 7\}$ resulta que $f(X) = \{0, 3, 4,5, 7\}$.

c) Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=2x-3$.

Si X = {-5, -7, 0, $\sqrt{3}$, 6, 2π} $f(X)$ = {-13, -17, - 3, 2$\sqrt{3}$-3, 9, 4π-3}.

EJEMPLO 4.3.7

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x-3$, y sea X=[-1, 1].

¿Cuál es la imagen de X por la función f?

$f(X)=\{y\in\mathbb{R}: y=f(x) \quad \wedge \quad x\in X\}$, entonces por la definición de X, $-1\le x\le 1$, se tiene trabajando con ambas desigualdades:

Esto son dos desigualdades

Usando leyes de monotonía de suma y multiplicación de números reales

$$\begin{array}{lcl} -1\le x & \text{y} & x\le 1 \\ 2(-1)\le 2x & \text{y} & 2x\le 2.1 \\ -2-3\le 2x-3 & \text{y} & 2x-3\le 2-3 \\ -5\le 2x-3 & \text{y} & 2x-3\le -1 \end{array}$$

Por lo tanto $-5\le 2x-3\le -1$, es decir que $f(x)=2x-3=y$ para $x\in X$ entonces $f(X)=[-5,-1]$.

Si $f: A\to B$ es una función, para un Y subconjunto de B, la **imagen inversa o preimagen por *f*** es el subconjunto de A definido como:

$$f^{-1}(Y)=\{x\in A: f(x)=y \wedge y\in Y\}$$

Informalmente son los elementos de A que por f llegan a algún elemento de Y.

Es mirar por un espejo retrovisor desde Y para A!!

EJEMPLO 4.3.7

Sea la función $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=|x|$.

Si Y = {0, 3, 4, 7} resulta que $f^{-1}(Y)$ = {0, 3, -3, 4, -4, 7, -7}.

EJEMPLO 4.3.8

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=|x|$, y sea Y=[-2, 4].

¿Cuál es la imagen inversa de Y por la función f?

$f^{-1}(Y)=\{x\in\mathbb{R}: y=f(x) \quad \wedge \quad y\in Y\}$,

entonces por definición de Y: $-2\leq y\leq 4$, se tiene por definición de f:

$-2\leq |x|\leq 4 \quad como \quad |x|\geq 0$, se tiene entonces que:

$$0\leq |x|\leq 4$$

Por definición de valor absoluto hay que considerar dos situaciones:
se da 1) ó se da 2). Siendo

1) $Si \quad x\geq 0: \quad |x|=x$ por lo tanto: $0\leq x\leq 4$

2) $Si \quad x\leq 0: \quad |x|=-x$ por lo tanto $0\leq -x\leq 4$

Usando leyes de monotonía de la multiplicación de números reales

$0\leq -x$ y $-x\leq 4$

$x\leq 0$ y $-4\leq x$

¡Esto son dos desigualdades simultaneas!

Es decir: $-4\leq x\leq 0$

Por lo cual de 1) y 2) resultan (se tiene que hacer la unión de las dos alternativas!!):

$0\leq x\leq 4$ es decir $x\in[0,4]$ o $-4\leq x\leq 0$ es decir $x\in[-4,0]$,

entonces $f^{-1}(Y)=[-4,4]$

• La imagen de un conjunto por una función $f : A \to B$, con $A \neq \varnothing$, no puede ser vacía, ya que todos los elementos del dominio tienen correspondiente por *f*, sin embargo, la imagen inversa sí puede serlo, ya que pueden existir elementos en el codominio que no son imagen de ningún elemento del dominio.

EJEMPLO 4.3.9

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$, y sea Y = [-4, -1].

Cuál es la imagen inversa de Y por la función f ?

$f^{-1}(Y) = \{x \in \mathbb{R} : y = f(x) \quad \wedge \quad y \in Y\}$, entonces por definición de Y: $-4 \leq y \leq -1$, además por definición de f : $-4 \leq |x| \leq -1$ como $|x| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, luego no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$ e $y \in Y$ = [-4, -1]. Por lo cual $f^{-1}(Y) = \varnothing$

Recordatorio:
$E \subseteq F$ si y sólo si
$(\forall x)(x \in E$ entonces $x \in F)$

♦ LEMA 4.3.10

Sea $f : A \to B$ una función y sean X e Y subconjuntos de A.

Si $X \subseteq Y$ entonces $f(X) \subseteq f(Y)$

Demostración:

Sea $b \in f(X)$, por definición de imagen $(\exists a)(a \in X \wedge b = f(a))$ por hipótesis $X \subseteq Y$, por lo tanto (el mismo a sirve!!!), $(\exists a)(a \in Y \wedge b = f(a))$ y por definición de imagen por f, se desprende que $b \in f(Y)$.

Por lo tanto $f(X) \subseteq f(Y)$

♦

• Por la propiedad demostrada decimos que f respeta la contención o que f conserva la contención.

EJERCICIO 4.3.11

Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, sean X = [0, 1] e Y = [- 2, 1]. Comprobar la propiedad dada en el LEMA 4.3.10. (Así practica, verifique además que f es función)

> Recordatorio:
>
> $E = F$ si y sólo si
> $(E \subseteq F \wedge F \subseteq E)$

♦ PROPOSICIÓN 4.3.12

Sea $f : A \to B$ una función y sean X e Y subconjuntos de A.

Entonces se tiene: $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

> Recordatorio:
>
> - Cualesquiera sean los conjuntos A, B, C, D si $(A \subseteq C \quad \wedge \quad B \subseteq D)$ entonces $A \cup B \subseteq C \cup D$
> - Para todo conjunto A, $A \cup A = A$

Demostración:

1) Veamos que $f(X) \cup f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$:

Como $X \subseteq X \cup Y$ y $Y \subseteq X \cup Y$ entonces, aplicando el LEMA anterior

$f(X) \subseteq f(X \cup Y)$ y $f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$

Por lo que resulta $f(X) \cup f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$

2) Veamos que $f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$:

Sea $z \in f(X \cup Y)$, por definición de imagen por una función

$(\exists a)(a \in X \cup Y \wedge z = f(a))$ por definición de unión $(\exists a)((a \in X \vee a \in Y) \wedge z = f(a))$

por leyes distributivas (en Lógica) $(\exists a)(\, (a \in X \wedge z = f(a)) \vee (a \in Y \wedge z = f(a))\,)$

por definición de imagen se tiene que

$z \in f(X) \vee z \in f(Y)$

> Recordando lógicamente…..:
>
> $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
> $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

y por definición de unión resulta $z \in f(X) \cup f(Y)$

Por lo tanto $f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$

De 1) y 2) concluimos que $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

♦

- Qué relación hay entre la imagen e imagen inversa de un conjunto por una función?

EJEMPLO 4.3.13

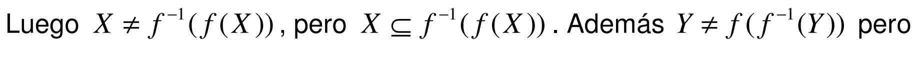
Dada función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$. Sean X = {-2, 3, 4 } $\subseteq A$ e

Y = {-1,0, 2} $\subseteq B$.

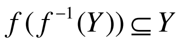
Así $f(X)$ = {2, 3, 4 } y si consideramos $f^{-1}(f(X))$ = {-2, 2, - 3, 3, - 4, 4 }.

Es $f^{-1}(Y) = \{0.2. -2\}$ y si consideramos $f(f^{-1}(Y))$ = {0. 2}.





Luego $X \neq f^{-1}(f(X))$, pero $X \subseteq f^{-1}(f(X))$. Además $Y \neq f(f^{-1}(Y))$ pero



$f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$

Vale la pena hacer algunas demostraciones.

Las demostraciones sobre estos temas tienen como principal objetivo que *se acostumbre* a ¨que es una demostración¨ en Matemática.
La importancia de cómo usar hipótesis en el momento oportuno.

♦ PROPOSICIÓN 4.3.14

Sea $f : A \to B$ una función y sea X subconjunto de A.

Entonces se tiene: $X \subseteq f^{-1}(f(X))$

Demostración:

Analicemos que significa que $a \in f^{-1}(f(X))$, es decir a es preimagen de algún elemento de $f(X)$, entonces por definición de imagen inversa a debe cumplir

$(\exists y)(y \in f(X) \wedge y = f(a))$ **

Consideremos un elemento genérico $a \in X$, $X \subseteq A$ y como f es función todo elemento de X tiene correspondiente, luego $(\exists b)(b \in B \wedge b = f(a))$ por ser b imagen de un elemento de X se tiene $(\exists b)(b \in f(X) \wedge b = f(a))$, es decir **.

Por lo tanto $a \in f^{-1}(f(X))$.

Y resulta que $X \subseteq f^{-1}(f(X))$.

♦

EJERCICIO 4.3.15

Sea $f : A \to B$ una función y sea Y subconjunto de B.

Entonces se tiene: $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$

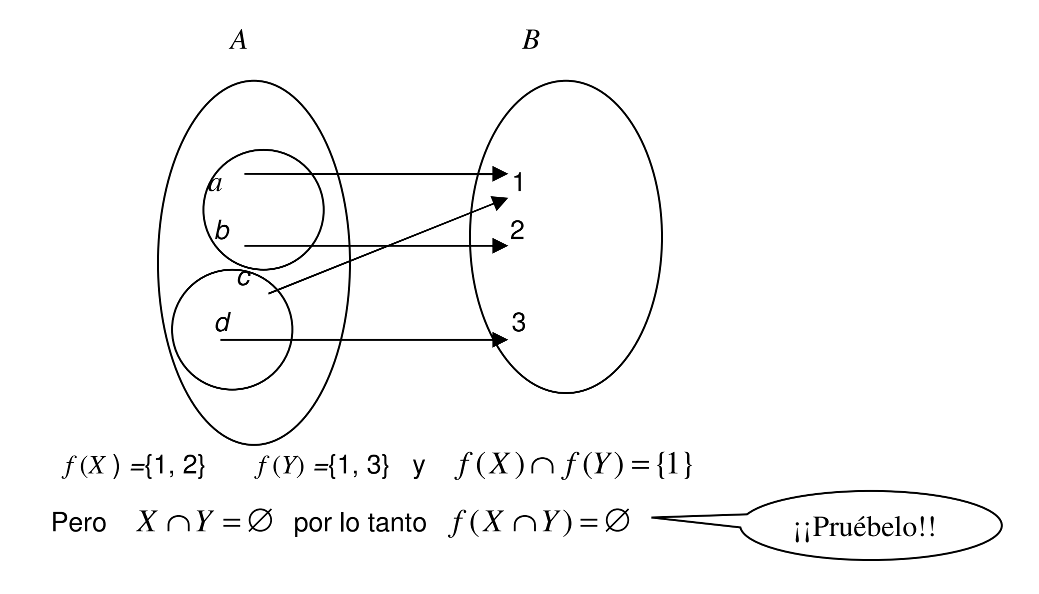
Consideremos algunas otras propiedades de la imagen e imagen inversa de subconjuntos de A y de B para funciones $f : A \to B$ asociadas a operaciones conjuntistas.

Se harán algunas demostraciones y otras quedarán como ejercicios.

- Analicemos ahora qué relación hay entre $f(X \cap Y)$ y $f(X) \cap f(Y)$

Sean A = {*a, b, c, d*} y B = {1, 2, 3} y sean X = {*a, b*} y Y = {*c, d*}

Se define $f : A \to B$ por el siguiente diagrama:



$f(X)$ ={1, 2} $f(Y)$ ={1, 3} y $f(X) \cap f(Y) = \{1\}$

Pero $X \cap Y = \varnothing$ por lo tanto $f(X \cap Y) = \varnothing$

- Entonces $f(X) \cap f(Y) \neq f(X \cap Y)$

♦ LEMA 4.3.16

Sea $f : A \to B$ función y sean X e Y subconjuntos de B.

Si $X \subseteq Y$ entonces $f^{-1}(X) \subseteq f^{-1}(Y)$

Demostración**:**

Sea $a \in f^{-1}(X)$ por definición de imagen inversa $(\exists b)(b \in X \wedge b = f(a))$. Por hipótesis todo elemento de X es elemento de Y, por lo tanto el *b* es también elemento de Y, luego $(\exists b)(b \in Y \wedge b = f(a))$ y por definición de imagen inversa $a \in f^{-1}(Y)$

Por lo cual $f^{-1}(X) \subseteq f^{-1}(Y)$

♦

- Decimos que f^{-1} respeta la contención o que f^{-1} conserva la contención

♦ PROPOSICIÓN 4.3.17:

Sea $f : A \rightarrow B$ función y sean X e Y subconjuntos de B.

Entonces se tiene: $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

Demostración**:**

1) Veamos que $f^{-1}(X \cap Y) \subseteq f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$:

Como $X \cap Y \subseteq X$ y $X \cap Y \subseteq Y$ entonces, por el LEMA anterior

$f^{-1}(X \cap Y) \subseteq f^{-1}(X)$ y $f^{-1}(X \cap Y) \subseteq f^{-1}(Y)$

Por lo tanto $f^{-1}(X \cap Y) \subseteq f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

Recordatorio**:**

- Cualesquiera sean los conjuntos *A, B, C, D*, si $A \subseteq C \;\wedge\; B \subseteq D$ entonces $A \cap B \subseteq C \cap D$
- Para todo conjunto *A* $A \cap A = A$

2) Veamos que $f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(X \cap Y)$:

Sea $z \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$ por definición de intersección $z \in f^{-1}(X) \wedge z \in f^{-1}(Y)$. Por definición de imagen inversa:

$(\exists a)(a \in X \wedge a = f(z)) \quad \wedge \quad (\exists b)(b \in Y \wedge b = f(z))$

y por ser f función el correspondiente de z es único, luego $a = b = f(z)$.

Luego por definición de intersección: $(a \in X \cap Y) \wedge a = f(z)$, lo cual por definición de imagen inversa resulta que $z \in f^{-1}(X \cap Y)$

Por lo tanto $f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(X \cap Y)$

De 1) y 2) concluimos que $f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) = f^{-1}(X \cap Y)$

♦

EJERCICIO 4.3.18

Sea $f : A \rightarrow B$ una función y sean X e Y subconjuntos de B.

Entonces se tiene: $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

Operaciones entre funciones

Hemos definido la composición entre relaciones, del mismo modo para las relaciones que son funciones, se tiene la **composición de funciones**:

Sean $f = (F, A, B)$ y $g = (G, B, C)$ funciones, se considera la gráfica

$$G \circ F = \{(x,z) : (\exists y)(y \in B \wedge (x,y) \in F \wedge (y,z) \in G\} \subseteq A \times C$$

Definimos la terna $g \circ f = (G \circ F, A, C)$ que se lee "***f* compuesta con *g***"

♦ PROPOSICIÓN 4.3.19

Si $f = (F, A, B)$ y $g = (G, B, C)$ son funciones, $g \circ f = (G \circ F, A, C)$ es una función

Demostración**:**

Para probar que $g \circ f$ es una función debemos ver que

$G \circ F$ es total y funcional.

Las 1) y 2) de la definición de función.

* Veamos que $G \circ F$ es total:

i) Por la definición de proyección se tiene $\Pr_1(G \circ F) = \{x \in A : (x,z) \in G \circ F\} \subseteq A$

ii) Sea $x \in A$ por ser f función entonces $(\exists y)(y \in B \wedge (x,y) \in F)$, además para todo elemento y de B por ser g función $(\exists z)(z \in C \wedge (y,z) \in G)$ y por definición de composición de gráficas $(x,z) \in G \circ F$. Por lo cual $x \in \Pr_1(G \circ F)$, por lo tanto

$A \subseteq \Pr_1(G \circ F)$

De i) y ii) se tiene que $\Pr_1(G \circ F) = A$, es decir que $G \circ F$ es total.

* Veamos que $G \circ F$ es funcional:

Sean $(x,z) \in G \circ F \wedge (x,w) \in G \circ F$ por definición de composición de gráficas resulta:

$(\exists y)(y \in B \text{ tal que } (x,y) \in F \wedge (y,z) \in G) \wedge (\exists t)(t \in B \text{ tal que } (x,t) \in F \wedge (t,w) \in G)$

Por ser F funcional, resulta que $y = t$ por ser correspondientes de x. Por eso podemos reemplazar uno de ellos por su igual y se tiene $(y,z) \in G \wedge (y,w) \in G$ que como G es funcional se tiene que $z = w$

Por lo tanto $G \circ F$ es funcional.

♦

- Podemos componer funciones cuando el codominio de la primera es igual al dominio de la segunda. Además, dada una función $f : A \to B$ y una función $g : B \to C$ la función $g \circ f : A \to C,$ está dada por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, como quedo visto en el teorema anterior y la gráfica que la define.

EJEMPLO 4. 3. 20

Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ y $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ las funciones definidas por $f(x) = [x]$ y $g(x) = x + 1$

$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, donde $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g([x]) = [x] + 1$

Grafique en un sistema de coordenadas

Calculemos algunos valores de esta función:

$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g([0]) = [0] + 1 = 0 + 1 = 1$

$(g \circ f)(2,3) = g(f(2,3)) = g([2,3]) = [2,3] + 1 = 2 + 1 = 3$

$(g \circ f)(-1,45) = g(f(-1,45)) = g([-1,45]) = [-1,45] + 1 = -2 + 1 = -1$

EJEMPLO 4.3.21

Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = \dfrac{x-3}{4}$ y $g(x) = x^2 + 2$.

$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\dfrac{x-3}{4}) = (\dfrac{x-3}{4})^2 + 2 = \dfrac{x^2 - 6x + 17}{4}$

- Será lo mismo $g \circ f$ que $f \circ g$?

En algunos casos no están definidas ambas composiciones.

Dígase por qué.

¿Y en los que estén que pasará?

Para las funciones del ejemplo anterior podemos hacer ambas composiciones (¡¡¡justifique!!!).

Ahora hacemos $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 2) = \dfrac{x^2 + 2 - 3}{4} = \dfrac{x^2 - 1}{4}$

¿Son iguales $f \circ g$ y $g \circ f$?

Los dominios de ambas funciones coinciden y también codominio. ¿Es igual la ley de formación de $f \circ g$ y $g \circ f$? A la vista no lo son, pero eso no es suficiente (luego veremos porque…)

Una manera de ver que pasa es tomar un valor particular del dominio de ambas y si su correspondiente es distinto para las funciones dadas las funciones no son iguales:

$(g \circ f)(0) = \dfrac{0^2 - 60 + 17}{4} = \dfrac{17}{4}$ y $(f \circ g)(0) = \dfrac{0^2 - 1}{4} = \dfrac{-1}{4}$.

Por lo tanto $f \circ g \neq g \circ f$

- La composición de funciones **no es conmutativa**.

Dado un conjunto A se define la **función identidad de** A, como $Id_A = (\Delta_A, A, A)$ donde $\Delta_A = \{(x,x) : x \in A\}$ o equivalentemente $Id_A : A \to A$ definida por $Id_A(x) = x$

¿Porque este nombre?

Al componer una función con la función identidad a derecha ¿qué obtenemos?

Sean $Id_A = (\Delta_A, A, A)$ y $f = (F, A, B)$

Como el codominio de la identidad es igual al dominio de *f*, podemos hacer la composición de las gráficas: $F \circ \Delta_A = \{(x,z) : (\exists y)(y \in B \wedge (x,y) \in \Delta_A \wedge (y,z) \in F\}$.

Sea $(x,z) \in F \circ \Delta_A$. Por definición de Δ_A si $(x,y) \in \Delta_A$ entonces $x = y$.

Por lo cual resulta que $(x,z) \in F$.

Por lo tanto $F \circ \Delta_A \subseteq F$

Tomemos ahora un par $(u,v) \in F$ entonces $u \in A \wedge v \in B$.

Además $(\forall x)(x \in A \to (x,x) \in \Delta_A)$, por lo tanto como $u \in A$ es $(u,u) \in \Delta_A$

Entonces si $(u,u) \in \Delta_A \wedge (u,v) \in F$ se tiene $(u,v) \in F \circ \Delta_A$

Por lo cual $F \subseteq F \circ \Delta_A$.

Es decir que $F = F \circ \Delta_A$.

Resulta entonces que si $Id_A = (\Delta_A, A, A)$, $f = (F, A, B)$ entonces

$$f \circ Id_A = (F \circ \Delta_A, A, B) = (F, A, B) = f$$

Con la otra notación: Si $Id_A : A \to A$ y $f : A \to B$ entonces $f \circ Id_A : A \to B$ y $f \circ Id_A = f$

EJERCICIO 4.3. 22

Probar que si $Id_B : B \to B$ y $f : A \to B$ entonces $Id_B \circ f : A \to B$ y $Id_B \circ f = f$

En el cálculo aritmético o algebraico en los conjuntos numéricos habituales donde trabaja ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ por ejemplo) hay un elemento distinguido el **1** que al multiplicarse con otros elementos "no los modifica": a. 1 = 1. a = a.

Por esta propiedad del 1, se dice que 1 es *neutro* para la multiplicación ("no hace nada") En algunas oportunidades al 1 se lo llama *identidad*.

Resulta entonces que la función identidad es **neutro** en la composición de funciones, pero como la composición de funciones no es conmutativa no es de extrañar que haya dos neutros distintos para una función $f : A \to B$, si $A \neq B$.

Tiene un neutro a izquierda y un neutro a derecha: $Id_B \circ f = f = f \circ Id_A$

EJERCICIO 4.3. 23

Sean A un conjunto y sea $X \subseteq A$.

Si $Inc_X : X \to A$ está definida por $Inc_X(x) = x$ para todo $x \in X$. Probar que es una función.

Compare con la $Id_A(x) = x$. ¡Justifique claramente!

La composición de funciones se definió para *dos funciones* y dio una función.
Por eso es que en la propiedad a demostrar los paréntesis NO son irrelevantes, pues cada paréntesis define una función que será compuesta con otra. Es así se tiene la composición de dos funciones

♦ PROPIEDAD 4.3.24

Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ funciones.

Entonces vale la igualdad de las funciones:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Demostración:

$h \circ (g \circ f) = (H \circ (G \circ F), A, D)$ y $(h \circ g) \circ f = ((H \circ G) \circ F, A, D)$

por lo que sabemos de componer dos funciones!!! Observar que los dominios y codominios de la igualdad a demostrar se corresponden.

Sólo nos falta demostrar que vale la igualdad de las gráficas.

Sea $(x, z) \in H \circ (G \circ F)$ por definición de composición se verifica

$(\exists y)((x, y) \in G \circ F \quad \wedge \quad (y, z) \in H)$ y nuevamente por definición de composición

$(\exists y)(\exists u)(((x, u) \in F \quad \wedge \quad (u, y) \in G) \quad \wedge (y, z) \in H)$ por definición de composición y asociatividad de la conjunción:

$(\exists u)((x, u) \in F \quad \wedge \quad (u, z) \in H \circ G)$ volviendo a aplicar la definición de composición

$(x, z) \in (H \circ G) \circ F$.

Como se usaron todas definiciones o equivalencias lógicas, vale el "camino de vuelta", por lo cual se tiene la otra contención, luego las gráficas son iguales.

♦

- Hemos probado que la composición de funciones **es asociativa**

EJERCICIO 4.3.25

Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$f(x) = x + 1$, $\quad g(x) = |x|$, $h(x) = 3x^2$.

a) Representar las tres funciones en un diagrama cartesiano

b) Calcular $((h \circ g) \circ f)(x)$

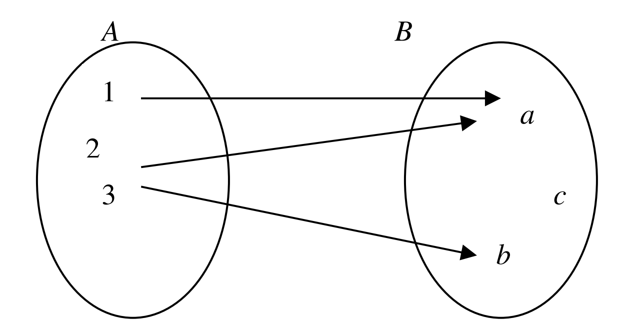
➢ **Más definiciones**

Si $f = (F, A, B)$ es una función, la gráfica F admite una **gráfica inversa**

$$F^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in F\}.$$

EJEMPLO 4.3. 26

Sea $f : A \to B$ definida según el siguiente diagrama:



$F = \{(1,a), (2,a), (3,b)\}$ entonces $F^{-1} = \{(a,1), (a,2),(b,3)\}$

Notemos que F^{-1} no es funcional ni total, por lo cual la terna (F^{-1}, B, A) no es función.

> Recordatorio**:**
>
> Si $F \subseteq A \times B$, $F^{-1} \subseteq B \times A$
>
> $\Pr_1(F) = \Pr_2(F^{-1})$ y $\Pr_2(F) = \Pr_1(F^{-1})$
>
> $\text{Im}(f) = \{y \in B : (\exists x)(x \in A \wedge f(x) = y)\} = \Pr_2(F)$

Analicemos las condiciones que se tienen que cumplir para que una terna (F^{-1}, B, A) sea función si $f = (F, A, B)$ es una función.

> Para que (F^{-1}, B, A) sea función:
>
> 1) $\Pr_1 F^{-1} = B$, para que F^{-1} sea total.
>
> 2) Si $(u,v) \in F^{-1} \wedge (u,w) \in F^{-1}$ entonces $v = w$, para que F^{-1} sea funcional.

Si pedimos que $\Pr_1 F^{-1} = B$ entonces $\Pr_2 F = B$, es decir que el codominio de f es igual a la imagen, por ello todo elemento del codominio es el correspondiente de algún elemento del dominio.

Decimos que una función $f : A \to B$ es **suryectiva**

si y sólo si (S)

$$(\forall y)(y \in B \to (\exists x)(x \in A \wedge f(x) = y))$$

Si pedimos que si $(u,v) \in F^{-1} \quad \wedge \quad (u,w) \in F^{-1}$ entonces $v = w$, entonces se cumple (por definición de gráfica inversa) si $(v,u) \in F \quad \wedge \quad (w,u) \in F$ entonces $v = w$, es decir que dos elementos distintos del dominio no pueden tener la misma imagen o que si dos elementos tienen la misma imagen entonces son iguales.

Decimos que una función $f : A \to B$ es **inyectiva**

si y sólo si

$$(\forall x)(\forall y)(f(x) = f(y) \to x = y) \quad \text{(I)}$$

si y sólo si

$x \neq y \to f(x) \neq f(y)$ (por contrarecíproca)

Dada $f : A \to B$ función para que la terna (F^{-1}, B, A) sea función es necesario y suficiente que

f sea **suryectiva e inyectiva.** En este caso decimos que f **es biyectiva.**

Y anotamos $f^{-1} = (F^{-1}, B, A)$ y la llamamos **función inversa de** f.

$F^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in F\} = \{(y,x) : (x, f(x)) \in F\}$ por lo tanto se tiene

$$f^{-1}(y) = x \text{ si y sólo si } f(x) = y$$

¿Existen funciones invertibles, es decir que son biyectivas y por tanto tienen inversa?

EJEMPLO 4.3.27

Sea A un conjunto y sea $Id_A : A \to A$, que es dada como $Id_A(x) = x$.

(I): Es inyectiva?

Sean dos elementos de A, $x \in A \wedge y \in A \quad \wedge \quad Id_A(x) = Id_A(y)$ como

$Id_A(x) = x \quad \wedge \quad Id_A(y) = y$ se tiene que $x = y$

Por lo tanto Id_A es inyectiva

(S): Es suryectiva?

Consideremos un elemento arbitrario del codominio y analicemos si es correspondiente por la función. Sea $y \in A$, como $Id_A(y) = y$, luego para todo elemento de A hay alguno en A que lo tiene por imagen.

Por lo tanto Id_A es suryectiva

Como $Id_A = (\Delta_A, A, A)$ es biyectiva, analicemos en este caso que se tiene como función inversa: $(Id_A)^{-1} = (\Delta_A^{-1}, A, A)$.

Para lo cual vamos a analizar $\Delta_A^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in \Delta_A\}$ pero $\Delta_A = \{(x, x) : x \in A\}$ entonces $(y, x) = (x, x)$ luego $\Delta_A^{-1} = \{(x, x) : x \in A\} = \Delta_A$.

¡La función identidad de A y su inversa son iguales!
Otra propiedad que la asemeja al 1…

♦ PROPOSICIÓN 4.3.28

Sea $f : A \to B$ y $f^{-1} : B \to A$, f es biyectiva y f^{-1} es la función inversa de f.

Entonces $f^{-1} \circ f : A \to A$ y $f^{-1} \circ f = Id_A$ y además

$f \circ f^{-1} : B \to B$ y $f \circ f^{-1} = Id_B$

Demostración**:**

Recordemos que como f es biyectiva cada elemento del codominio tiene una imagen y ésta es única y por definición $x = f^{-1}(y) \leftrightarrow f(x) = y$

Entonces $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$ entonces $f^{-1} \circ f = Id_A$

Del mismo modo $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$ luego $f \circ f^{-1} = Id_B$

♦

Veamos porque nos referimos a **la inversa** de *f*.

♦ LEMA 4.3.29

Sean $f : A \to B$, $f_1 : B \to A$ y $f_2 : B \to A$, f es biyectiva y se cumplen

$f_1 \circ f = Id_A$ $f_2 \circ f = Id_A$ $f \circ f_1 = Id_B$ y $f \circ f_2 = Id_B$ entonces $f_1 = f_2$.

Demostración**:**

$f_1 = Id_A \circ f_1$ por ser Id_A neutro en la composición, entonces usando la hipótesis:

$f_1 = Id_A \circ f_1 = (f_2 \circ f) \circ f_1$ entonces por asociatividad de la composición y también la hipótesis, además que la Id_B es neutro para la composición:

$f_1 = Id_A \circ f_1 = (f_2 \circ f) \circ f_1 = f_2 \circ (f \circ f_1) = f_2 \circ Id_B = f_2$

Por lo tanto $f_1 = f_2$

♦

Podemos entonces concluir el siguiente teorema:

♦ TEOREMA 4.3.30

Sean $f : A \to B$, $f_1 : B \to A$, f es biyectiva y $f_1 \circ f = Id_A$ y $f \circ f_1 = Id_B$

Entonces como existe $f^{-1} : B \to A$ y $f^{-1} \circ f = Id_A$ y además $f \circ f^{-1} = Id_B$ entonces

$f^{-1} = f_1$

♦

¡¡¡Por lo tanto la función inversa es única!!! Por eso se dice *la inversa* de una función cuando existe.

EJEMPLO 4.3.31

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x+1$. Compruebe que es una función

(I):¿ Es inyectiva?

Sean $x\in\mathbb{R}\wedge y\in\mathbb{R} \quad \wedge \quad f(x)=f(y)$ como $f(x)=2x+1 \quad \wedge \quad f(y)=2y+1$ se tiene que $2x+1=2y+1$, usando propiedades de la suma y multiplicación de los números reales:

$$2x+1-1=2y+1-1 \text{ entonces } \quad 2x=2y \text{ entonces } \quad \frac{2x}{2}=\frac{2y}{2} \text{ luego: } \quad x=y$$

Por lo tanto *f* es inyectiva

(S): ¿Es suryectiva?

Sea $y\in\mathbb{R}$ veamos si existe $x\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=y$. Para lo cual se debe cumplir que $y=2x+1$.

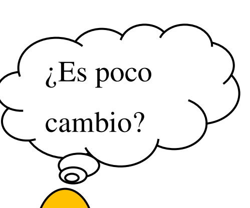
Consideremos que la igualdad se da y veamos que x es un número real. Usemos nuevamente propiedades de suma y multiplicación en los números reales para justificar los pasos. Entonces $y-1=2x$ entonces $\frac{y-1}{2}=x$, como y es un número real $\frac{y-1}{2}$ es un número real, ya que es suma y cociente de números reales, por lo tanto el número real $x=\frac{y-1}{2}$ tiene por imagen a y, pues para cualquier y vale:

$$f\left(\frac{y-1}{2}\right)=2\left(\frac{y-1}{2}\right)+1=y-1+1=y$$

Por lo tanto f es suryectiva.

Llamamos x a la variable de la función inversa. ¡Que no traiga confusión!

La inversa de f existe y es $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$



EJEMPLO 4.3.32

Sea $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ definida por $f(x)=2x+1$ (analizar que es función).



En este ejemplo *sólo hemos cambiado el dominio y el codominio del ejemplo anterior.*

(I)La prueba de la inyectividad para esta f es similar a la dada en el ejemplo anterior pero usando las propiedades de la suma y multiplicación de enteros, por lo cual tiene sus sutilezas….

Consideremos $f(x) = 2x+1 \quad \wedge \quad f(y) = 2y+1$, para x e y números enteros.

$2x+1-1=2y+1-1$ entonces $2x=2y$ entonces ACA ESTA LA DIFERENCIA!!!

El *2 no tiene inverso en los enteros*, por lo tanto lo que vale hacer (por ejemplo) es:

$2x-2y=0,$ como vale la distribuitiva de la multiplicación en la suma: $2.(x - y)=0$.

Usando *que un producto en* $\mathbb{Z}$ *es* 0 *si uno de los factores es* 0:

Como $2 \neq 0$ por lo tanto debe ser $x-y=0$, es decir que $x = y$.

Por lo cual f es inyectiva.

(S) Veamos que pasa con la suryectividad.

Sea cualquier $y \in \mathbb{Z}$ debemos ver si existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x)=y$. Es decir cumplir que

$y = 2x+1$ entonces por ejemplo si $y = 4$, $4=2x+1$ pero entonces 2. (2- x) = 1

y si x es un número entero, resulta que 1 es un número par.

Lo que es absurdo.

¿En lugar de 4, que se puede poner para obtener un absurdo?

Por lo tanto, algunos elementos del codominio no son correspondientes de un elemento del dominio, por lo tanto no hay ningún entero que tenga como correspondiente al 4.

Por lo cual f no es suryectiva.

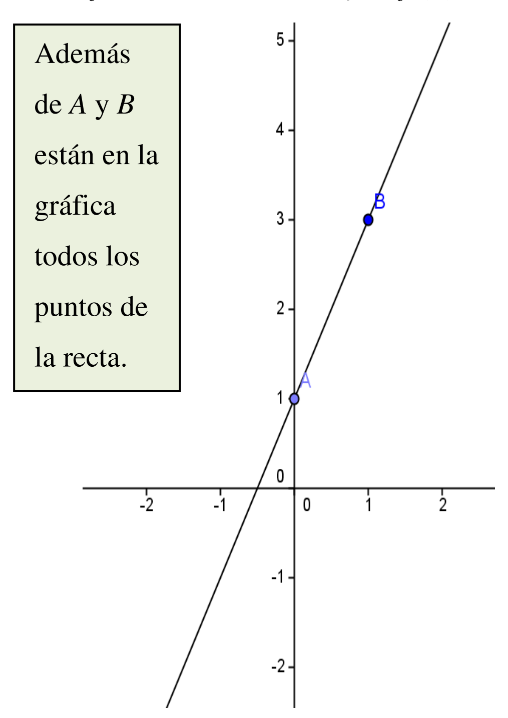
Entonces f no es biyectiva, por eso no es invertible (no tiene inversa)

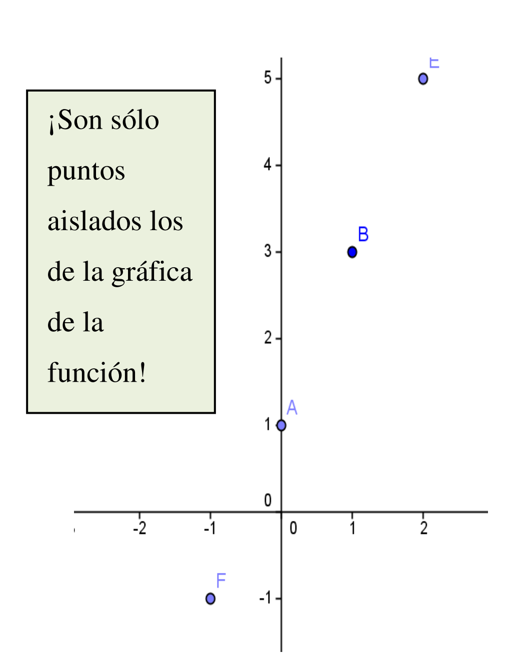
* Representar las funciones es una buena guía para analizar sus propiedades.

**Recuerde que si las funciones tienen dominio y codominio contenidos en los números reales hacer una tabla de valores para encontrar los puntos que cumplen la condición dada por la función y puede usar los sistemas de cartesianos para su representación.

Veamos las representaciones de las funciones recientemente analizadas.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x+1$ $\qquad$ $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ definida por $f(x)=2x+1$





EJEMPLO 4.3.33

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=|x|$

(I)¿Es inyectiva?

Sean $x\in\mathbb{R}\wedge y\in\mathbb{R} \quad \wedge \quad f(x)=f(y)$, como $f(x)=|x| \quad \wedge \quad f(y)=|y|$ se tiene que $|x|=|y|$, pero si dos números tienen el mismo valor absoluto no son necesariamente iguales. Para ver que no se cumple basta dar un contraejemplo, podemos ver que $|2|=2 \quad y \quad |-2|=2$ por lo tanto $f(2)=f(-2)$

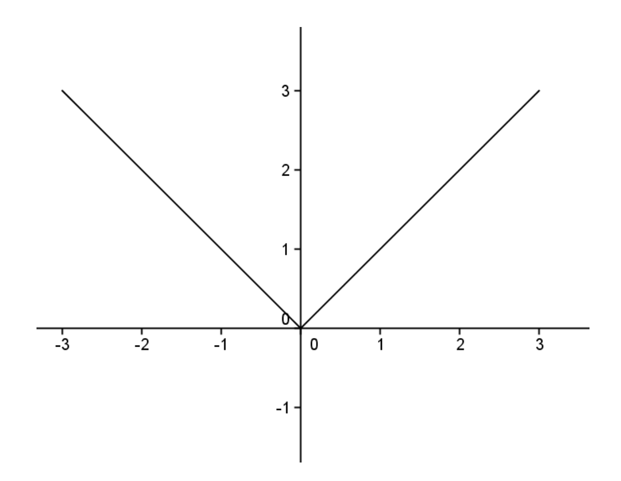
Por lo tanto f no es inyectiva

(S)¿Es suryectiva?

Sea $y\in\mathbb{R}$ habrá $x\in\mathbb{R}$ que cumpla $y=|x|$, pero como y es un número real cualquiera vemos que los negativos no son el valor absoluto de ningún número real, por ejemplo $-1\neq|x|$, para todo x real.

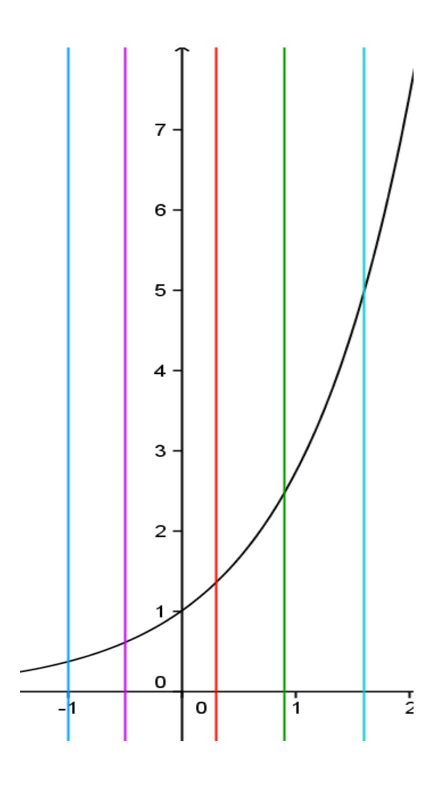
Por lo tanto f no es suryectiva.

Recordemos la gráfica de la función: (la tabla la hicimos en 4.3.1)



> Veamos cómo geométricamente podemos analizar las propiedades de inyectividad y suryectividad de una función $f : A \to B$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}$.

Supongamos que $f : A \to B$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}$ tal que su grafica está dada en el sistema cartesiano por trazo negro y $A = [-1,5\,;2]$ y $B = [0\,;7,5]$



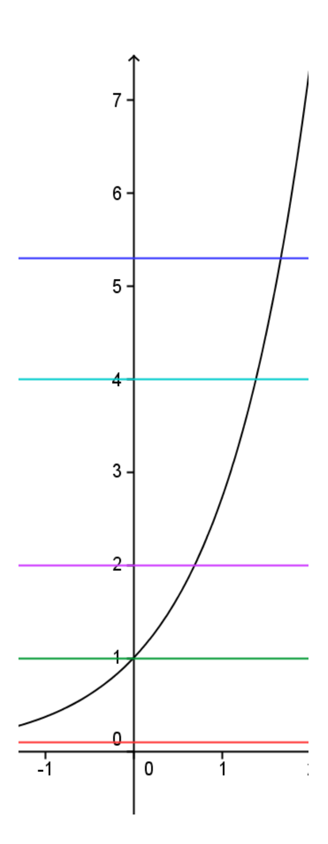
Primero,, ¿ es función?

Cualquier recta paralela al eje y corta en un único punto la gráfica de la f. Esto significa que todo elemento de A tiene un único correspondiente. Es decir f es función de A en B.

¿Para la inyectividad?

Toda recta que pase por un punto cualquiera del codominio corta a la gráfica de la función en a lo sumo un punto. Es decir cada elemento del codominio de f a lo sumo proviene de un único elemento del dominio.

Es decir la función f es inyectiva.



¿Para la suryectividad?

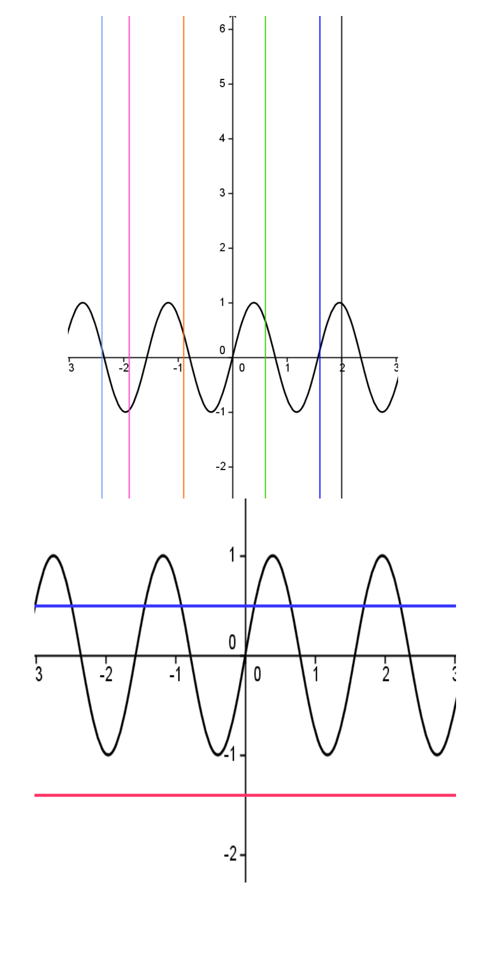
Toda recta que pase por un punto cualquiera del codominio de f debe cortar la gráfica de la función.

Observar que esta función NO es suryectiva *pues si pasamos una recta muy próxima al* (0,0) NO corta la gráfica de la función f.

Veamos otro ejemplo:

Supongamos que $f : A \to B$ con $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}$ tal que su grafica está dada por:

Sea $A = [-3;3]$ y $B = [-2,5;6,3]$



Claramente que es f función pues las rectas paralelas al eje y que pasen por cualquier punto del dominio cortaran en un solo punto a la gráfica de f.



No es inyectiva ni suryectiva:

hay rectas paralelas al eje y por puntos del codominio que cortan la gráfica de la función f en más de un punto. Hay otras rectas paralelas al eje y por puntos del codominio que NO cortan la gráfica de la función f.

EJERCICIO 4.3.34

Haga gráficas de funciones f : [-2, 2] $\rightarrow$ (-1 , 5] tales que:

a) f sea inyectiva y no suryectiva.
b) f sea inyectiva y suryectiva.
c) f no sea inyectiva y sea suryectiva.
d) f no sea inyectiva y no sea suryectiva.

♦ PROPOSICIÓN 4.3.35

Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$, si $g \circ f$ es inyectiva entonces f es inyectiva.

Demostración**:**

Como $g \circ f$ es inyectiva $(\forall x)(\forall y)((g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ entonces $x = y)$

Veamos que f es inyectiva, es decir: $(\forall x)(\forall y)(f(x) = f(y)$ entonces $x = y)$

Sean $x \in A, y \in A \quad \wedge f(x) = f(y)$, si aplicamos g a ambos miembros por ser g función $g(f(x)) = g(f(y))$ entonces $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ y por ser la composición inyectiva resulta que $x = y$

♦

EJERCICIO 4.3.36

Probar que si $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ y $g \circ f$ es suryectiva entonces g es suryectiva.

♦ PROPOSICIÓN 4.3.37

Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$, si f y g son suryectivas entonces $g \circ f$ es suryectiva.

Demostración:

Como f y g son suryectivas $(\forall y)(y \in B$ entonces $(\exists x)(x \in A \wedge f(x) = y))$ y $(\forall z)(z \in C$ entonces $(\exists y)(y \in B \wedge g(y) = z))$

Veamos que $(\forall z)(z \in C$ entonces $(\exists x)(x \in A \quad \wedge (g \circ f)(x) = z))$

Sea $z \in C$ entonces por ser g suryectiva $(\exists y)(y \in B : g(y) = z)$ entonces por ser f suryectiva y como $y \in B$, $(\exists x)(x \in A$ tal que $f(x) = y)$ entonces reemplazando se tiene $z = g(f(x))$ es decir $z = (g \circ f)(x)$. Por lo tanto $g \circ f$ es suryectiva

♦

EJERCICIO 4.3.38

Probar que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$, si f y g son inyectivas entonces $g \circ f$ es inyectiva .

EJERCICIO 4.3.39:

Probar que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$, si f y g son biyectivas entonces $g \circ f$ tiene inversa y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

(idea usar TEOREMA 4.3.30)

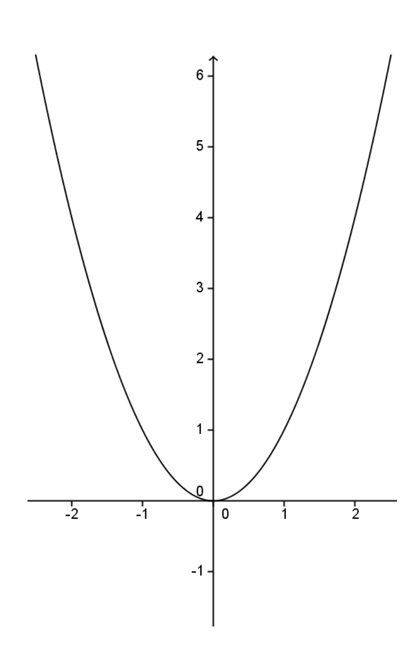
➢ Sigamos indagando en funciones

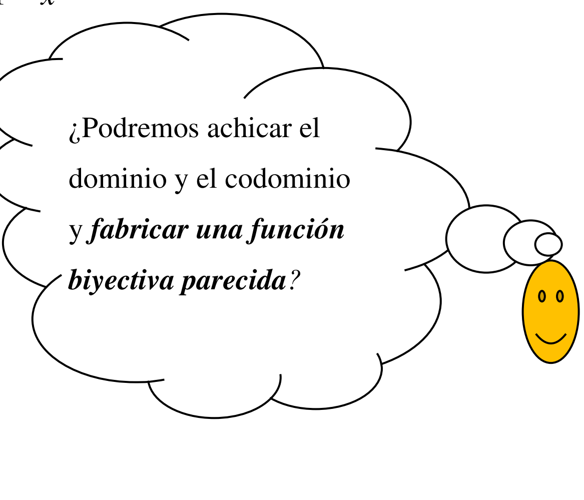
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$

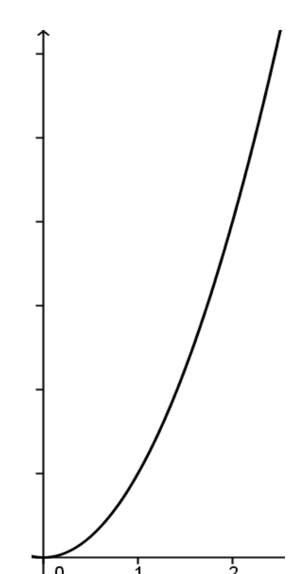
Esta función no es inyectiva ya que por ejemplo $f(1) = 1^2 = 1$ y $f(-1) = (-1)^2 = 1$

1 y -1 tienen la misma imagen.

Tampoco es suryectiva ya que por ejemplo el -1 no es imagen de ningún elemento del dominio, no existe un número real x tal que $-1 = x^2$







Definimos $g:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ siendo $g(x) = x^2$

Esta función es ahora inyectiva ya que si

$g(x) = g(y) \to \quad x^2 = y^2 \to \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{y^2} \to \quad |x| = |y|$

Y como x e y son positivos $x = y$

También es suryectiva ya que si $y \in R^+, (\exists x)(x \in \mathbb{R}^+ \wedge g(x) = y), \qquad x = \pm\sqrt{y}$

x siempre existe porque y es positivo, por lo tanto la raíz cuadrada de un número positivo está bien definida y tiene dos resultados, uno positivo y uno negativo, pero el valor de x a considerar es el positivo por ser el dominio $\mathbb{R}^+$

Qué ocurre con la f y la g dadas? Tienen igual ley de definición $y = x^2$, pero sus dominios y codominios son distintos, NO son la misma función!!!

Este ejemplo nos motiva la siguiente definición:

Dadas $f = (F,A,B)$ y $g = (G,C,D)$ tales que : $G \subseteq F, \quad C \subseteq A \quad$ y $\quad D \subseteq B$

Decimos entonces que g **es una restricción de** f o que f **es una extensión de** g

Observar que como $G \subseteq F$ entonces $(\forall x)(x \in C \to g(x) = f(x))$

Por lo tanto de acuerdo a la última definición, para las funciones del ejemplo anterior, $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ extiende a $g:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ siendo $g(x) = x^2$.

EJERCICIO 4.3.40

Sea $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g:\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definidas por si $f(x) = |x|$ y $g(x) = x$.

Mostrar que f extiende a g.

EJERCICIO 4.3.41

Probar que si $f: A \to B$ y $g: C \to D$ tal que f es inyectiva y g es restricción de f entonces g es inyectiva.

EJERCICIO 4.3.42

Probar que si $f: A \to B$ y $g: C \to D$ tal que f es suryectiva y g es restricción de f entonces g no necesariamente es suryectiva.

4. Funciones Especiales: Estructuras Algebraicas

Vamos a considerar las definiciones de las estructuras algebraicas básicas. Este nombre involucra como ejemplos a los conjuntos numéricos conjuntamente con las operaciones definidas sobre ellos y de acuerdo a las propiedades que estas operaciones tienen se les dan distintos nombres. Justamente estos ejemplos (los numéricos) son los motivadores de la generalización.

Dado un conjunto A, una **operación binaria sobre A** es una **función**

$$*: A \times A \to A$$

Es decir, a cada par de elementos de A le corresponde un único elemento de A.

Notación: $*((a,b)) = a * b$

EJEMPLOS 4.4.1

1) En $\mathbb{N}$ se tiene que $+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ siendo $+$ la suma habitual de los números naturales.
2) En $\mathbb{Z}$ se tiene que $+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ siendo $+$ la suma habitual de los números enteros.
3) En $\mathbb{R}$ se tiene que $. : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siendo $.$ el producto habitual de los números reales.

EJERCICIO 4.4.2

Cuáles de las siguientes son operaciones binarias sobre el conjunto de puntos del plano:

1) $p_1 * p_2$ = distancia de p_1 a p_2
2) $p_1 * p_2$ = recta que pasa por p_1 y p_2
3) $p_1 * p_2$ = el punto medio entre p_1 y p_2

EJERCICIO 4.4.3

Dado un conjunto *E*. Analizar que son operaciones binarias sobre $\mathcal{P}(E)$ (conjunto de partes de *E*) la $\cup$ (unión), la $\cap$ (intersección), la Δ (diferencia simétrica). Verificarlo.

¡más nombres!

- ***Propiedades de operaciones binarias sobre A y definiciones***.

Dada una operación binaria * sobre un conjunto A, anotaremos esa situación por el par $(A, *)$.

Es usual identificar $(A,*)$ con el conjunto subyacente A . (Pero no es lo correcto, salvo casos muy obvios).

El par $(A, *)$ es una **estructura algebraica** que recibirá distintos nombres según las propiedades que tenga * sobre A.

Dado un conjunto A y una **operación binaria sobre A,** se dice que $*$ **es asociativa** si para cualesquiera sean a, b y c en A se cumple $a * (b * c)= (a * b) * c$

Dado un conjunto A y una **operación binaria sobre A,** se dice que $*$ **es conmutativa** si para cualesquiera sean a y b en A se cumple $a * b= b * a$

Dado $(A, *)$ tal que $*$ es asociativa diremos que el par $(A, *)$ es un **monoide.**
Se llama **monoide conmutativo** si $*$ es conmutativa.

EJERCICIO 4.4.4

1) Justificar que $(\mathbb{N}, +)$ es un monoide.
2) Justificar $(\mathcal{P}(E), \cap)$ es un monoide.
3) Además probar que ambos son conmutativos.

Dado un monoide $(A, *)$ diremos que tiene **elemento neutro** si existe $e\in A$ tal que para todo $a\in A$ se verifica que $a* e = e* a= a$.

En caso de haber definidas sobre A más de una operación binaria se aclarará neutro respecto de que operación.

◆ TEOREMA 4.4.5

Si el monoide $(A,*)$ tiene neutro, el neutro es único.

Demostración:

Supongamos que existen dos neutros en $(A,*)$, es decir existen $e_1 \in A$ y $e_2 \in A$ tales que para todo $a \in A$ se verifican $a * e_1 = e_1 * a = a$ y $a * e_2 = e_2 * a = a$.

Por estas igualdades se puede considerar: $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$ pues las igualdades valen para todo $a \in A$, en particular para $e_1 \in A$ y $e_2 \in A$.

♦

Un monoide $(A, *)$ es un **semigrupo** si * tiene elemento neutro.

EJERCICIO 4.4.6

1) Justificar que el monoide $(\mathbb{N}, +)$ es un semigrupo conmutativo.

2) Sea A un conjunto y sea $\mathcal{F} = \{ f : f$ es función y $f: A \to A \}$.

Consideremos la ley de composición de funciones ° sobre $\mathcal{F}$. Verificar que $(\mathcal{F}, \circ)$ es un semigrupo. ¿Es conmutativo?

Dado un monoide $(A, *)$ con neutro e, diremos que $a \in A$ tiene **elemento opuesto (**o **inverso) respecto de *** si existe $a' \in A$ tal que $a' * a = a * a' = e$

Dependiendo de la notación que se utilice para * será la notación y la terminología que se utilice para a'.

EJERCICIO 4.4.7

Sea $(A, *)$ un semigrupo. Demostrar que si $a \in A$ tiene opuesto, el opuesto es único.

(Idea de la demostración: basta suponer que existen dos elementos opuestos para a y ver que coinciden.)

Un monoide $(A, *)$ tal que todo elemento tiene opuesto es un **grupo.**

EJERCICIO 4.4.8

Justificar que son grupos ($\mathbb{Z}$, +), ($\mathbb{R}$, +) y ($\mathcal{P}(E)$, Δ) . Y que ($\mathbb{N}$, +) no lo es.

Un grupo (A,*) se dice **abeliano o conmutativo** si * es conmutativa.

EJERCICIO 4.4.9

Analizar si son grupos conmutativos ($\mathbb{Z}$, +), ($\mathbb{R}$, +) y ($\mathcal{P}(E)$, Δ) .

EJEMPLO 4.4.10

1) Sea ($\mathbb{Z}$, $\oplus$) donde se define $a\oplus b= a+ b-1$, siendo + la suma habitual en $\mathbb{Z}$.

Analizar que estructura tiene ($\mathbb{Z}$, $\oplus$)

Está claro que $\oplus$ es una operación binaria.

Veamos si es asociativa: sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, calculemos $a\oplus (b\oplus c)=a+(b+c-1)-1=a+b+c-2$

por otra parte $(a\oplus b)\oplus c=(a+b-1)+c-1=a+b+c-2$. Luego $\oplus$ es asociativa.

Por lo tanto ($\mathbb{Z}$, $\oplus$) es un monoide.

Veamos si tiene elemento neutro; de existir debe ser un $e\in \mathbb{Z}$ tal que:

$a\oplus e = e \oplus a = a$, es decir que $a = a+ e -1= e+ a -1$, por lo tanto $e=1$

Luego ($\mathbb{Z}$, $\oplus$) es un semigrupo. Además debido a la conmutatividad de + resulta que $a\oplus b = b\oplus a$, por lo cual ($\mathbb{Z}$,$\oplus$) es un semigrupo conmutativo.

Para ver si es grupo hay que analizar si todo entero tiene opuesto (respecto de $\oplus$), es decir si dado $a\in \mathbb{Z}$, existe $a' \in \mathbb{Z}$ tal que $a'\oplus a = a\oplus a' = 1$

Es decir que $a'\oplus a = a\oplus a' = a+ a'- 1=1$, por lo cual $a' = 2-a$ que es un entero.

Por lo tanto ($\mathbb{Z}$,$\oplus$) es un grupo conmutativo.

2) Sea ($\mathbb{Z}$,$\otimes$) donde se define $a\otimes b= a . b +1$, siendo + la suma habitual en $\mathbb{Z}$ y . multiplicación usual en $\mathbb{Z}$.

Analizar que estructura tiene ($\mathbb{Z}$,$\otimes$) .

Es claro que $\otimes$ es binaria sobre $\mathbb{Z}$.

Veamos si es asociativa: sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, calculemos $a\otimes (b\otimes c)= a \otimes (b . c+1)= a.(b.c)+ a+1$

por otra parte $(a\otimes b) \otimes c=(a .b+1) \otimes c = (a.b). c+ c+ 1$ y si $a\neq c$, los resultados son distintos. (Verifique por ejemplo con a = 3 y c = -2). Luego $\otimes$ NO es asociativa. Luego no es monoide, ni grupo….

Este ejemplo aclara por qué No es correcto sólo hablar del monoide, grupo ó cualquier estructura A, pues un mismo A puede tener definida sobre él distintas operaciones y producir distinta estructura.

- ***Más estructuras***

Veamos que si sobre un conjunto A se definen dos operaciones binarias resultan distintos tipos de estructuras algebraicas dependiendo también de las propiedades de las operaciones.

Sean $*$ y $\otimes$ dos operaciones binarias sobre un conjunto A.

Si $(A, *)$ es un grupo conmutativo, $(A, \otimes)$ es un monoide y además **⊗ se distribuye en *,** esto es:

Para cualesquiera sean a, b y c en A se cumplen

$$a \otimes (b * c) = (a \otimes b) * (a \otimes c)$$

$$(a * b) \otimes c = (a \otimes c) * (b \otimes c)$$

entonces la terna $(A, *, \otimes)$ **es un anillo**.

Cuando el monoide $(A, \otimes)$ tiene propiedades adicionales se le da al anillo distintas denominaciones

EJEMPLOS 4.4.11

1)El anillo de los números enteros $(\mathbb{Z}, +, .)$ con las operaciones habituales de $+$ y $.$ es el ejemplo motivador de la definición.

2)Es anillo $(\mathbb{R}, +, .)$ siendo $+$ y $.$ las operaciones habituales en $\mathbb{R}$.

3) Consideremos $[0,1] \subset \mathbb{R}$ y sea $C[0,1] = \{f : f \text{ continua} \wedge f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$.

Si $f, g \in C[0,1]$ se definen sobre $C[0,1]$ las operaciones $\oplus$ y $\bullet$ como sigue:

$f \oplus g$ es la función definida punto a punto

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x) \text{ para cada } x \in [0,1]$$

con $+$ es la suma usual en $\mathbb{R}$. Claramente $f \oplus g \in C[0,1]$ (lo sabe de Análisis Matemático!!!)

¿No estoy en Algebra?

$f \bullet g$ es la función definida punto a punto

$$(f \bullet g)(x) = f(x) \,.\, g(x) \text{ para cada } x \in [0,1]$$

Dónde . es el producto usual en $\mathbb{R}$. Claramente $f \bullet g \in$ C[0,1] (lo sabe de Análisis Matemático!!!)

Es inmediato que (C[0,1], ⊕,•) es un anillo y la función constante

$f_0(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$ es el neutro de la suma. Es el **anillo de las funciones continuas** definidas sobre [0, 1].

4) El ejemplo anterior se puede generalizar en algún sentido. Si A es un conjunto no vacío y $(B, +, .)$ es un anillo, sea ***F*** $= \{ f : f$ función $\wedge$ $f : A \to B \}$. Se definen sobre ***F*** las operaciones ⊕ y • de manera análoga que en el ejemplo anterior y resulta que (***F***, ⊕,•) es un anillo. Pruébelo!!!!

- ***Más definiciones, anillos más costosos….***

Un anillo $(A, *, \otimes)$ es un **anillo con unidad** si el monoide $(A, \otimes)$ es un semigrupo. Es decir existe un elemento neutro para la operación ⊗ .

En el caso que ambos neutros coincidan se tiene un anillo trivial de un solo elemento.

Un anillo $(A, *, \otimes)$ es un **anillo conmutativo** si el monoide $(A, \otimes)$ es conmutativo.

EJEMPLO 4.4. 12

Los anillos del EJEMPLO 4.4.11 1), 2) y 3) son con unidad.

En el anillo (C[0,1], ⊕,•) la función constante $f_1(x) = 1$ para todo $x \in [0,1]$ es la unidad.

Estos anillos son conmutativos.

En el caso de (***F***, ⊕,•) definido en 4) dependen sus propiedades del tipo de anillo que sea $(B,+,.)$.

EJERCICIO 4.4. 13

1) Sea el conjunto $T = \{o , e\}$. Se definen sobre T las operaciones + y • por las siguientes igualdades: $o + e = e$; $e + o = e$; $o + o = o$; $e + e = o$

$o \bullet e = o$; $e \bullet o = o$; $o \bullet o = o$; $e \bullet e = e$

Demostrar que (T, +, •) es un anillo conmutativo con unidad.

2) Sea $L = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Sean sobre *L* las operaciones $+$ y $\bullet$ definidas por:

$$(a, b, c) + (d, e, f) = (a+ d, b+ e, c+ f)$$

$$(a, b, c) \bullet (d, e, f) = (a. d, b. d+ c. e, c. f)$$

Probar que $(L, +, \bullet)$ es un anillo. Que la unidad es $u = (1, 0, 1)$ y no es conmutativo (verificarlo por ejemplo con $(0, 1, 0)$ y $(1, 0, 0)$)

3) Sea $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ para un conjunto *E*. Demostrar que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ es un anillo con unidad. ¿Qué ocurre si *E* es el conjunto vacío?

Un anillo $(A, *, \otimes)$ es un **anillo de integridad** si $a \otimes b= 0$ entonces $a= 0$ ó $b= 0$.

EJEMPLO 4.4. 14

1) Son anillos de integridad $(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$.

2) $(L, +, \bullet)$ no es de integridad: $(0,1,0) \bullet (0, 1, 0)= (0, 0, 0)$

Un anillo $(A, *, \otimes)$ es un ***cuerpo*** si todo elemento no nulo de A tiene inverso respecto de $\otimes$.

EJERCICIO 4.4.15

Demostrar las siguientes afirmaciones:

1) Son cuerpos $(\mathbb{R}, +, .)$ y $(T, +, \bullet)$ (el dado en 4.4.13) .
2) No son cuerpos $(L, +, \bullet)$ y $(C[0,1], \oplus, \bullet)$.
3) Sea $A = \{a+ b\, i +c\, j +d\, k: a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ *i, j, k* representan números hipercomplejos (no son números reales). En la definición de los objetos de A los símbolos $+$ NO representan suma.

   Hamilton llamó **cuaternios ó cuaterniones** a los elementos de A dotado de las operaciones definidas por:

   $a_1+b_1 i+c_1 j+d_1 k \quad \oplus \quad a_2+b_2 i+c_2 j+d_2 k = a_1 +a_2 + (b_1 +b_2)i+ (c_1 + c_2)j+ (d_1+d_2)k$

y la multiplicación ⊗ está dada por la siguiente tabla:

⊗	*1*	*i*	*j*	*k*
1	*1*	*i*	*j*	*k*
i	*i*	*-1*	*k*	*-j*
j	*j*	*-k*	*-1*	*i*
k	*k*	*j*	*-i*	*-1*

Se amplía la definición de ⊗ para cualquier cuaternio haciendo cumplir la propiedad distributiva del producto ⊗ en la suma ⊕ .
De la tabla se desprende que el producto ⊗ no es conmutativo.
Probar que (A, ⊕, ⊗) es un cuerpo.

5. Relaciones en un conjunto

En el inicio del capítulo hemos visto la introducción a un tema importante que se inmiscuye en casi todos los campos de la Matemática y otras ciencias que son las relaciones, que se introdujeron como $R \subseteq A \times B$. Vimos casos particulares como las funciones y las operaciones. Ahora en este apartado estudiaremos un tipo particular de relación, cuando $A = B$.

Se dice entonces que **R es una relación definida en A** o **sobre A,** o simplemente **R** es **una relación en A** o **sobre A**, si $\boldsymbol{R \subseteq A \times A}$.

Ya se han visto algunos ejemplos (4.1.4 ; 4.1.5 partes 3), 4), 5) 6); 4.2.5 parte 1); 4.2.20 y 4.2.23 son algunos) de este tipo de relación. Las relaciones sobre el conjunto de *los seres humanos* son motivo de estudio de distintas disciplinas. Las relaciones sobre los conjuntos numéricos son mayormente estudiadas por la Matemática y han derivado aplicaciones a otras disciplinas.

Las relaciones en un conjunto, se dividen según las propiedades que verifican y hay, entre otras, dos grandes clases importantes: las ***relaciones de equivalencia*** y las ***relaciones de orden.*** Fundamentalmente las primeras producen una “clasificación” de los elementos del conjunto en distintos compartimentos o clases. El segundo tipo

"ordena" los elementos del conjunto donde está definida. Estos tipos de relaciones formalizan dos acciones muy habituales sobre los objetos. Ambos tipos generalizan las propiedades de la relación de igualdad.

Piense que propiedades tiene la relación de igualdad (por ejemplo, en el conjunto de los números).

Como siempre.

Para abordar estas relaciones haremos varias definiciones.

Una **relación R en el conjunto** A es un subconjunto de $A \times A$.

R es un conjunto de pares ordenados.

- *Algunos nombres para las propiedades de las relaciones sobre A.*

Si todo elemento del conjunto A está relacionado con sí mismo la **relación** se dice **reflexiva**.

Simbólicamente se expresa: $(\forall x)(\, x \in A \rightarrow xRx\,)$ o $(\forall x)(\, x \in A \rightarrow (x,x) \in R\,)$

Luego, para que la relación en A sea reflexiva *debe ser verdadero ese condicional para cada uno de los elementos de A.*

Una **relación** R en A se dice **simétrica** cada vez que *un elemento de A está relacionado con otro, este último lo esté con el primero.*

Simbólicamente por:

$$(\forall x)(\forall y)(\ (x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R\ ) \quad \text{o} \quad (\forall x)(\forall y)(\, x\,R\,y \rightarrow y\,R\,x\,)$$

Lo cual lo podemos expresar diciendo: si un par ordenado es elemento de R, también lo es su "dado vuelta".

Una **relación** R en A se dice **antisimétrica** cuando *cada vez que un elemento de* A *está relacionado con otro y este último lo está con el primero, es el caso que ambos elementos son iguales.*
Simbólicamente por:

$$(\forall x)(\forall y)(\ (\ (x,y)\in R\ \wedge\ (y,x)\in R\ )\ \rightarrow\ x=y\ )\qquad \text{o}$$

$$(\forall x)(\forall y)(\ (\ x\,R\,y\ \wedge\ y\,R\,x\ )\ \rightarrow\ x=y\ )$$

También lo podemos expresar diciendo: si un par ordenado es elemento de R y también lo es su "dado vuelta" entonces ambos elementos del par son el mismo.

Esta definición de antisimétrica es equivalente a formular:

$$(\forall x)(\forall y)(\ (\ (x,y)\in R\ \wedge\ x\neq y\ )\ \rightarrow\ (y,x)\notin R\ )\qquad \text{o}$$

$$(\forall x)(\forall y)(\ (\ x\,R\,y\ \wedge\ x\neq y\ )\ \rightarrow\ y\not R\,x\ )$$

Como se verá en los ejemplos, simétrica y antisimétrica no son conceptos "opuestos" para una relación R en A.

Una **relación** R en A se dice **transitiva** cuando *cada vez que un elemento de* A *está relacionado con otro y este último lo está con un tercero, también el primero está relacionado con el tercero.*
Simbólicamente:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\ (\ (x,y)\in R\ \wedge\ (y,z)\in R\ )\ \rightarrow\ (x,z)\in R\ )\qquad \text{o}$$

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\ (\ x\,R\,y\ \wedge\ y\,R\,z\ )\ \rightarrow\ x\,R\,z\ )$$

La relación en A es transitiva si se trasmite….

♦ Ya hemos destacado que R puede ser subconjunto de diferentes productos cartesianos, pero al decir que R es una relación en un conjunto, esta ambigüedad se elimina. Esta precisión es importante para poder analizar las propiedades.

EJEMPLO 4.5.1

a) Sean las relaciones

R_1 = { (2, 3), (-2, -2) , (2, 2), (3, 3), (3, 2) }

R_2 = { (2, 3), (3, 3) , (-2, 3) }

R_3 = { (-1, 2), (0, -2) , (1, 5), (2, -1), (-2, 0), (5, 1) }

¿Son reflexivas? ¿Son simétricas? ¿Son transitivas? ¿Son antisimétricas ?

Observación muy importante

Las preguntas están mal formuladas y NO se podrán contestar.

Pues no se ha dado el conjunto de partida de la relación. ¿Cuál es A?

La reflexividad depende claramente sobre qué conjunto se define R. En la definición se dice *todo elemento de A debe estar relacionado con si mismo*....

Para A = { 2, 3, -2}, R_1 es reflexiva pero NO lo son las otras relaciones.

Pero si A = { 1, 2, 3, -2} , ninguna de esas relaciones es reflexiva.

Más aún: la relación R_3 No es una relación en esos conjuntos dados como A.

El "menor" conjunto A para el cual la relación R_3 está definida es A = { 1, 2, 5, -2, -1, 0}.

¿Por qué? ¿Sirve ese A como conjunto de partida de las otras relaciones?



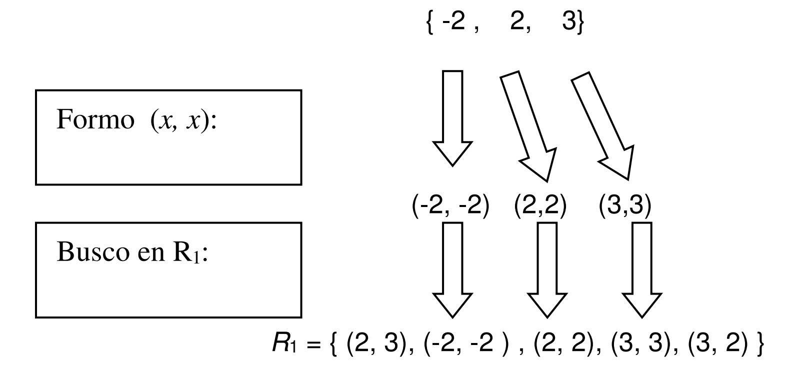
b) Considerar A = { 2, 3, -2}, R_1 = { (2, 3), (-2, -2) , (2, 2), (3, 3), (3, 2) }

y R_2 = { (2, 3), (3, 3) , (-2, 3) } definidas sobre A.

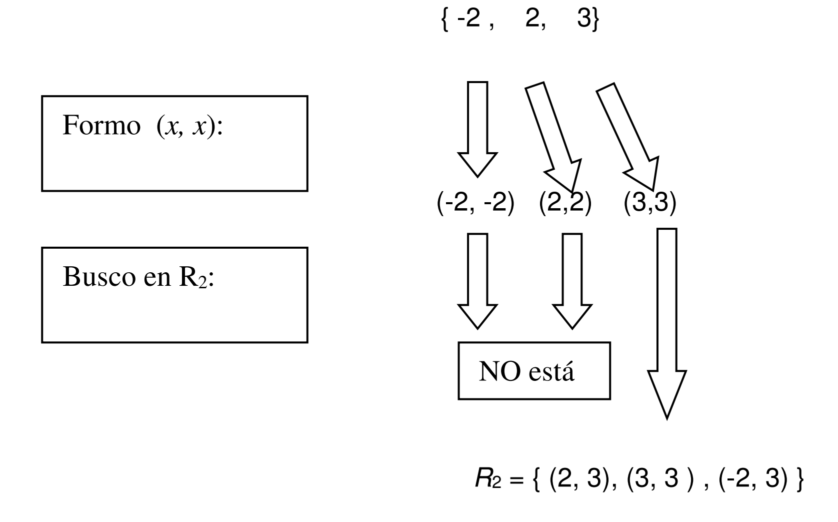
¿Son reflexivas? ¿Son simétricas? ¿Son transitivas? ¿Son antisimétricas?

Tanto R_1 y R_2 son relaciones definidas sobre A. Son subconjuntos de A x A.

Claramente R_1 es reflexiva pues para c /u de los elementos de A

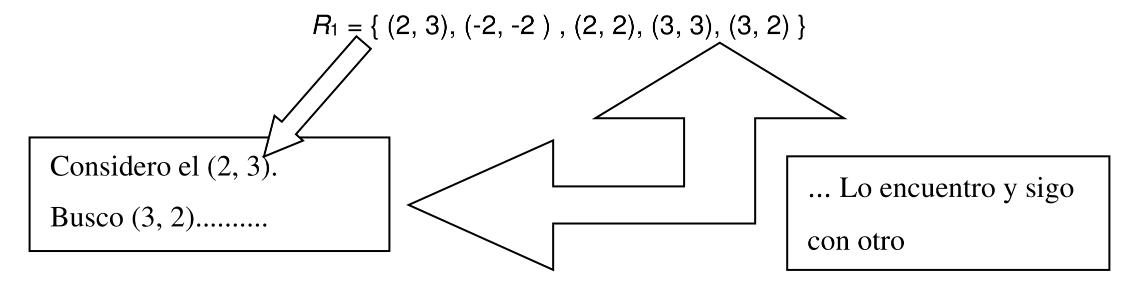


Y también, claramente R_2 NO es reflexiva pues para c /u de los elementos de A



Es R_1 simétrica? Hay que analizar: *si está un par, este su "dado vuelta".*

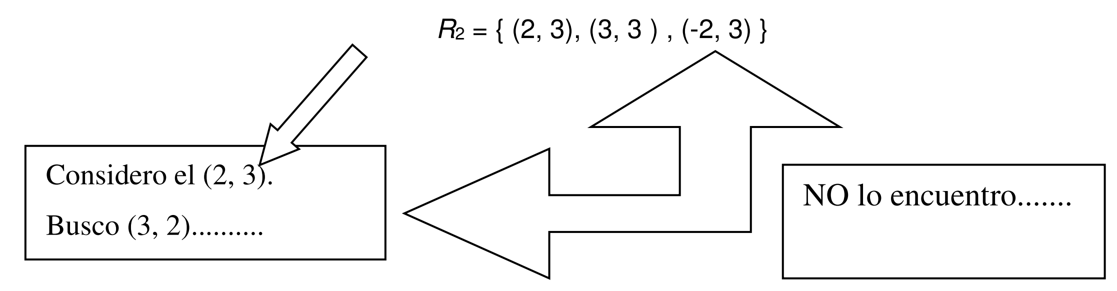
En estos casos de relaciones sobre conjuntos finitos (y poco extensos) ese análisis es muy fácil. Lo natural es ir "rastreando" en la lista de la relación los elementos y sus simétricos:



Observar que los siguientes tres elementos de R_1 son de la forma (*u, u*), por lo cual también (*u, u*) está en R_1.
El restante elemento es (3, 2) , y ya hemos analizado que esta su dado vuelta!

Por lo tanto la relación R_1 es simétrica.

Es R_2 simétrica? Hay que analizar que: *si está un par, este su "dado vuelta".*

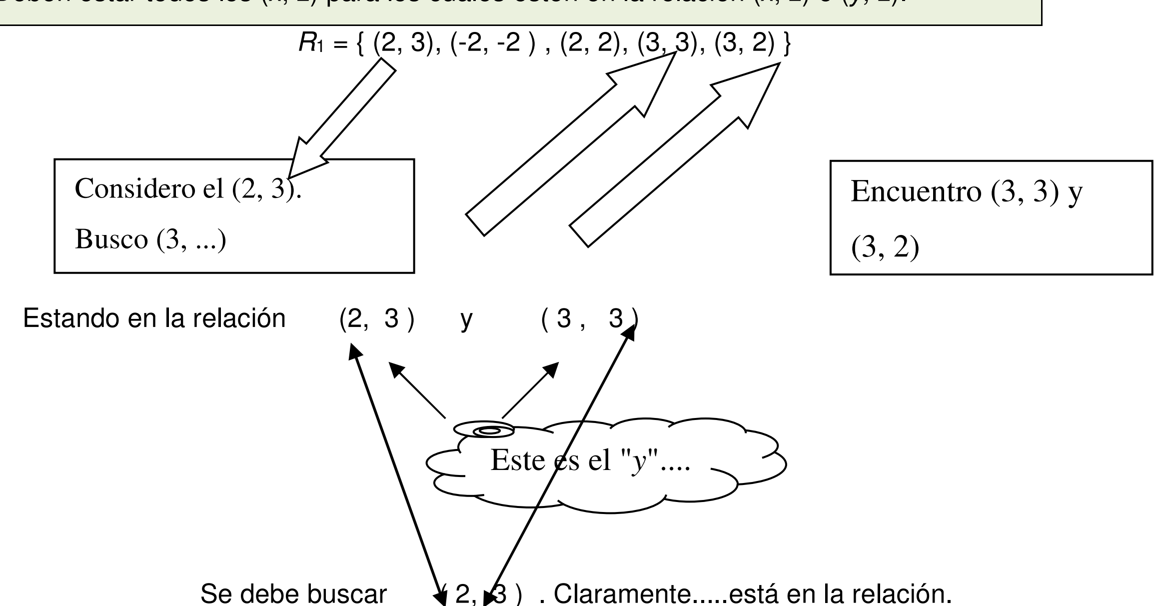


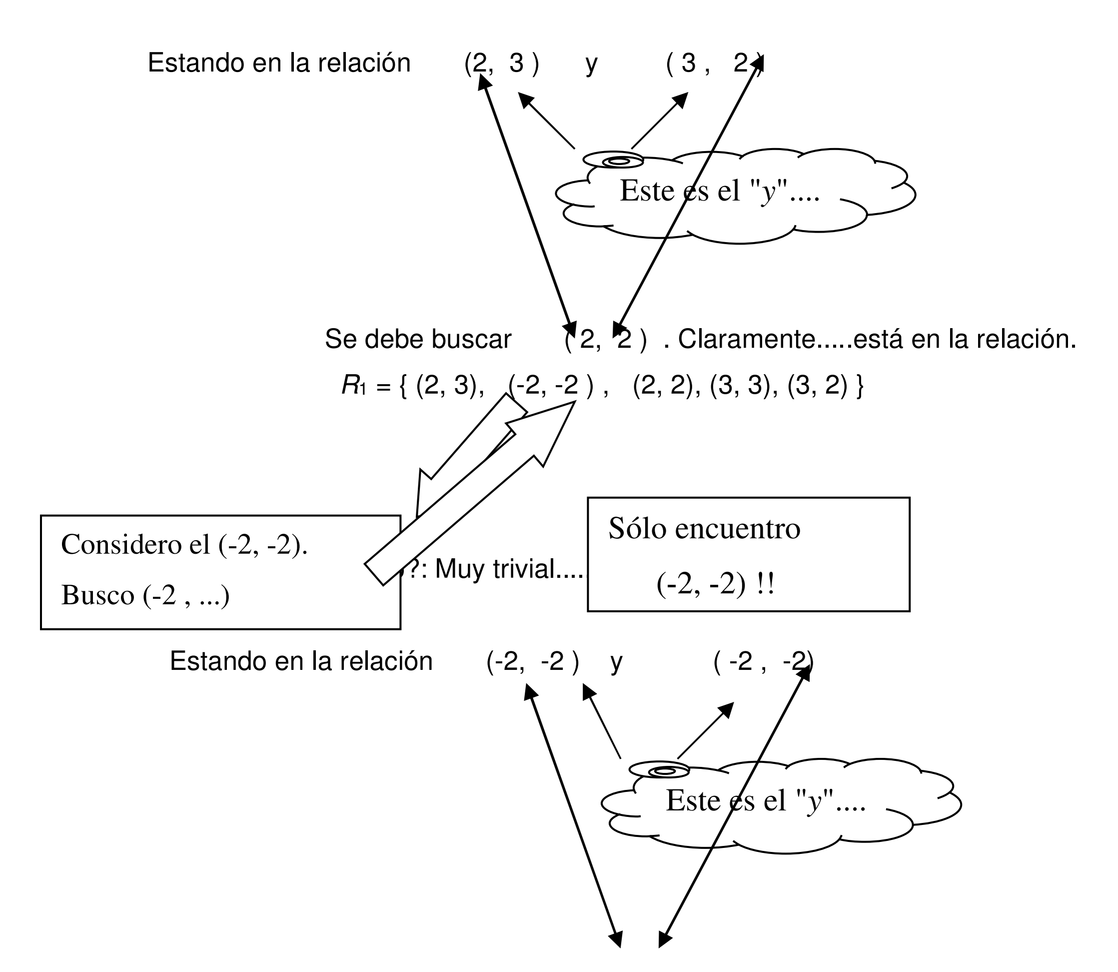
Por lo tanto la relación R_2 NO es simétrica.

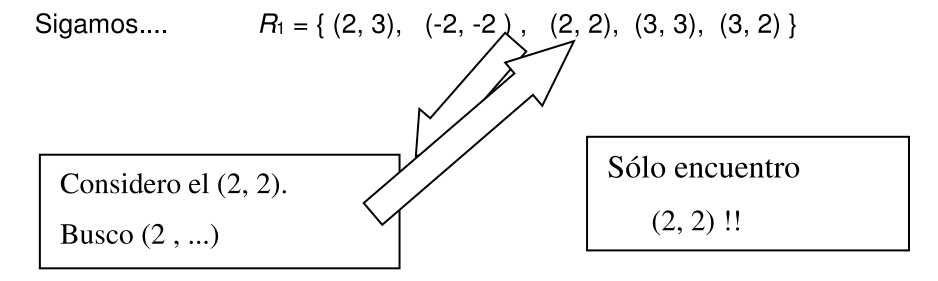
Analicemos ahora la *transitividad* de las relaciones.
Para ello hay que investigar en cada caso si: $(x\,R\;y \wedge y\,R\,z) \quad \rightarrow x\,R\,z$

Esto supone que al considerar un par dado (llámese (*x, y*)) en la relación, luego buscar aquellos pares (si existen) que comienzan con el elemento que terminó éste, *y* .

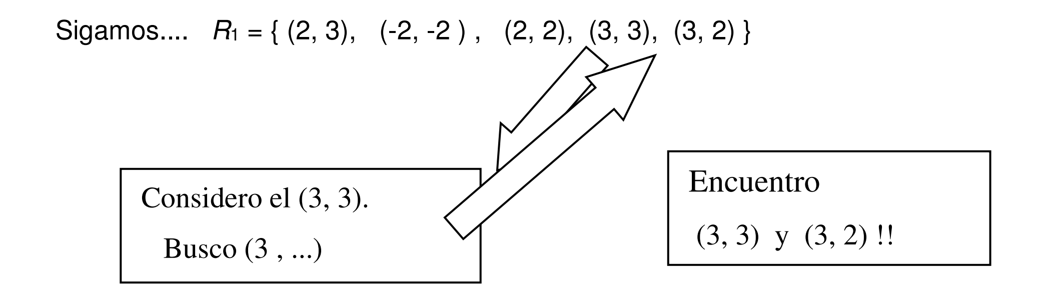
Detecto así si hay pares (*y, z*) . Luego busco elementos (*x*, *z*).
Deben estar todos los (*x*, *z*) para los cuales estén en la relación (*x*, *z*) e (*y, z*).







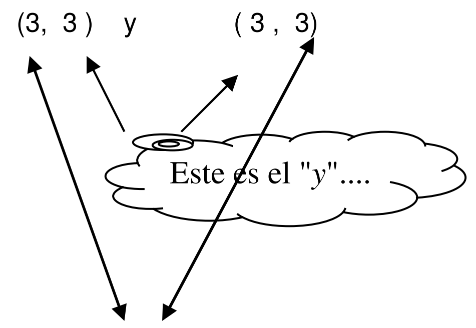
Y, cómo es este caso?: Muy trivial.....similar al anterior (justifique)



Hay que analizar por lo cual dos situaciones.

Primero:

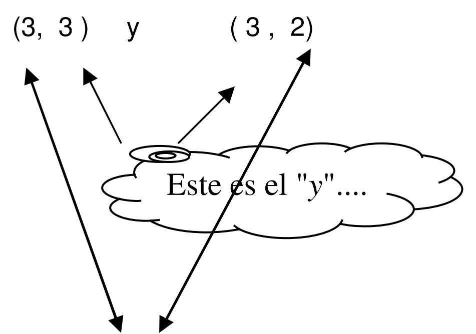
Estando en la relación (3, 3) y (3 , 3)



Se debe buscar (3, 3) ..... está en la relación.

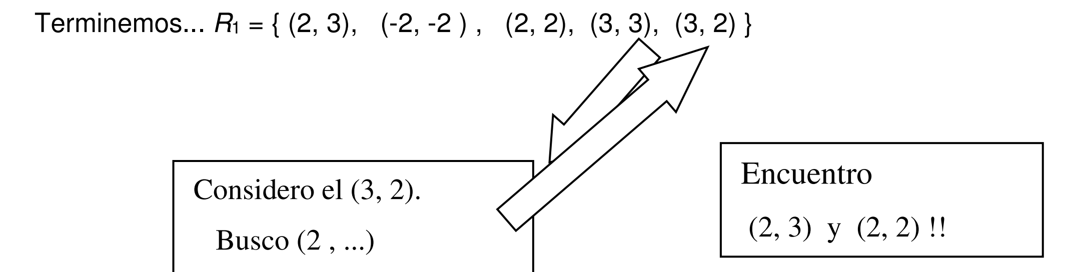
Segundo:

En la relación están (3, 3) y (3 , 2)



Se debe buscar (3, 2) . Claramente.....está en la relación.

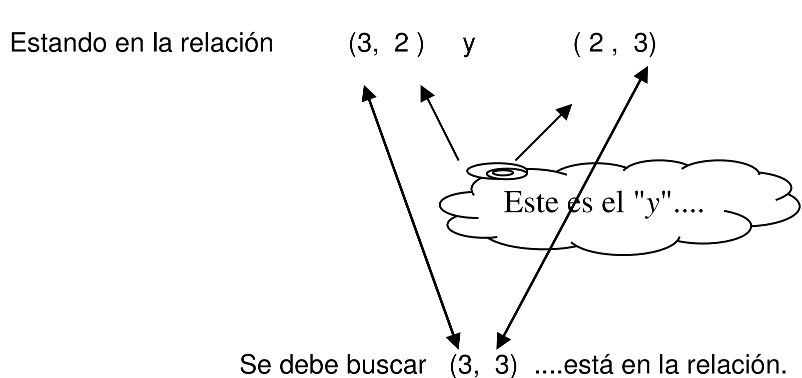
Terminemos... R_1 = { (2, 3), (-2, -2) , (2, 2), (3, 3), (3, 2) }



Hay que analizar nuevamente dos situaciones.

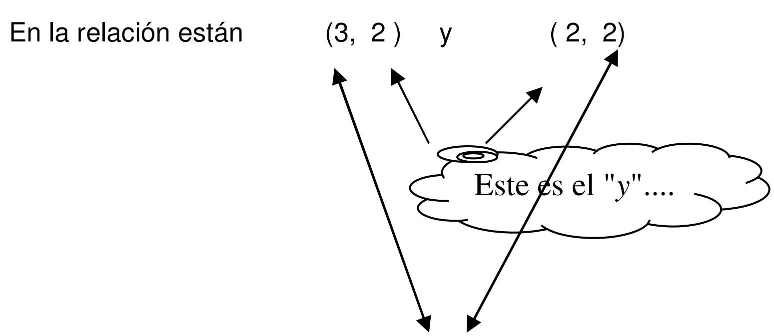
Primero:

Estando en la relación (3, 2) y (2 , 3)



Se debe buscar (3, 3) ....está en la relación.

Segundo:

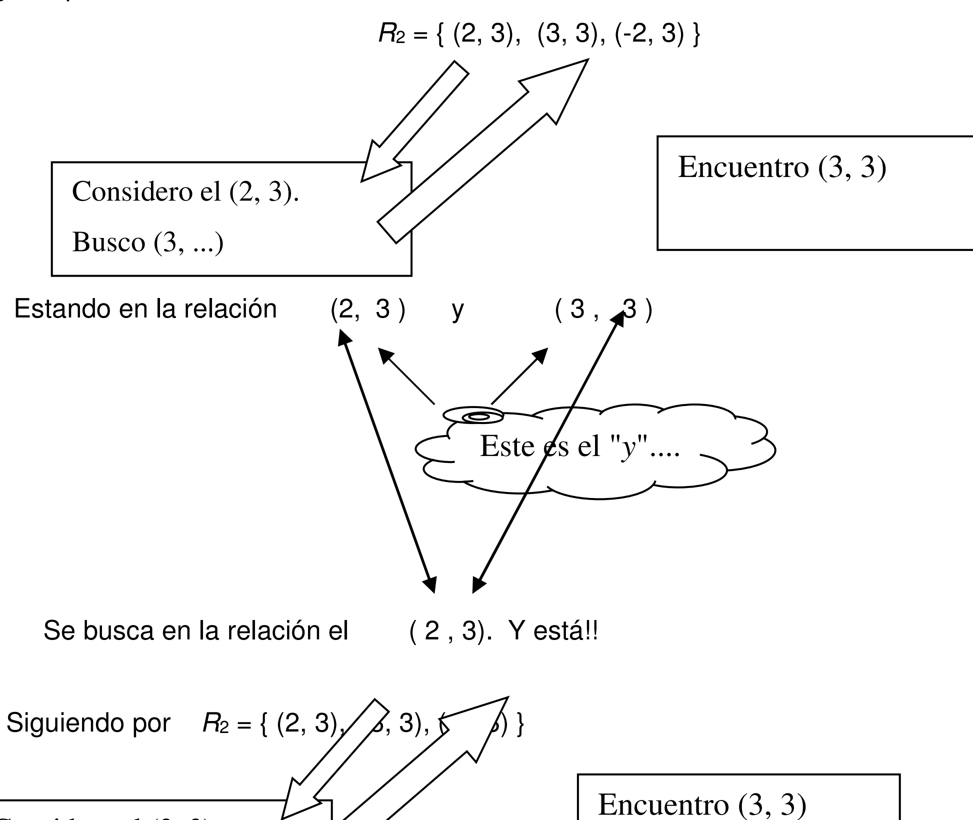


Se debe buscar (3, 2) ..... está en la relación!!

Ya se *recorrió* toda la relación y se verifico que si: $x R\ y \wedge y R z \quad \rightarrow x R z$

Por lo cual R_1 es transitiva.

¿Qué pasa con R_2 ? Se hará un análisis similar.



Estando en la relación (3, 3) y (3, 3).

Trivial lo que sigue....(de acuerdo?).

Terminando con $R_2 = \{ (2, 3), (3, 3), (-2, 3) \}$

Considero el (-2, 3).
Busco (3, ...)

Encuentro (3, 3)

Estando en la relación (-2, 3) y (3 , 3)

Este es el "*y*"....

Se busca en la relación el (-2 , 3). Está!!

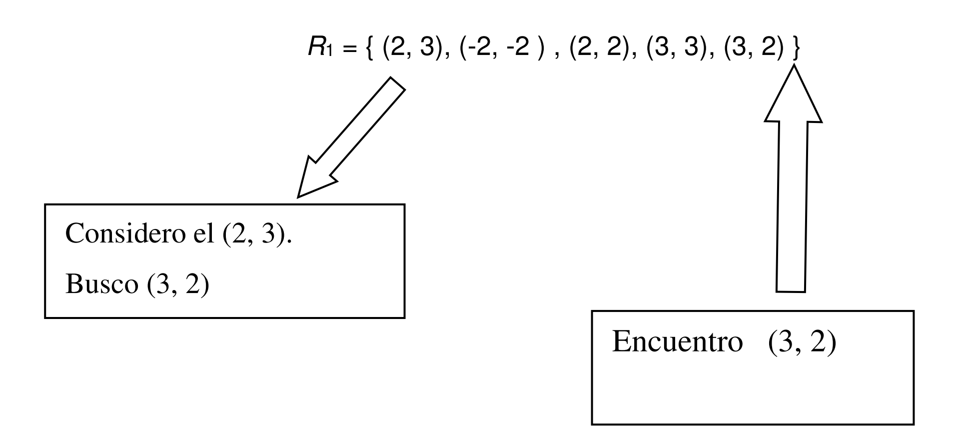
Ya se *recorrió* toda la relación y se verifico que si: $x R y \wedge y R z \rightarrow x R z$. Por lo cual R_2 es transitiva.

Analicemos ahora la antisimetría de las relaciones.

Para ello hay que investigar en cada caso si: $(x R y \wedge y R x) \rightarrow x = y$

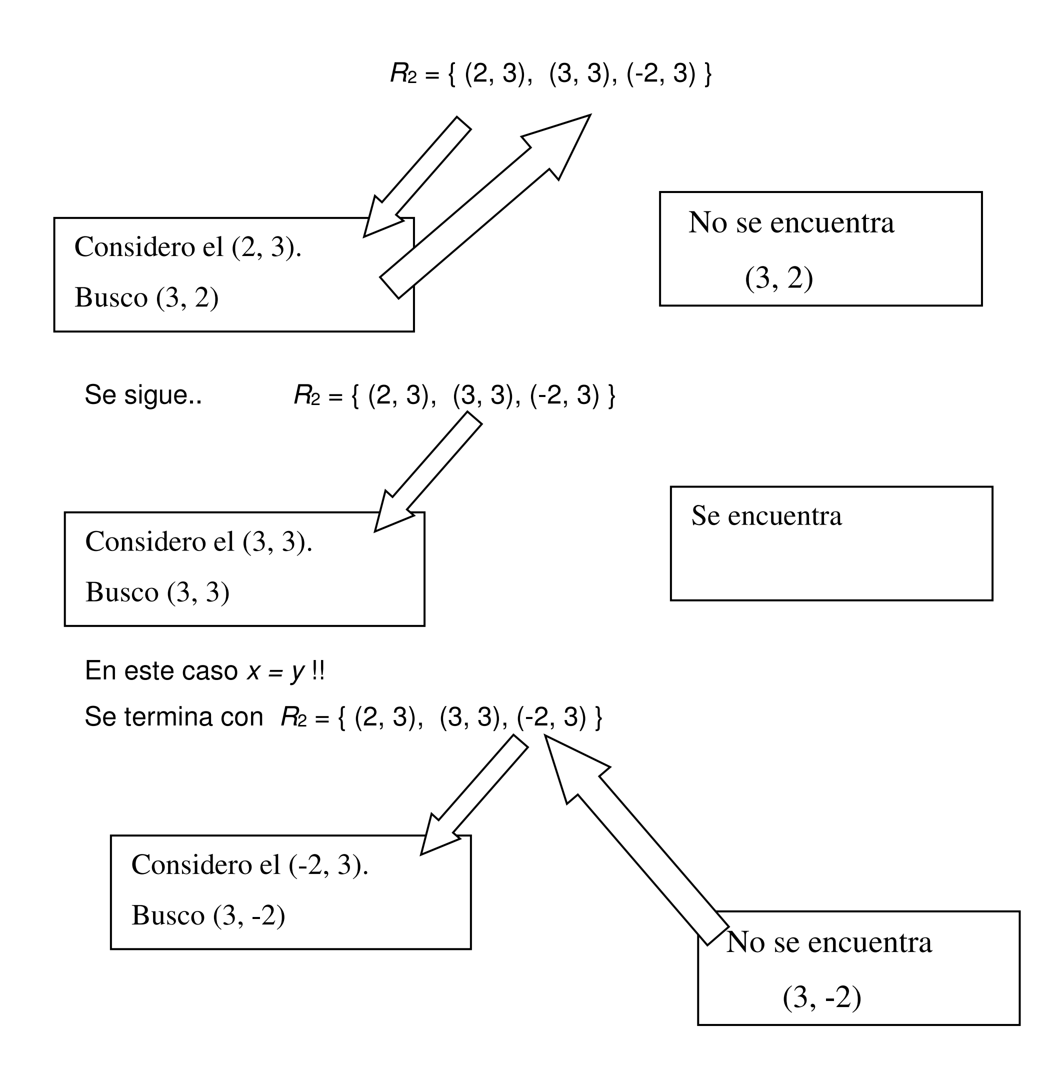
Esto supone que al considerar un par dado (llámese (*x, y*)) en la relación, luego buscar si existe el par (*y, x*) en la relación. Y se analiza si *x = y*. O dicho de otro modo, ver si hay en la relación (*x, y*) e (*y, x*) para *x* distinto de *y*, en cuyo caso no es antisimétrica.

$R_1 = \{ (2, 3), (-2, -2), (2, 2), (3, 3), (3, 2) \}$



Luego, como 2 es distinto de 3, la relación R_1 NO es antisimétrica.

Qué pasa con R_2 = { (2, 3), (3, 3), (-2, 3) } ??



Por lo cual se puede concluir que *sólo en el caso que x =y está un par y su dado vuelta* en R_2 , y terminar diciendo que es antisimétrica.

• Para los casos de R_1 y R_2 , resultó que una es simétrica pero no antisimétrica y la otra es antisimétrica pero no simétrica. ¿Será siempre así? Haga el siguiente Ejercicio. Sea muy cuidadoso (también lógicamente)

EJERCICIO 4.5.2

Sean A = { 2, 3} y las relaciones definidas en A :

R_1 = { (2, 3), (2, 2) , (3, 3), (3, 2) }, R_2 = { (2,2) , (3, 3) }, R_3 = { (2,2) } } y R_4 = { (2,3) }

a) Estudie que propiedades tiene cada una de las relaciones.

b) Haga una tabla de la relación.
c) Represente cada una de las relaciones en el plano cartesiano.

➢ *Más sobre representación de relaciones*

Dado un conjunto A y una relación R definida sobre él, además de representarla por una tabla, por un diagrama de flechas o por un sistema cartesiano se puede hacer una **digráfica**.

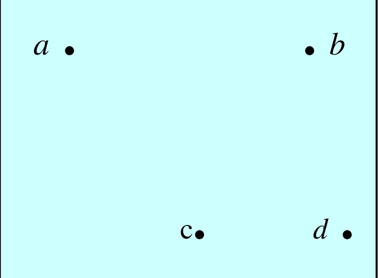
> Una ***digráfica es una gráfica dirigida***. Con *vértices* y *aristas dirigidas*.

Veamos cómo se construye a partir de un ejemplo.

EJEMPLO 4.5.3

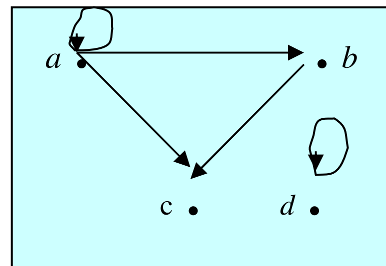
Sea la relación $R = \{ (a, a), (a, b), (a, c), (b, c), (d, d) \}$ definida sobre $A = \{a, b, c, d\}$.

Se marcan en este caso cuatro puntos o **vértices**, representando cada uno de los elementos de A:



Luego se traza una **flecha** o **arista dirigida** uniendo los vértices que están relacionados, para un par que está en la relación, la flecha tiene origen en la primera componente del par y fin en la segunda, es decir desde un elemento hasta su correspondiente.

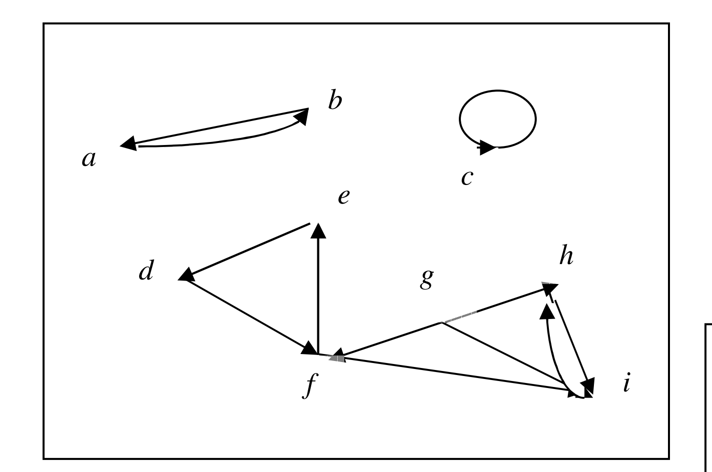
En el ejemplo resulta:



Para cada par de la forma (x, x) hay un "rulo" o **lazo**.

EJEMPLO 4.5.4

Dada la siguiente digráfica, es posible hallar la relación como conjunto de pares ordenados



Por cada flecha

$x \longrightarrow y$

en la digráfica se forma (x, y) y se pone en el conjunto R.

Por lo cual

$R = \{ (a, b), (b, a), (c, c), (e, d), (d, f), (f, e), (g, i), (g, f), (f, i), (g, h), (h, i), (i, h) \}$

EJERCICIO 4. 5. 5

Sea R la definida en el ejemplo anterior, justifique totalmente la representación de R como conjunto de pares ordenados. ¿Cuál es el dominio sobre el que está definida R.

EJERCICIO 4.5.6

1. Para la relación R definida sobre $\mathbb{Z}$ por:

$$x\, R\, y \text{ si y sólo si } x - y = 5$$

a) Halle algunos elementos del conjunto R.

b) Represente R en una tabla (parcialmente...)

c) Represente R en un diagrama cartesiano.

d) Represente R por una digráfica .

e) Estudie las propiedades de R.

2. Para la relación R definida sobre $\mathbb{N}$ por:

$$x\, R\, y \text{ si y sólo si } x - y = 5$$

Repita lo realizado en 1. .

EJERCICIO 4.5.7

Para la relación R definida sobre $\mathbb{Z}$ por:

x R y si y sólo si x - y = 5. *k* , *para algún k entero*.

a) Halle algunos elementos del conjunto R.

b) Represente R en una tabla (parcialmente...)

c) Represente R en un diagrama cartesiano.

d) Represente R por una digráfica.

e) Estudie las propiedades de R.

EJERCICIO 4. 5. 8

Para la relación R definida sobre $\mathbb{Z}$ por:

x R y si y sólo si x - y = *k* , *para algún k entero*.

a) Halle algunos elementos del conjunto R.

b) Represente R en una tabla (parcialmente...)

c) Represente R en un diagrama cartesiano.

d) Represente R por una digráfica.

e) Estudie las propiedades de R.

➢ *Más sobre representación y propiedades de una relación*

Si una *relación R definida sobre A es simétrica*, de acuerdo con la definición:

si *x R y* también *y R x*

x

y

- ¿cómo se trasluce esto en la digráfica correspondiente?

Habrá un *ciclo entre x e y*, ya que hay una flecha de *x* a *y,* además otra de *y* a *x*.
(como caso particular de ser *x* = *y* hay un lazo)

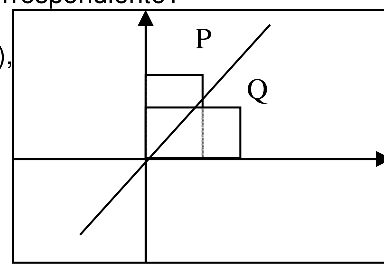
x	*y*
y	*x*
z	*w*

- ¿cómo se trasluce esto en la tabla correspondiente?

Habrá una fila de entrada *x* con salida *y* además otra fila de entrada *y* con salida *x*.

- ¿cómo se trasluce esto en el diagrama cartesiano correspondiente?

Habrá un punto P=(*x, y*) en el plano y también Q=(*y, x*), que son simétricos respecto de la recta *y = x*
(la es *bisectriz del primer y tercer cuadrante*).



EJERCICIO 4.5.9

¿Cómo se trasluce en los distintos tipos de representación, si una *relación* R *sobre* A *es reflexiva*? (de un criterio, haciendo un trabajo similar al realizado para la propiedad simétrica)

EJERCICIO 4.5.10

¿Cómo se trasluce en los distintos tipos de representación, si una *relación* R *sobre* A *es antisimétrica*?

EJERCICIO 4.5.11

¿Cómo se trasluce en los distintos tipos de representación, si una *relación* R *sobre* A *es transitiva*?

EJERCICIO 4.5.12

Dada una relación R definida sobre A, defina su inversa R^{-1}

EJERCICIO 4.5.13

Dada la relación R = { (-2,2) , (2, 2), (0, 0), (2, -2) } sobre A = { -2, 0, 2 }

a) Represente. ¿Qué propiedades tiene R ?
b) Halle R^{-1}. Represente.
c) ¿Qué propiedades tiene R^{-1} ?

EJERCICIO 4.5.14

Dada la relación R = { (-2,2) , (2, 2), (0, 0), (2, -2), (0,2), (-2, -2) } sobre A = { -2, 0, 2 }

a) Represente. ¿Qué propiedades tiene R ?
b) Halle R^{-1} Represente.
c) ¿Qué propiedades tiene R^{-1} ?

EJERCICIO 4.5.15

Estudie si hay relación entre las propiedades de una relación R definida sobre A y su inversa.

Se demostrarán unas propiedades que se desprenden de los ejemplos y ejercicios anteriores sobre una relación y su inversa. Además, con el propósito de mostrar

demostraciones sencillas, que por lo general en el principio de nuestros estudios no resultan triviales.

- PROPIEDAD 4.5.16

Una relación R es simétrica sobre A si y sólo si $R = R^{-1}$

Demostración:

1)Para probar que: si R es simétrica entonces $R = R^{-1}$, hay que demostrar las contenciones $R \subseteq R^{-1} \quad \wedge \quad R^{-1} \subseteq R$:

Sea $(x, y) \in R$ entonces $(y, x) \in R$ por ser R simétrica, entonces $(x, y) \in R^{-1}$ por la definición de la relación inversa. Luego $R \subseteq R^{-1}$.

Sea $(x, y) \in R^{-1}$ entonces por definición de relación inversa $(y, x) \in R$ entonces $(x, y) \in R$ por ser R simétrica. Es decir $R^{-1} \subseteq R$ vale.

Por lo tanto $R = R^{-1}$

2) Veamos que si $R = R^{-1}$ entonces R es simétrica:

Sea $(x, y) \in R$ entonces $(x, y) \in R^{-1}$ entonces $(y, x) \in R$, por ser $R = R^{-1}$ y por la definición de la relación inversa.

Por lo cual R es simétrica.

♦

- PROPIEDAD 4.5.17

R es transitiva sobre A si y sólo si $R \circ R \subseteq R$

Demostración**:**

1) Primero aceptemos que R es transitiva. Sea $(x, z) \in R \circ R$ por definición de composición entonces $(\exists y)(xRy \quad \wedge \quad yRz)$ como R es transitiva resulta $(x, z) \in R$.

Por lo tanto $R \circ R \subseteq R$

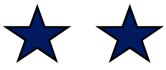
2) Sean x, y, z elementos de A, tales que $(x, y) \in R \quad \wedge \quad (y, z) \in R$ y por definición de composición $(x, z) \in R$ y en consecuencia R es transitiva.

♦

6. Algunos casos especiales

Ya entramos a estudiar los dos tipos de relaciones muy importantes en varias ramas de la ciencia y en particular de la Matemática. Como se dijo ambos tipos de relaciones son una generalización de la relación de la igualdad en cualquier conjunto A que esté definida.

Las propiedades de la relación de la igualdad son: reflexividad, simetría, antisimetría y transitividad entre otras.

✓ Caso importante 

Dada una relación R definida sobre A , la relación es **de orden** si R es

- ***reflexiva***
- ***antisimétrica***
- ***transitiva.***

Decimos también que R **es un orden sobre** A

$(\forall x)(x\in A\to xRx)$
$(xRy\wedge yRx)\to x=y$
$(xRy\wedge yRz)\to xRz$

Por algunos autores también es llamado **orden parcial**

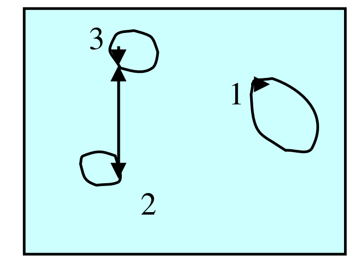
Los ejemplos inmediatos son los conjuntos numéricos con sus órdenes usuales, también llamados órdenes naturales. Con ello nos referimos al orden que se corresponde con la representación de los números en la recta numérica y que se puede definir en términos de la suma y positivos.

Verifique que efectivamente es un orden sobre los $\mathbb{N}$ el $\leq$ usual.

EJEMPLO 4.6.1

Sea R = {(2,3), (2, 2), (3, 3), (1, 1) } la relación definida sobre A = { 1, 2, 3}.

R es un orden sobre A, ya que es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Su digráfica es



EJERCICIO 4.6.2

Considerar $A = \{1, 2, 3\}$, sean $R_1 = \{ (2, 3), (1,1), (2, 2), (3, 3), (3, 2) \}$

$R_2 = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 2) \}$

$R_3 = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2,3), (1,3) \}$

a) Estudie si las relaciones definidas sobre A son órdenes sobre A.
   Haga sus digráficas.

b) Compare los órdenes con el del ejemplo anterior.



Un mismo conjunto A puede tener definidos sobre él más de un orden. Por lo tanto no es suficiente hablar de A *es un conjunto ordenado.*

Por lo cual es un *par ordenado el conjunto y la relación* cuando uno habla de "*conjunto ordenado".*

Es decir, se debe hablar de (A, R).

EJERCICIO 4.6.3

a) Considerar $A = \{1, 2, 3\}$, y sea $R_3 = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3,2), (1,2) \}$
en el ejercicio anterior probó que es un orden sobre A.
Calcule R_3^{-1}. Haga su digráfica. Es (A, R_3^{-1}) ¿un conjunto ordenado?

b) Sea R un orden sobre A. ¿Qué puede decir de R^{-1} sobre A ? ¿Cómo lo llamaría?

EJERCICIO 4.6.4

Sea R la relación definida sobre A = {María, Pedro, Julián, Elsa}

$a\,R\,b$ si y sólo si *la estatura de* a *es menor o igual que la estatura de b*

a) ¿Es R un orden en A ?

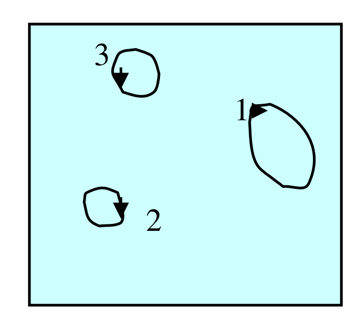
b) Idee estaturas para los elementos de A. Confeccione una tabla para R. Represente por una digráfica.

c) ¿Cuál es R^{-1} ? Con los datos propuestos en b), haga la digráfica de R^{-1} .

EJERCICIO 4.6.5

A= { 1, 2, 3 }. Es R un orden sobre A si su digráfica es

¿Cómo llama a este orden??



> Dados $a \in A$ y $b \in A$, sabiendo que (A, R) es un conjunto ordenado,
>
> si $a \not R b$ y $b \not R a$ decimos que a y b son **incomparables**.

Por lo tanto para el orden definido sobre A en el ejercicio anterior los tres elementos de A son ¡¡¡incomparables!!!

> **Recordatorio**:
> Si $a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}$ decimos que *a divide a b* y se escribe $a \mid b$, si y solo si, $\exists c, c \in \mathbb{Z}$ y $a.c = b$.

EJEMPLO 4.6.6

a) Definimos en $\mathbb{Z}$ la relación R, dada por $aRb \leftrightarrow a \mid b$

Es reflexiva:

$\forall a, a \in \mathbb{Z}, \quad a \mid a$ ya que $a.1=a$ por lo tanto aRa.

No es antisimétrica:

Esta propiedad no se cumple ya que 2|-2 y -2|2 y sin embargo $2 \neq -2$

Por lo tanto, no es una relación de orden en $\mathbb{Z}$.

b) Definimos ahora en $\mathbb{N}$ la relación R, dada por $aRb \leftrightarrow a \mid b$

> **Recordatorio:**
> Si $a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N}$ decimos que *a divide a b* y se escribe $a \mid b$, si y solo si, $\exists c, c \in \mathbb{N}$ y $a.c = b$.

Analicemos sus propiedades:

Es reflexiva:

$\forall a, a \in \mathbb{N}, \quad a \mid a$ ya que $a.1=a$ por lo tanto aRa.

Es antisimétrica:

Si a y b están en $\mathbb{N}$, tales que $(aRb \quad \wedge \quad bRa)$ entonces $a = b$?

Si $aRb \quad \wedge \quad bRa$ entonces $a \mid b \quad \wedge \quad b \mid a$ por lo cual

existen c y d naturales tales que $a.c = b \quad \wedge \quad b.d = a$.

Si $a=0$ entonces $b=0$. Es decir, $a=b$.

Si $a \neq 0$ entonces $b \neq 0$, por lo tanto reemplazando $a.c = (b.d).c = b = b.(d.c)$,

usando que $b \neq 0$ en dos pasos llega a que $d.c=1$, y como los números son naturales resulta $c = d=1$.

Entonces $a=b$. Luego, es antisimétrica.

Es transitiva:

¿Si a, b y c son naturales y $aRb \quad \wedge \quad bRc$ entonces aRc?

Si $aRb \quad \wedge \quad bRc \rightarrow a \mid b \quad \wedge \quad b \mid c$ es decir,

existen m y n naturales tales que $a.m = b \quad \wedge \quad b.n = c$.

Entonces reemplazando $b.\ n = (a.m).\ n = a\ .(m.\ n) = c$ siendo $m.n$ un número natural por ser producto de naturales, por lo tanto aRc.

Entonces decimos que $(\mathbb{N}, \mid)$ es un conjunto ordenado o que la relación divide define un orden sobre $\mathbb{N}$.

En este ejemplo 2) hay elementos que no están relacionados, por ejemplo 2 no divide a 3 y 3 no divide a 2 , por lo tanto 2 con 3 no están relacionados, son incomparables.

Esta situación nos conduce a definir un concepto que en los conjuntos numéricos $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}$ con el orden usual $\leq$ se cumple, pero al haber introducido el concepto general de conjunto ordenado, no tiene porqué cumplirse, por lo cual amerita la siguiente definición:

Decimos que (A,R) es un conjunto **totalmente ordenado** por R, si cumple las siguientes condiciones:

(i) R es un orden sobre A

y

(ii) Dados a y b en A entonces $(\ aRb \quad \vee \quad bRa)$

Es decir, dados dos elementos del conjunto A, a está antes en el orden que b o b está antes en el orden que a. Este orden también se llama **orden lineal**.

$\mathbb{N}$ con el orden usual es totalmente ordenado, pero $\mathbb{N}$ con la relación divide no lo es. Por esta razón (destacamos nuevamente) cuando se habla de un conjunto ordenado hay que poner en claro cuál es conjunto sobre el que se define la relación y cuál es la relación definida sobre él. Lo correcto es anotar $(\mathbb{N}, \leq)$ o $(\mathbb{N}, |)$ según sea el caso.

EJEMPLO 4.6.7

Sea *E* un conjunto y sea $\mathcal{P}(E)$ el conjunto de partes de *E*, definimos R en el conjunto $\mathcal{P}(E)$ por: $ARB \leftrightarrow A \subseteq B$

Es inmediato recordando las definiciones dadas en las propiedades de los conjuntos que esta relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva en $\mathcal{P}(E)$, por lo tanto podemos decir que $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ es un conjunto ordenado.

Dado (A, R) un conjunto ordenado, el **diagrama de Hasse** o **diagrama de orden**, es un dígrafo en el que no indicamos los bucles ya que se representa una relación de orden sobre A y por lo tanto reflexiva, se sobreentiende que cada elemento está relacionado con sí mismo.

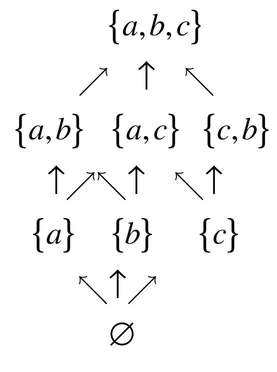
Tomando el EJEMPLO 4.6.7 , consideremos como caso particular el conjunto $E = \{a, b, c\}$ y así $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.

Hagamos un análisis de $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$. Tenemos entonces que:

$$\varnothing \subseteq X \quad \forall X, X \in \mathcal{P}(E)$$

$$\begin{array}{lll} \{a\} \subseteq \{a,b\} & \{b\} \subseteq \{a,b\} & \{c\} \subseteq \{c,a\} \\ \{a\} \subseteq \{a,c\} & \{b\} \subseteq \{b,c\} & \{c\} \subseteq \{c,b\} \\ \{a\} \subseteq \{a,b,c\} & \{b\} \subseteq \{a,b,c\} & \{c\} \subseteq \{a,b,c\} \\ \{a,b\} \subseteq \{a,b,c\} & \{b,c\} \subseteq \{a,b,c\} & \{a,c\} \subseteq \{a,b,c\} \end{array}$$

El diagrama de Hasse es:



En este caso no hay un orden total, ya que por ejemplo $\{b\}$ no está relacionado con $\{c\}$, son elementos incomparables.

EJERCICIO 4.6.8

Realice el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(\mathbb{N}, \leq)$. (Obvio que parcialmente…)

Le resulta claro porque un conjunto totalmente ordenado también se dice que es linealmente ordenado????

¡AJA!

➢ *Algunos elemento particulares importantes*

En los conjuntos ordenados hay elementos que se destacan por distintas propiedades que merecen definirse, pues son conceptos de mucha utilidad dentro de la Matemática y otras aplicaciones.

Sean (A, R) un conjunto ordenado y $a \in A$, a es **primer elemento** o **mínimo del conjunto ordenado** si para todo x, x en A se tiene aRx.

Es decir a "precede" a todos los elementos de A.

En $(\mathbb{N}, \leq)$ el 0 es el mínimo.

En $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ el conjunto $\varnothing$ es el mínimo.

Los conjuntos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Z}$ con el orden usual respectivo, no tienen elemento mínimo.

Hay veces que queremos considerar una parte de un conjunto ordenado y conservar el orden del conjunto que lo contiene. Eso lo garantiza:

♦ PROPIEDAD 4.6.9

Si (A, R) es un conjunto ordenado y $B \subseteq A$, entonces (B, R_B) es un conjunto ordenado, donde R_B está definida por: $b_1 R_B b_2 \leftrightarrow b_1 R b_2$

(R_B es el **orden inducido** en B por R)

b_1 y b_2 son elementos de B!!

Demostración:

Es reflexiva:

Sea $b \in B$ entonces por la hipótesis $b \in A$, luego bRb por ser R reflexiva, entonces $bR_B b$ por la definición de R_B.

Por lo tanto R_B es reflexiva.

Es antisimétrica:

Sean $b \in B$ y $c \in B$ tales que

$bR_B\,c$ y $cR_B\,b$ entonces bRc y cRb luego $c = b$, aplicando la definición de R_B y por ser R antisimétrica. Por lo tanto R_B es antisimétrica.

Es transitiva:

Sean $b \in B, c \in B$ y $d \in B$, y además

$bR_B\,c$ y $cR_B\,d$ entonces por definición de R_B se tiene

bRc y cRd usando que R es transitiva sale

bRd y por definición de R_B resulta bR_Bd.

Por lo tanto R_B es transitiva.

♦

Por ejemplo: Considerar el intervalo real abierto A = (0,1) , si " $\leq$ " es el orden usual de $\mathbb{R}$ restringido a A u orden inducido en A, entonces $(A\ ,\leq)$ no tiene mínimo.

Justificar.

Sean (A, R) un conjunto ordenado y $m \in A$, m es **último elemento** o **máximo del conjunto ordenado** si para todo x, x en A se tiene $xR\,m$. Es decir, m es "posterior" a todos los elementos del conjunto A.

El 0 es el máximo de $(\mathbb{N}, |)$ ya que todos los naturales dividen al 0.

$(\mathbb{N}, \leq)$ no tiene último elemento. Tampoco $(\mathbb{Z}, \leq)$ ni $(\mathbb{R}, \leq)$ lo tienen.

El conjunto *E* es el máximo de $(\mathcal{P}(E)\ ,\subseteq)$ pues todos los elementos de $\mathcal{P}(E)$ son subconjunto de *E*.

Sea *A*={ 1, 2, 3} el conjunto ordenado por *R* en la digrafica

1 2

3

(*A*,*R*) no tiene máximo, pero al 1 y al 2 ningún elemento lo sigue.

A esos elementos de un conjunto ordenado se le pone "nombre".

Sean (A, R) un conjunto ordenado y $m \in A$, *m* es **maximal del conjunto** si para todo *x*, $x \in A$ que verifica mRx entonces $m = x$

Esto implica que no hay ningún elemento distinto que *m* que esté después en el orden *R* que *m*.

Sean (A, R) un conjunto ordenado y $a \in A$, a es **minimal del conjunto** si para todo *x*, $x \in A$ que verifica xRa entonces $a = x$

Esto implica que no hay ningún elemento distinto que a que esté antes en el orden que a.

EJEMPLO 4.6.10

Si tomamos *E* ={*a, b, c*} y *R* en el conjunto $\mathcal{P}(E)$ - $\{\varnothing\}$ definida por: $ARB \leftrightarrow A \subseteq B$,

el diagrama es:

$$\{a,b,c\}$$
$$\nearrow \quad \uparrow \quad \nwarrow$$
$$\{a,b\} \quad \{a,c\} \quad \{c,b\}$$
$$\uparrow \nearrow \nwarrow \uparrow \quad \nwarrow \uparrow$$
$$\{a\} \quad \{b\} \quad \{c\}$$

Donde {*a*}, {*b*},{*c*} son minimales y {*a, b, c*} es maximal y último elemento. No tiene primer elemento.

Para el mismo conjunto *E*, si definimos la relación *R* en $\mathcal{P}(E)$ – { *E* } como:

$ARB \leftrightarrow A \subseteq B$, el diagrama es:

$$\{a,b\} \quad \{a,c\} \quad \{c,b\}$$
$$\uparrow \nearrow \nwarrow \uparrow \quad \nwarrow \uparrow$$
$$\{a\} \quad \{b\} \quad \{c\}$$
$$\nwarrow \uparrow \nearrow$$
$$\varnothing$$

Donde {*a, b*},{*a, c*} y {*b ,c*} son maximales y $\varnothing$ es minimal y primer elemento. No tiene último elemento.

EJERCICIO 4.6.11

1) Se define en A = {0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} $\subseteq \mathbb{N}$, la restricción a A de la relación sobre $\mathbb{N}$: $a\ R\ b$ si y solo si $a \mid b$.

a) Hacer el diagrama de Hasse de (A, R_A)

b) Dar maximales, minimales, primer y último elemento si es que existen.

¡Me ayudo con digráficas!

2) Sea (*A, R*) un conjunto ordenado.

a) Si (*A, R*) tiene mínimo, ¿cuántos tiene? ¿Ídem para máximo?

b) Si un elemento es maximal y minimal en (*A, R*), ¿cómo es la situación de ese elemento?

c) Si *m* es mínimo de (*A,R*), es *m* minimal?

d) Probar que si (*A, R*) es totalmente ordenado y tiene maximal M entonces M máximo.

Sea (A, R) un conjunto ordenado y $X \subseteq A$.

Decimos que k es **cota inferior** de X si $k \in A \quad \wedge \quad (\forall x)(x \in X \rightarrow kRx)$

Al conjunto de cotas inferiores de X lo notaremos k(X).

Llamamos **ínfimo del conjunto** X, a la mayor de las cotas inferiores de X.

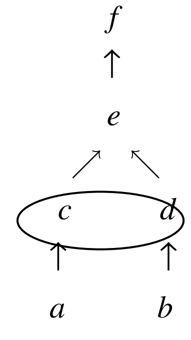
Decimos que K es **cota superior** de X si $K \in A \quad \wedge \quad (\forall x)(x \in X \rightarrow xRK)$

Al conjunto de cotas superiores de X lo notaremos K(X).

Llamamos **supremo del conjunto** X, a la menor de las cotas superiores de X..

EJEMPLO 4.6.12

1) Dado el conjunto A = {*a, b, c, d, e, f* } y *X* ={*c, d*} con la relación de orden dada por el siguiente diagrama:



En este ejemplo el conjunto de cotas superiores de X es K(X) ={e, f} y no tiene cotas inferiores, es decir k(X) es el conjunto vacio.

El conjunto está acotado superiormente pero no inferiormente.

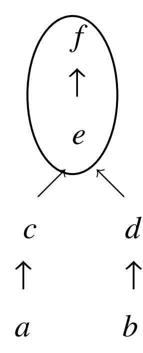
La menor de las cotas superiores es el elemento e, por lo tanto es supremo del conjunto X.

Como no hay cotas inferiores, no hay ínfimo.

También mirando el diagrama de orden del conjunto A, vemos que f es maximal y último elemento y los elementos a y b son minimales.

Notar que ínfimo y supremo no son necesariamente elementos de X.

2) En el mismo A de ejemplo 1) con el mismo orden, tomemos ahora como conjunto X = {e, f}.



El conjunto de cotas superiores K(X) = { f }, el conjunto de cotas inferiores es k(X)={a, b, c, d, e }.

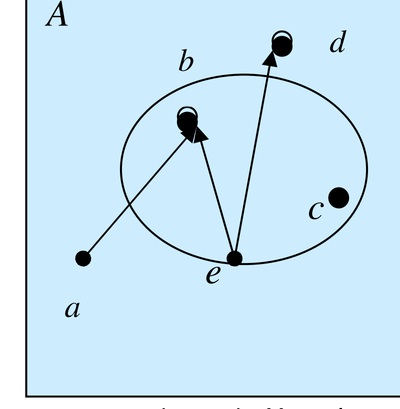
El supremo es f, ya que hay sólo una cota superior, la menor de las cotas superiores es ese único elemento. El ínfimo es e, ya que es la mayor de las cotas inferiores.

3) Sea $A = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$, consideramos $(A,\leq)$ (el orden de los reales restringido a A) y sea $X = \left\{ x \in A : \quad x = \frac{1}{n} \wedge n \in \mathbb{N} - \{1,0\} \right\}$

El conjunto de cotas superiores de X, $K(X) = [\frac{1}{2}, 1)$, por lo tanto el supremo es $\frac{1}{2}$.

Este conjunto no tiene cotas inferiores, ya que dado un elemento de X, este es $x = \frac{1}{n}$ y siempre existe $y = \frac{1}{n+1}$, y así resulta que $y < x$. Y además el 0 no es elemento de A. Por lo tanto X no tiene ínfimo.

4) En el conjunto ordenado (A, R) dado en la digráfica adjunta.
$X = \{ b, c, e \}$
X no tiene cotas superiores ni inferiores. Justifique!





5) Considerar $(\mathbb{N}, |\ )$. Sea X = { 3, 6, 9, 12, 15}. Las cotas superiores de *X* son los números naturales *divisibles por todos los elementos de X*: es decir los múltiplos comunes de los elementos de *X*, es decir

$$K, \text{ tal que } 3|K \ \wedge \ 6|K \ \wedge \ 9|K \ \wedge \ 12|K \ \wedge \ 15|K$$

luego *K* debe contener en su factorización a 3, 6, 9, 12 y 15.

Como los encontramos? Factoreando los números:

$$3 = 3; \quad 6 = 2.3; \quad 9 = 3^2; \quad 12 = 2^2.3; \quad 15 = 3.5$$

Los *K* que sirven son $K = 2^2.3^2.5.h$ para todo $h \in \mathbb{N}$. Es así que el conjunto de cotas superiores de *X* es $\{2^2.3^2.5.1, \quad 2^2.3^2.5.2 \quad ,2^2.3^2.5.3, \quad ....\}$ es un conjunto infinito de números naturales.

Por ser un conjunto no vacío de naturales tiene mínimo y es

$$2^2.3^2.5.1 = 2^2.3^2.5 = 180$$

Es el supremo.

P.B.O.!! y es el mínimo común .m......

Las cotas inferiores de *X* son los números naturales que *dividen a todos los elementos de X*: es decir los divisores comunes de los elementos de *X*, es decir

$$k, \text{ tal que } k|3 \ \wedge \ k|6 \ \wedge \ k|9 \ \wedge \ k|12 \ \wedge \ k|15$$

Luego *k* debe estar en la factorización de 3, 6, 9, 12 y 15.

Es el máximo común di....

Como los encontramos? Ya se han factoreando los números, buscamos los factores comunes a todos ellos...

En este caso el conjunto de divisores comunes es unitario es el {3 }
Claramente este conjunto tiene un máximo, la mayor cota inferior que es 3.
Es el ínfimo.

6). Queda para Ud.:
a) Considerar $(\mathbb{N}, |)$. Hacer una digráfica parcial. Sea *X* = { 7, 8, 9, 28, 36}. Hallar el supremo e ínfimo de *X*.

b).Considerar $(\mathbb{N}, |)$. Sea $X = \{ a_1, a_2, ..., a_n \} \subseteq \mathbb{N}$.

Hallar cotas superiores e inferiores de *X* en $(\mathbb{N}, |)$. Demostrar que existen el supremo e ínfimo de *X*. ¿Qué números son?

Se va a generalizar el comportamiento de los números naturales con el orden usual:

Sea (A, R) un conjunto ordenado, decimos que **(A, R) está bien ordenado** si
$$(\forall S)(S \subseteq A \quad \wedge \quad S \neq \varnothing \quad \text{entonces} \quad S \text{ tiene primer elemento})$$

♦ PROPIEDAD 4.6.13

Sea (A, R) un conjunto ordenado. Si (A, R) es bien ordenado entonces está totalmente ordenado.

Demostración:
Sea $A \neq \varnothing$. Si A es unitario es trivial.
Sean a y b en A, debemos probar que aRb o bRa, siendo $a \neq b$.
Consideremos $X = \{a ,b\}$ es un subconjunto no vacío de A, por lo tanto por ser (A,R) bien ordenado *X* tiene primer elemento, entonces aRb *o* bRa. Por lo tanto (A, R) es totalmente ordenado.

♦

La recíproca no es cierta
Por ejemplo el conjunto $(\mathbb{Z}, \leq)$ no tiene primer elemento, sin embargo está totalmente ordenado.
Estar totalmente ordenado no implica estar bien ordenado.

♦ PROPIEDAD 4.6.14

Sea (A, R) un conjunto totalmente ordenado. Si existe a minimal de A entonces a es primer elemento de A.

Demostración:

Sean a^* y a^{**} minimales, entonces por ser (A, R) totalmente ordenado $a^* R a^{**} \vee a^{**} R a^*$ entonces si $a^* R a^{**}$, como a^{**} es minimal $a^* = a^{**}$ y si $a^{**} R a^*$ como a^* es minimal $a^* = a^{**}$.

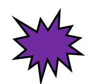
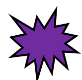
En un conjunto totalmente ordenado si hay minimal éste es único.

Veamos que es el primer elemento:

Si A es unitario es trivial.

Si a^* es minimal cumple $(\forall x)(xRa^* \to x = a^*)$ usando la contrarrecíproca $(\forall x)(x \neq a^* \to a^* Rx)$ y del hecho que el conjunto (A, R) es totalmente ordenado, por lo tanto a^* es primer elemento.

♦

✓ El otro caso importante  

Una relación R definida sobre A, la relación es **de equivalencia** si R es

- ***reflexiva*** $(\forall x)(x \in A \to xRx)$
- ***simétrica*** $xRy \to yRx$
- ***transitiva.*** $(xRy \wedge yRz) \to xRz$

Los ejemplos inmediatos son los conjuntos numéricos con la igualdad. *Verifique* que efectivamente es una equivalencia sobre $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ó $\mathbb{R}$ la relación =.

¡SI!

En la vida diaria se usa frecuentemente la expresión "*son equivalentes*" para indicar que un elemento es *igual* o *sustituible* por otro, la idea intuitiva es que *son casi iguales*...

Esta expresión e idea la usamos tanto para remedios, alimentos, autos, …, como para entes más abstractos como los de la Matemática o la Lógica: polígonos, fracciones, ecuaciones, proposiciones, definiciones y podríamos seguir dando ejemplos.

La idea formal - pero todavía intuitiva - consiste en que dado un conjunto, *rescatar algunos aspectos sobresalientes* de sus elementos para *igualar de alguna manera* los elementos con esas características. Ese *rescatar algunos aspectos* es dar la relación.

Para lograr el *casi igual*, la relación definida tendrá que cumplir las propiedades de *la igualdad*: reflexividad, simetría, transitividad.

Esto permitirá *clasificar* (*poner en clases*...) los elementos del conjunto sobre el que está definida la relación, como se verá seguidamente.

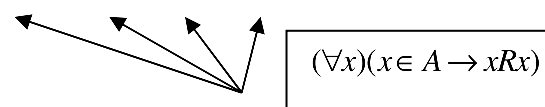
Hay que seguir definiendo y pensando!!

Primero un

EJEMPLO 4.6.15

Sea sobre $A = \{ a, b, c, d \}$ la relación

$$R = \{ (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, d), (d, a), (a, c), (c, a), (d, c), (c, d) \}$$



$(\forall x)(x \in A \rightarrow xRx)$

- Es visualmente comprobable que *es reflexiva*.

- es simétrica?

si está un par, está su dado vuelta...



Esto se verifica trivialmente en los pares de ambas componentes iguales.

Habrá que hacer un rastreo sobre R:

$R = \{ (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, d), (d, a), (a, c), (c, a), (d, c), (c, d) \}$

Esto completa la prueba que R *es simétrica*

- Es más complicado el análisis de la transitividad de R.

$(xR\,y \wedge yR\,z) \rightarrow xR\,z$

¿es verdadero en todos los casos?



También para esta propiedad los elementos de R con componentes iguales producen casos triviales de analizar.

Justifique (nuevamente) esta afirmación.

Si se tienen en R, (u, u) y (u, v) entonces ¿cuáles par debe buscar?
¿Y si están (u, v) y (v, v) ?

Ya se comentó cuando se presentaron las propiedades.

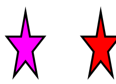
Sigamos rastreando R , buscando elementos que tengan distintas sus componentes.

$R = \{ (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, d), (d, a), (a, c), (c, a), (d, c), (c, d) \}$

Dado (a, d), hay en R de la forma $(d, ...)$? Por lo comentado antes, pero con componentes distintas!

El que busca......

$R = \{ (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, d), (d, a), (a, c), (c, a), (d, c), (c, d) \}$





Por lo cual hallamos (d, a) y (d, c).

Teniendo

- (a, d) y (d, a) busco (a, a).
- (a, d) y (d, c) busco (a, c).

Para ambos casos la respuesta es afirmativa.

Sigamos rastreando R , buscando elementos que tengan distintas sus componentes.

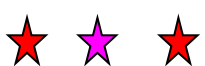
$R = \{ (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, d), (d, a), (a, c), (c, a), (d, c), (c, d) \}$



Dado (d, a), hay en R de la forma $(a, ...)$? Por lo antedicho, con componentes distintas!

Qué encontramos?

$R = \{ (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, d), (d, a), (a, c), (c, a), (d, c), (c, d) \}$



Hallamos (a, d) y (a, c).

Teniendo

- (d, a) y (a, d) busco (d, d).
- (d, a) y (a, c) busco (d, c).

Para ambos casos es afirmativo.

Buscando elementos de R que tengan distintas sus componentes:

$R = \{ (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, d), (d, a), (a, c), (c, a), (d, c), (c, d) \}$



Hallo (a, c), hay en R de la forma $(c, ...)$? y con componentes distintas.

$R = \{ (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, d), (d, a), (a, c), (c, a), (d, c), (c, d) \}$

Encontramos:

ahora (c, a) y (c, d).

Teniendo

- (a, c) y (c, a) busco (a, a). Lo encuentro.
- (a, c) y (c, d) busco (a, d). Lo encontramos…

Sigo... Buscando elementos de R que tengan distintas sus componentes:

R = { (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, d), (d, a), (a, c), (c, a), (d, c), (c, d) }



El que sigue es (c, a). Hay en R con forma (a , ...) y componentes distintas?

R = { (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, d), (d, a), (a, c), (c, a), (d, c), (c, d) }

Encontramos:

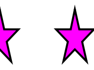
ahora (a, d) y (a, c).

Teniendo

- (c, a) y (a, c) busco (c, c). Si está.
- (c, a) y (a, d) busco (c, d). Está!!

Faltan dos elementos:

R = { (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, d), (d, a), (a, c), (c, a), (d, c), (c, d) }



Para (d, c). Hay en R con forma (c , ...) y componentes distintas?

Para (c, d). Hay en R con forma (d , ...) y componentes distintas?

para

.........., (a, c), (c, a), (d, c), (c, d) }

encuentro (c, a) y (c, d).

Teniendo

- (d, c) y (c, a) busco (d, a). Está!!
- (d, c) y (c, d) busco (d, d). Está!!

para

.....(a, d), (d, a), (a, c), (c, a), (d, c), (c, d) }

encuentro (d, a) y (d, c).

Teniendo

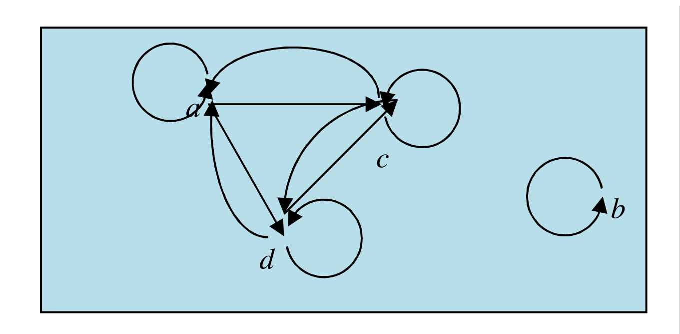
- (c, d) y (d, a) busco (c, a). Lo encontré.
- (c, d) y (d, c) busco (c, c). Si está!!

Qué *trabajito*!!!

¡¡Hemos terminado!!. *Es transitiva*.

Luego R *es de equivalencia sobre* A.

Vamos a hacer su digráfica y algunas consideraciones sobre la misma.



En la digráfica de R los elementos *a, c y d* están conectados entre sí.
El *b* queda solo.
Todos tienen lazos.
Hay ciclos de a dos elementos.
Se cierra un triángulo entre los 3 elementos relacionados, por doble camino (ida y vuelta).

Observar que si se construyen subconjuntos de A con todos los elementos de A que están relacionados entre sí por la relación R, obtenemos

$$A_1 = \{a, c, d\} \qquad A_2 = \{b\}$$
$$A = A_1 \cup A_2 \qquad A_1 \cap A_2 = \varnothing$$

EJERCICIO 4.6.16

Sean los conjuntos $A = \{ a, b, c, d \}$, $A_1 = \{a, c, d\}$, $A_2 = \{b\}$.

Se define la relación R^* sobre A por:

$$xR^*y \quad \leftrightarrow \quad (\ \{x,\ y\} \subseteq A_1 \vee \{x,\ y\} \subseteq A_2\ )$$

a) Probar que R^* es de equivalencia.
b) Hacer la digráfica de R^*.
c) Qué puede comentar ? (compare con la relación del ejercicio anterior).

EJERCICIO 4.6.17

Sea A = { a, b, c}, se define R sobre A por $R = A \times A$

a) Halle R por pares.

b) Halle el gráfico cartesiano de R.

c) Haga la digráfica de R.

d) ¿Es R una relación de equivalencia? Justifique su respuesta, por definición y además gráficamente.

EJERCICIO 4.6.18

Dado C = { La Plata, Santa Rosa, Mendoza, Bragado, Magdalena, San Rafael, Córdoba, Junín, Rosario, Pico, Carlos Paz, Bariloche, Tunuyán }

Se define sobre C la relación R: $x\, R\, y$ si y sólo si x e *y son de la misma provincia*.

a) Halle R por pares.

b) Haga la digráfica de R.

c) ¿Es R una relación de equivalencia? . Justifique su respuesta, por definición y además gráficamente.

d) ¿Este resultado con qué ejercicio previo lo compara?

Para cualquier R es útil en algunas oportunidades expresar

x* está *R*-relacionado con *y, para indicar que $x\, R\, y$

En los ejemplos y ejercicios anteriores observe:

- Todos los elementos del conjunto sobre el que está definida la relación R están relacionados por R. (Al menos $x\, R\, x$).
- Los elementos del dominio de la relación R quedan "separados" por la relación. (No se da el caso que $xR\, y \wedge xR\, z \wedge y \not R\, z$).
- Por la simetría de la relación no hay "preferencia" entre dos elementos x e y tal que R- relacionados. (Si $x\, R\, y$ entonces $y\, R\, x$)

.

Dada una relación R de equivalencia sobre A , para cada *x* elemento de A , se llama **clase de equivalencia de *x*** , al conjunto de elementos R-relacionados con él.

Simbólicamente: $R(x) = \{ y \in A : xR\, y\} = \{ y \in A : (x, y) \in R\}$



Otras notaciones para $R\,(x)$ son: $[x]$ y $\bar{x}$.

EJEMPLO 4-6.19

Sea la relación $R = \{ (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, d), (d, a), (a, c), (c, a), (d, c), (c, d) \}$ definida sobre $A = \{ a, b, c, d \}$ las clases de equivalencia son dos:

$$R\,(a) = \{ a, c, d \} = R\,(c) = R\,(d)$$

$$R\,(b) = \{ b \}$$

EJERCICIO. 4.6.20

Para cada uno de los EJERCICIOS 4.6.16, 4.6.17 y 4.618 halle las clases de equivalencia determinadas por las relaciones.

EJERCICIO* 4.6.21

Se define R sobre $A = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$:

$x\,R\,y$ si y sólo si 5 *divide* a $x - y$.

* Más adelante se tratará el tema propuesto en este ejercicio con mayor generalidad.

a) Probar que R es de equivalencia.
b) Haga la digráfica.
c) Halle las clases de equivalencia.

Recordatorio: En los ejemplos vistos hemos trabajado con conjuntos finitos, cuando los conjuntos son infinitos debemos demostrar que se cumplen las propiedades para cualquier elemento genérico del conjunto.

EJEMPLO 4.6.22

Sea la relación R definida por

$x\ R\ y$ si y sólo si 5 *divide* a x - y sobre el conjunto de los números enteros.

Recordatorio: Notemos que si 5 divide a x, entonces x=5.k, siendo k algún entero.

Analizaremos las propiedades de R sobre $\mathbb{Z}$:

R es reflexiva si $(\forall x)$ $(x \in \mathbb{Z}$ entonces $xRx)$

Sea $x \in \mathbb{Z}$, se cumple que 5 divide a $x - x$, ya que $x - x = 0 = 5.0$, por lo tanto $(\forall x)(\ xRx)$

R es simétrica si $(\forall x)(\ \forall y)(x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z},$ si $xR\,y$ entonces $yR\,x)$

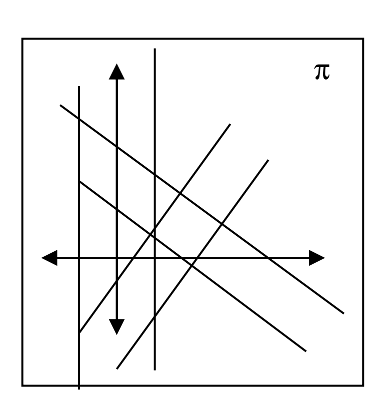
Sean $x \in \mathbb{Z}$ e $y \in \mathbb{Z}$, tales que $xR\,y$ entonces 5 divide a $x - y$, entonces $x - y = 5k$ entonces multiplicando por -1 a ambos miembros $y - x = 5(-k)$, como k es un número entero, - k también lo es, por lo tanto 5 divide a $y - x$ y resulta que $yR\,x$

R es transitiva si

$(\forall x)(\ \forall y)(\ \forall z)((x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \wedge z \in \mathbb{Z}) \wedge (\text{ si } (\ xRy \wedge yRz) \text{ entonces } xRz)\ ))$

Sean x, y, z elementos de $\mathbb{Z}$, tales que $xR\,y$ y $yR\,x$ entonces 5 divide a $x - y$ y 5 divide a $y - z$, entonces existen k y h enteros tales que $x - y = 5k$ y $y - z = 5h$ entonces haciendo cuentas $x - z = 5k + y + 5h - y$, por lo tanto $x - z = 5(k + h)$ siendo k + h un entero por ser suma de enteros. Resulta entonces que 5 divide a $x - z$ y por lo tanto $xR\,z$

Hemos probado que la relación R es reflexiva, simétrica y transitiva, por lo tanto es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$.



EJERCICIO 4.6.23

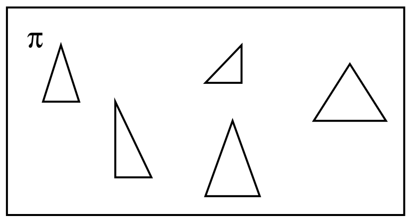
Se define sobre el conjunto *L* de rectas del plano π la relación P:

r P *t* si y sólo si *r es paralela a t* .

El gráfico es sólo una referencia visual. En π *hay infinitas rectas.*

a) Probar que P es de equivalencia sobre *L.*
b) Halle clases de equivalencia.
c) Qué puede comentar sobre que produce P en *L* ?

EJERCICIO 4.6.24



Se define sobre el conjunto *T* de triángulos del plano π la relación S:

r S *t* si y sólo si *r es semejante a t* .

El gráfico es sólo una referencia visual. En π *hay infinitos triángulos.*

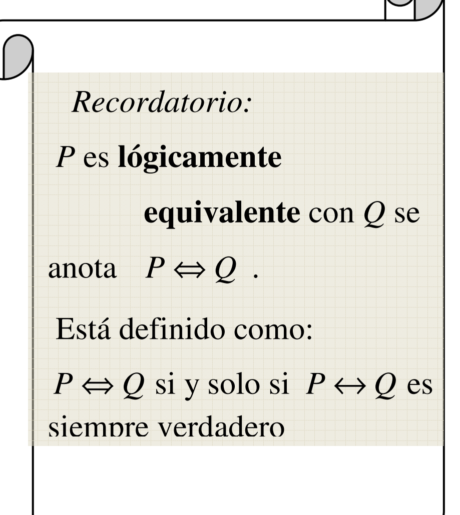
a) Probar que S es de equivalencia sobre *T.*
b) Halle clases de equivalencia.
c) Qué puede comentar sobre que produce S en *T* ?

EJERCICIO 4.6.25

Se define sobre el conjunto ***F*** de las fórmulas proposicionales la relación *E*

P E Q si y sólo si *P es lógicamente equivalente a Q* .

a) Probar que *E* es de equivalencia sobre ***F.***
b) Halle algunas clases de equivalencia.
   Por ejemplo de las fórmulas $p \to q$; $\sim p \vee q$;
   otras más...
c) Qué puede comentar sobre que produce E en ***F*** ?
   (*Por qué le habrán puesto lógicamente equivalente?? Ah!!*)



Dada una relación R de equivalencia sobre A, se llama **conjunto cociente por R** (o **cociente según R**) al conjunto de todas las clases de equivalencia definidas sobre A por R. Simbólicamente:

$$A/R = \{\ R(x) : x \in A\ \} = \{[x] : x \in A\}$$

El cociente es un conjunto de conjuntos.

Por la notación se le dice "A sobre R" o "A partido por R".

Esta notación quedará mejor justificada en lo que sigue.

EJERCICIO 4.6.26

Hallar los conjuntos cocientes para las relaciones definidas en los EJERCICIOS 4.6.16, 4.6.17. 4.6.18, 4.6.19, 4.6.20, 4.6.21, 4.6.22, 4.6.23, 4.6.24

En los EJERCICIOS realizados, ¿que piensa del cociente?

- ***Propiedades de las relaciones de equivalencia***

Para un conjunto cualquiera A, se llama **partición de A** a un conjunto de conjuntos P que verifica las siguientes tres condiciones:

Si $X \in \mathcal{P}$ entonces $X \neq \varnothing$

Si $X \in \mathcal{P} \wedge Y \in \mathcal{P} \wedge X \neq Y$ entonces $X \cap Y = \varnothing$

A es unión de los elementos de P

Observar que si $A = \varnothing$ no existe partición.

EJEMPLO 4.6.27

Una partición del conjunto A = {1, 2, 3 } es $P = \{\{1\},\{2,3\}\}$.

A

1

2

3

No es la única partición posible. Otra posible es $P = \{\{1,2\},\{3\}\}$.

Halle Ud. otras.

Como hemos visto a través de los ejemplos o ejercicios si se define una relación de equivalencia R en un conjunto A, los elementos quedan divididos en clases de equivalencia. Las clases de equivalencia son no vacías y dos clases diferentes no tienen elementos en común. Esto que pasa en los ejemplos es general. Por lo cual se tiene:

♦ LEMA 4.6.28

Sea R una relación de equivalencia sobre A entonces:

$$x\, R\, y \text{ si y sólo si } R(x) = R(y).$$

Demostración:

Sabiendo que $x\, R\, y$, veamos que vale la igualdad de las clases.

$z \in R(x)$ si y sólo si $z\, R\, x$ y por la hipótesis, $x\, R\, y$ entonces por transitividad $z\, R\, y$ y por definición de clase de equivalencia $z \in R(y)$. Observar que los pasos realizados son reversibles, por ser ellos definiciones e hipótesis por lo cual vale la otra contención, así resulta $R(x) = R(y)$.

Sea ahora la hipótesis $R(x) = R(y)$. Por ser R reflexiva, $x \in R(x)$ y por la hipótesis $x \in R(y)$ entonces por definición de clase de equivalencia $x\, R\, y$.

♦

Tenemos todo para establecer el siguiente:

♦ TEOREMA 4.6.29

Sea A un conjunto no vacío. Dada una relación de equivalencia R en A entonces el conjunto cociente es una partición de A.

Demostración:

El conjunto cociente es $A/R = \{R(x) : x \in A\}$

1) Como R es reflexiva, si $x \in A$, $x \in R(x)$ luego $R(x) \neq \emptyset$

2)Veamos que la unión de los elementos del cociente es A.

Para $\bigcup_{x \in A} R(x) \subseteq A$:

Sea z $\in \bigcup_{x \in A} R(x)$ entonces existe x, $x\in$ A, tal que

$z \in R(x)$ entonces como

$R(x)=\{y\in A: yR\,x\}$ resulta $z\in A$

Falta probar que $A\subseteq \bigcup_{x \in A}$ R(x):

Sea $x \in A$ entonces xRx por ser R reflexiva

lo que significa que $x\in R(x)$

Por lo tanto $\bigcup_{x\in A} R(x) = A$

3) Veamos que la intersección es vacía para elementos distintos del cociente $A/_R$, o lo que lo mismo que si la intersección es no vacía entonces los elementos del cociente son iguales.

$z \in R(x) \cap R(y)$ por lo tanto por definición de intersección $z \in R$(x) y $z \in R$(y) y por

definición de clase se equivalencia $z\,R\,x \wedge z\,R\,y$ por simetría de R, $x\,R\,z \wedge z\,R\,y$, por la transitividad de R, $x\,R\,y$ luego por el LEMA 4.6.28 $R(x) = R(y)$.

♦

Toda relación de equivalencia en un conjunto A define una partición del conjunto A y toda partición define una relación de equivalencia en A, vemos lo que sigue.

La partición $A/_R$ **se llama partición de A canónicamente asociada a R**.

Como cada elemento de A está en una única clase de equivalencia, se define una función

$p : A \rightarrow A/_R$, donde $p(x) = R(x)$.

Esta función p se llama **proyección al cociente** o **aplicación canónica de A en $A/_R$** .

La función p así definida resulta suryectiva pero no necesariamente inyectiva.

Es suryectiva pues dado $X \in A/R$ significa que $X = R(x)$ para algún $x \in A$ y entonces $p(x) = X$.

Se deja como ejercicio para el lector buscar un contraejemplo donde se vea que puede no ser inyectiva.

EJERCICIO 4.6.30 **(un poquito difícil)**

Dado un conjunto no vacío A. Sea P una partición de A.

Se define sobre A la relación R:

$$xR\,y \text{ si y sólo si } \{x, y\} \subseteq Y, \text{ para algún } Y \in \mathcal{P}\ .$$

a) Probar que R es una equivalencia sobre A.

b) Hallar las clases de equivalencia por R.

c) Cuál es A/R ?

d) Compare con el EJERCICIO 4.6.16. ¿Qué puede decir?

EJERCICIO 4.6.31

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, ..., 10\}$. Considere A x A.

Se define R sobre A x A como:

$$(a, b)\ R\ (c, d) \text{ si y sólo si } a.\ d = b.\ c$$

a) Probar que R es una equivalencia sobre A.

b) Hallar las clases de equivalencia por R.

c) Cuál es A/R ?

d) ¿Le recuerdan estas clases a algunos números?

EJERCICIO 4.6.32 **(algo aplicable...)**

Sea R la relación definida sobre el conjunto S de cadenas de 6 bits. (Son 6 lugares ocupados por 0 ó por 1, un ejemplo de elemento de S es 000101).

Para s y t en S,se define:

$s\ R\ t$ si y sólo si *los primeros tres bits de s y de t coinciden*

a) Probar que R es una equivalencia sobre S.

b) Hallar las clases de equivalencia por R.

c) Cuántos elementos tiene S/R ?

* En los lenguajes de programación es usual que sólo un cierto número de caracteres de los nombres de las variables y los términos especiales (se los llama *identificadores*) son significativos. En el lenguaje de programación C los primeros 31 caracteres de los identificadores son significativos. Esto significa que si dos identificadores comienzan con los mismos 31 caracteres el sistema puede considerarlos idéntico.

7. Algunas particiones de $\mathbb{Z}$ y otros anillos

Otra relación que queda definida en los enteros por medio de la divisibilidad o de la **no** divisibilidad es la siguiente:

Dado m entero (fijo) y números enteros a y *b*, se dice que

a* es *equivalente a b* módulo *m si y sólo si *existe un entero c tal que b - a = m. c*

Equivalentemente:

a *es equivalente a b módulo* ***m*** si y sólo si ***m*** *divide b* ***- a***

Si a es equivalente a *b* módulo *m* se anota indistintamente

$$a \sim_m b \quad \text{o} \quad a \equiv_m b \ \text{o} \ a \equiv b \pmod{m}$$

Si $a \sim_m b \quad \text{o} \quad a \equiv_m b$ o $a \equiv b \pmod{m}$.

También se dice que ***a*** y *b* están relacionados módulo *m*.

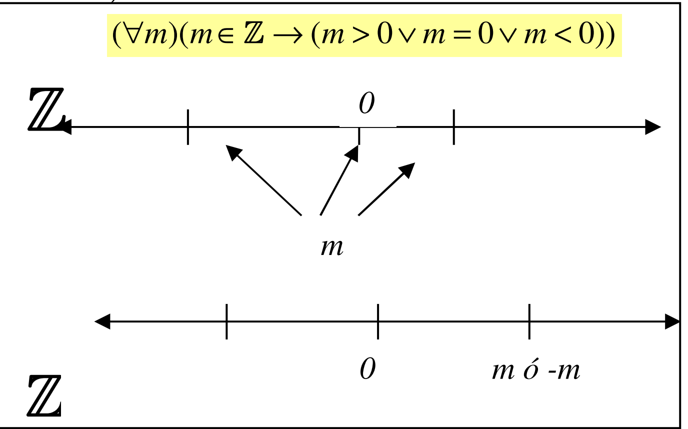
Si ***a*** *no es equivalente* a *b módulo m* se anota $a \not\sim_m b, \quad a \not\equiv b \pmod{m}, \quad a \not\equiv_m b$

•Para cada *m*, la relación definida sobre $\mathbb{Z}$ es una relación de equivalencia. Probarlo!! (Ya lo ha probado para algunos ejemplos de *m* en 4.6.21, práctica de relaciones)

Es decir: $\equiv_m$ ***es reflexiva, simétrica y transitiva*** sobre $\mathbb{Z}$.

Podemos quedarnos sólo con los m naturales:

* Dado $m \in \mathbb{Z} \rightarrow (m \in \mathbb{N} \vee -m \in \mathbb{N})$



♦ PROPIEDAD 4.7.1

Sean $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$. y sea $m \in \mathbb{Z}$

Si $a \equiv_m b$ entonces $a \equiv_{-m} b$

Demostración:

Supongamos $a \equiv_m b$. Por lo tanto existe un entero *c* tal que $b - a = m.c$.

Luego, $b - a = (-m).(-c)$, es decir existe un entero, - *c*, que demuestra que $a \equiv_{-m} b$

♦

•Por lo cual de ahora en más, salvo manifestación explícita en contrario, el módulo de la equivalencia será $m \in \mathbb{N}$.

Recordatorio:

Si *R* es una equivalencia sobre *A*, para cada $x \in A$ la

clase de equivalencia $R(x) = \{ y \in A : xR\, y \} = \overline{x}$

$xR\, y$ si y sólo si $yR\, x$ si y sólo si $R(x) = R(y)$

El *conjunto cociente* A/R (todas las clases de equivalencia de *A* según *R*) es una partición de *A*.

- *Qué significa que sea* $\boldsymbol{a \equiv_m b}$ *?*

EJEMPLO 4.7.2

Consideremos el caso $m = 0$.

Si $a \equiv_0 b$ entonces existe un entero c y

$b - a = 0.c$ luego $b - a = 0$ entonces $b = a$

Si $b = a$ entonces $b - a = 0 = 0.c$ para cualquier c entero.

Es decir la *equivalencia módulo 0 en* $\mathbb{Z}$ *es la igualdad en* $\mathbb{Z}$ 

Para cada entero a la clase $R(a) = \{ a \}$.

¿Cómo queda particionado el conjunto de los enteros? $\mathbb{Z}/\equiv_0 = ???$

Haga una digráfica (parcial) de esta relación.

EJEMPLO 4.7.3

Consideremos el caso m = 1.

Si $a \equiv_1 b$ entonces existe un entero c y $b - a = 1.c$ luego $b - a = c$

Es decir la exigencia en este caso es que la diferencia entre b y a sea un entero, que trivialmente se cumple pues tanto a como b lo son.

Por lo cual, cualquier par de enteros están relacionados módulo 1. 

Es decir, dado un entero en particular, está relacionado módulo 1 con todos los otros. Entonces hay una única clase de equivalencia.

Es indistinto el elemento que use como representante para designar la clase.

Elijo el 0, por lo cual $R(0) = \{a : a \in \mathbb{Z}\}$

Recordatorio:

xRy si y sólo si yRx si y sólo si $R(x) = R(y)$

¿Cómo es la digráfica en este caso? Haga una (parcialmente).

Cuál es $\mathbb{Z}/\equiv_1 = \{ \quad ???\}$

$a \equiv_m b$ si y sólo si $m \mid b - a$

EJEMPLO 4.7.4

¿ Es válido que: $3 \equiv_2 5$? , $-235 \equiv_{13} 457$?

Para la primer cuestión, se debe ver si 5 -3 es divisible por 2.

Como 5 -3 = 2, luego vale que $3 \equiv_2 5$. Además módulo 2, $R(3) = R(5)$.

Para la segunda, se debe ver si 457 - (-235) es divisible por 13.

Como 457+ 235 = 692, y 692 no es divisible por 13 (haga la cuenta!), luego no vale que $-235 \equiv_{13} 457$.

EJERCICIO 4.7.5

Analizar la validez de las afirmaciones:

a) $3 \equiv_5 17$ b) $8 \equiv_4 2678$ c) $786 \equiv_5 -1434$

d) Hallar sus respectivas clases de equivalencia.

EJEMPLO 4.7.6

¿Existe *m* tal que sea verdadero $9 \equiv_m 180$?

Siendo 180 - 9 = 171, la pregunta se puede reformular:

¿Cuáles son los *m* que dividen a 171?

Además de 1 (obvio).

Para contestarla se factorea 171 en primos. (Fundamental es el T. Fundamental....)

171= $3^2.19$, por lo tanto los posibles *m*: 3; 3.3; 19; 3.19; 3.3.19

EJERCICIO 4.7.7

Halle los posibles *m* que hacen verdaderas las siguientes afirmaciones:

a) $235 \sim_m 4579$ b) $570 \equiv -4333 (\text{mod } m)$ c) $1 \equiv_m -1$

d) $1 \equiv_m 0$ e) $-2347 \sim_m -2347$ f) $-786 \equiv_m 2$

Recordatorio**:**

T.A.D.: Dados a y b enteros, $b \neq 0$ existen y son únicos los enteros cociente q y resto r tales que

$a = q.b + r$ con $0 \leq r < |b|$

El teorema del Algoritmo de la División permite ver desde otro aspecto esta relación:

♦ PROPIEDAD 4.7.8

Para *m* no nulo, $a \equiv_m b$ si y sólo si a y *b* tienen el mismo resto al dividirlos por *m*.

Demostración: (idea, Ud. completa...)

Supongamos que $a \equiv_m b$, por lo tanto *m* divide a $b - a$.

Por el teorema del Algoritmo de la División:

$$a = q_a.m + r_a \quad \text{con} \quad 0 \leq r_a < m$$

Los cocientes y restos son únicos.

$$b = q_b.m + r_b \quad \text{con} \quad 0 \leq r_b < m$$

Haciendo $b - a = m.(q_b - q_a) + r_b - r_a$. Ahora aplique la hipótesis....y teorema A.D.

entonces, $r_b = r_a$ (justifique!!) .

La vuelta (es decir, saliendo de a y *b* tienen el mismo resto al dividirlos por *m* y llegar a que $a \equiv_m b$), queda de ejercicio.

♦

EJEMPLO 4.7.9

a) ¿Los números 267 y 5484 son equivalentes módulo 3?
b) ¿Los números 9284 y 767 son equivalentes módulo 17?
c) ¿Los números 543 y 6819 son equivalentes módulo 12?

Para analizar estos casos veremos si coinciden los restos cuando hacemos la división por 3 en el caso a) y por 17 en el caso b), y 12 para c).

Al dividir por 3:

267 = 3. 89, el resto es 0

5484 = 3. 1828, el resto es 0

(si se acordaba de la regla de divisibilidad por 3....también sacaba eso, ¡¡obvio!!)

Por lo cual afirmamos que 267 y 54 84 son equivalentes módulo 3.

Al dividir por 17:

9284 = 17. 546 + 2 (¿haga la cuenta para comprobar!)

767 = 17. 45 + 2 (¡haga la cuenta para comprobar!)

Por lo cual afirmamos que 9284 y 767 son equivalentes módulo 17.

Al dividir por 12:

543 = 12. 45 + 3 (¡haga la cuenta para comprobar!)

6818 = 12. 45 + 2 (¡haga la cuenta para comprobar!)

Por lo cual afirmamos que 543 y 6818 no son equivalentes módulo 12.

- *¿Cuántas clases de equivalencia determina* $\equiv_m$ *en* $\mathbb{Z}$ *si m es no nulo?*

"*¿Cuántos posibles restos puede tener una división por m?*" es una manera alternativa de preguntarse cuántas clases de equivalencia determina $\equiv_m$. El teorema del Algoritmo de la División determina como posibles restos de la división de un entero por *m* a un único valor entre todos los valores posibles $0 \leq r < m$. Esto permite formular:

♦ LEMA 4.7.10

$$\text{Dado } m \neq 0, \text{ para todo } a \in \mathbb{Z} \text{ existe un único } r,\ 0 \leq r < m \text{ tal que } a \equiv_m r$$

♦

♦ TEOREMA 4.7.11

Dado *m* no nulo, $\equiv_m$ determina *m* clases de equivalencia en $\mathbb{Z}$.

♦

Recordando que

$\overline{x}$ es la clase de equivalencia de x modulo m

$x \equiv_m y$ si y sólo si $y \equiv_m x$ si y sólo si $\overline{x} = \overline{y}$

Dado cualquier a en $\mathbb{Z}$ podemos elegir como representante de su clase módulo *m* al natural entre 0 y *m* -1 que le es equivalente (Lema 4.7.10 y Teorema 4.7.11)

Justifique que dado el *m* > 0, los naturales entre 0 y *m* -1 están en clases distintas módulo *m*. (idea: por el absurdo…)

Se tienen así las clases $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{m-1}$

Por lo cual el cociente



$$\mathbb{Z}/\equiv_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{m-1}\}$$

EJEMPLO 4.7.12

¿En qué clase de equivalencia módulo 24 está el entero 2789564?

Es obvio que un entero cualquiera siempre está en "su" clase, esto es a está en $\overline{a}$

Pero esta pregunta significa: determinar el natural < 24 equivalente con 2789564.

Para ello se busca el resto de la división por 24 de 2789564:

2789564 = 24. 116231 + 20 (¡¡Verifique!!)

Así 2789564 es equivalente módulo 24 con 20 (si?) por lo que $\overline{2789564} = \overline{20}$

Comentario elemental, por las dudas...

Siempre que no traiga confusión, es decir que se tenga bien claro en que módulo *m* se está trabajando, se usa $\overline{a}$ pero de ser necesario se usa $\overline{a}^m$.

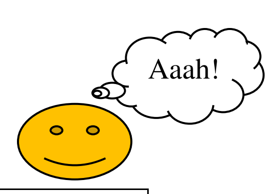
EJERCICIO 4.7.13

a) Volver a mirar y comentar lo que obtuvo para los casos de $m = 0$ y $m = 1$ en 4.7.2 y 4.7.3.

b) ¿Cuáles son las clases de equivalencia módulo 2? ¿Cómo se "dividen" los enteros por $\equiv_2$?

c) ¿Cuáles son las clases de equivalencia módulo 3, 4 y 5?

d) Mirar el comentario previo al ejercicio.



Recapacite que al variar el *m* no es lo mismo lo que indican por ejemplo $\bar{0}$, $\bar{1}$...

EJERCICIO 4.7.14

a) Hallar las clases modulo 8 de los números 345871, - 2456, 45892, 4136

b) Hallar las clases modulo 13 de los números 13573457, - 277456, 32145892, 136

En el siguiente ejercicio se verán propiedades algebraicas de la relación de equivalencia módulo *m* por las cuales se llama también **congruencia módulo *m***. (relación de equivalencia compatible con las operaciones definidas, en este caso sobre $\mathbb{Z}$)

Observe que a) y b) son casos particulares de c) y d). (Justifique esto)

EJERCICIO 4.7.15

a) Sean $a, b \in \mathbb{Z},\ a \equiv_m b$ y $c \in \mathbb{Z}$ entonces $a + c \equiv_m b + c$

b) Sean $a, b \in \mathbb{Z},\ a \equiv_m b$ y $c \in \mathbb{Z}$ entonces $a\,.\,c \equiv_m b\,.\,c$

c) Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ \ a \equiv_m b$ y $c \equiv_m d$ entonces $a + c \equiv_m b + d$

d) Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ \ a \equiv_m b$ y $c \equiv_m d$ entonces $a\,.\,c \equiv_m b\,.\,d$

Se dejan como ejercicio las dos primeras, observar que son una monotonía de la relación módulo respecto de la suma y la multiplicación de enteros. Al introducir la definición de las equivalencias se dijo que generalizaban la igualdad, esto muestra alguna de esas cosas.

De la tercera se hace el planteo:

$$\begin{array}{lll} a \equiv_m b & \leftrightarrow & b - a = m.k \quad \text{para algun } k \in \mathbb{Z} \\ c \equiv_m d & \leftrightarrow & d - c = m.h \quad \text{para algun } h \in \mathbb{Z} \end{array} \qquad (1)$$

¿Qué se debe probar?

Que $m \mid (b+d)-(a+c)$ es decir que $(b+d)-(a+c)=m.t$ para algun $t \in \mathbb{Z}$

Sumando miembro a miembro las igualdades dadas en (1) se obtiene lo querido. Hágalo y justifique.

Para la cuarta, observe que tiene las mismas hipótesis que en la tercera, por lo tanto se tienen las igualdades (1) .

¿Qué se debe probar en este caso?

Que $m \mid (b.d)-(a.c)$ es decir que $(b.d)-(a.c)=m.t$ para algun $t \in \mathbb{Z}$

para ello multiplique la 1ra. igualdad de (1) por d y la segunda por a, y luego sume miembro a miembro.

➢ *Un álgebra muy particular*

Las propiedades demostradas en el EJERCICIO 4.7.15 permiten introducir un álgebra muy particular.
Las partes c) y d) están afirmando que la suma de elementos equivalentes módulo *m* tiene por resultado elementos equivalentes, análogo para la multiplicación.

La observación permite, para $m > 0$, **definir** en el cociente $\mathbb{Z}/\equiv_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{m-1}\}$

operaciones:

la suma $\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a+b}$ y ***la multiplicación*** $\overline{a} \otimes \overline{b} = \overline{a.b}$

que quedan bien determinadas.

•Sumar dos clases es sumar los enteros que las representan y luego tomar la clase de la suma.

•Multiplicar dos clases es multiplicar los enteros representantes y luego tomar la clase del producto.

Miremos algún caso y luego justificaremos algunos dichos.

Si m = 3, el conjunto cociente es $\mathbb{Z}/\equiv_3=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}$. Para sumar en el cociente seguimos la definición: $\overline{0}\oplus\overline{0}=\overline{0+0}=\overline{0}$; $\overline{0}\oplus\overline{1}=\overline{0+1}=\overline{1}$; $\overline{0}\oplus\overline{2}=\overline{0+2}=\overline{2}$

$\overline{1}\oplus\overline{0}=\overline{1+0}=\overline{1}$; $\overline{1}\oplus\overline{1}=\overline{1+1}=\overline{2}$; $\overline{1}\oplus\overline{2}=\overline{1+2}=\overline{3}=\overline{0}$ (¿si?, calcule o piense!!)

$\overline{2}\oplus\overline{0}=\overline{2+0}=\overline{2}$; $\overline{2}\oplus\overline{1}=\overline{2+1}=\overline{3}=\overline{0}$; $\overline{2}\oplus\overline{2}=\overline{2+2}=\overline{4}=\overline{1}$ (¡¡piense!!)

Compare resultados. ¿Qué opina?

¿Qué estructura tiene $\mathbb{Z}/\equiv_3=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}$ con la suma definida?

Haga Ud. *todas* las cuentas de multiplicar posibles en $\mathbb{Z}/\equiv_3=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}$. Compare resultados.

¿Qué estructura tiene $\mathbb{Z}/\equiv_3=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}$ con la multiplicación definida?

Fabrique una tabla para la suma y otra para la multiplicación en $\mathbb{Z}/\equiv_3=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}$.

Comentarios sobre la definición de

la suma $\overline{a}\oplus\overline{b}=\overline{a+b}$ y ***la multiplicación*** $\overline{a}\otimes\overline{b}=\overline{a+b}$ en

$$\mathbb{Z}/\equiv_m=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\cdots,\overline{m-1}\} \text{ para } m>0$$

- ***El resultado queda bien determinado***:

Al hacer $a+b$ hay un único entero entre 0 y m -1 que le es equivalente módulo *m*.

Ese es el que define $\overline{a}\oplus\overline{b}$ en $\mathbb{Z}/_{\equiv_m}$.

Análogamente, al hacer $a.b$ hay un único entero entre 0 y m -1 que le es equivalente módulo *m*.

Ese define $\overline{a}\otimes\overline{b}$ en $\mathbb{Z}/_{\equiv_m}$.

- ***Propiedades en*** $\mathbb{Z}/_{\equiv_m}$ de $\oplus$ y $\otimes$

$\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a+b} = \overline{b+a} = \overline{b} \oplus \overline{a}$ $\qquad$ $\overline{a} \otimes \overline{b} = \overline{a.b} = \overline{b.a} = \overline{b} \otimes \overline{a}$

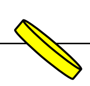
Dado el $\overline{0}$, para toda $\overline{a}$, $\overline{a} \oplus \overline{0} = \overline{a}$ $\qquad$ Dado el $\overline{1}$, para toda $\overline{a}$, $\overline{a} \otimes \overline{1} = \overline{a}$

¡La justificación queda a su cargo!

¿Qué nombre le pone a cada propiedad? Bautice bien.
(Si le parece haga antes el ejercicio siguiente para recordar)

EJERCICIO 4.7.16 (de memoria)
Escriba y dé el nombre de las propiedades de $+$ y de $.$ en $\mathbb{Z}$.
Hay una propiedad entre las dos operaciones: $a.(b+c) = a.b + a.c$ *nombre*??

¿Qué propiedad de $+$ no se "repite" para $.$ en $\mathbb{Z}$?



Recordatorio:
Por tener todas esas propiedades se dice que $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ es un **anillo conmutativo con unidad**.

Anillo es un ejemplo de estructura matemática.

¿Es anillo el conjunto $\mathbb{Z}/\equiv_3 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}$ con las operaciones que se definieron?
Justifique su respuesta.

EJEMPLO 4.7.17

La tabla de suma en $\mathbb{Z}/\equiv_4 = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}$

¡¡Verifique todas las salidas!!

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

Recordatorio:

En $(A, +)$ (un conjunto no vacío A con una operación de "suma") y con un elemento nulo 0, el $a \in A$ ***tiene opuesto*** (o *inverso aditivo*) si existe $b \in A$ tal que $a + b = b + a = 0$

Al elemento b se lo anota - a.

Los *opuestos*:

$-\overline{0} = \overline{0}$

$-\overline{1} = \overline{3}$

$-\overline{2} = \overline{2}$

$-\overline{3} = \overline{1}$

¿Es el fin de los refranes?

2 más 2 No es 4 (ó si?)

♦ PROPIEDAD 4.7.18

En $\mathbb{Z}/\equiv_m = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\cdots,\overline{m-1}\}$ para $m > 0$, todo elemento tiene opuesto.

Demostración: (idea, Ud. la completa...)

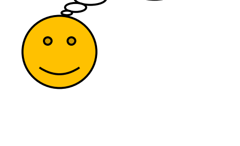
Dada una clase cualquiera $\overline{a} \in \mathbb{Z}/_{\equiv_m}$ hay que hallar $\overline{b} \in \mathbb{Z}/_{\equiv_m}$ tal que $\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{0}$

Es decir que exista b tal que el resto de $a + b$ y de 0 divididos por m sea igual, pues se quiere que $\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a+b} = \overline{0}$

El resto de 0 al dividirlo por m es 0. Debe ser entonces 0 el resto para $a + b$.

Dicho de otra forma, debe verificares que $m \mid a+b$.

El caso más simple (o más pequeño) es si $a + b = 0$. (De acuerdo?)



Lo que es lo mismo a que $a + b = m$, pues $\overline{m} = \overline{0}$.

Si $\overline{a} \in \mathbb{Z}/_{\equiv_m}$ entonces $a = j$ para un $j = 0,\cdots,m-1$.

Luego existe $b = m - a$ tal que $\overline{b} \in \mathbb{Z}/_{\equiv_m}$. ¡¡Justifique!!

♦

EJEMPLO 4.7.19

La tabla de multiplicar en $\mathbb{Z}/\equiv_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$. Verifique todos los resultados.

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Algunas sorpresas o cosas no habituales:

En la aritmética de $\mathbb{Z}$ (también en $\mathbb{R}$) si

un producto es 0 es porque uno de los factores también es 0.

¡¡En este caso NO!!

EJERCICIO 4.7.20

Haga las tablas de suma y multiplicación en

a) $\mathbb{Z}/\equiv_2$. ¿Qué puede comentar al respecto? ¿qué le recuerda?

b) $\mathbb{Z}/\equiv_5$

c) $\mathbb{Z}/\equiv_6$

d) $\mathbb{Z}/\equiv_{12}$. Dé un ejemplo de la vida diaria (no digital...) que use este módulo.

EJERCICIO 4.7.21

Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas en $\mathbb{Z}/\equiv_m$ $(m > 0)$:

a) Para toda $\overline{a} \in \mathbb{Z}/\equiv_m$ se cumple que $\overline{a} \oplus \overline{0} = \overline{a}$

b) Para toda $\overline{a} \in \mathbb{Z}/\equiv_m$ se cumple que $\overline{a} \otimes \overline{1} = \overline{a}$

c) Para toda $\overline{a} \in \mathbb{Z}/\equiv_m$ existe $\overline{b} \in \mathbb{Z}/\equiv_m$ y $\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{0}$

d) Para toda $\overline{a} \in \mathbb{Z}/\equiv_m$ si $\overline{a} \neq \overline{0}$ entonces existe $\overline{b} \in \mathbb{Z}/\equiv_m$ y $\overline{a} \otimes \overline{b} = \overline{1}$

e) Para $\overline{a}, \overline{b}$ y $\overline{c}$ son elementos de $\mathbb{Z}/\equiv_m$, si $\overline{a} \neq \overline{0}$ y $\overline{a} \otimes \overline{b} = \overline{a} \otimes \overline{c}$ entonces $\overline{b} = \overline{c}$

f) Para $\overline{a}, \overline{b}$ y $\overline{c}$ en $\mathbb{Z}/\equiv_m$ se cumple que $\overline{a} \otimes (\overline{b} \oplus \overline{c}) = (\overline{a} \otimes \overline{b}) \oplus (\overline{a} \otimes \overline{c})$

EJERCICIO 4.7.22
Con relación al 4.7.19 y 4.7.29, haga para cada uno de los conjuntos una lista de los elementos invertibles y sus inversos.

Recordatorio:

En $(A, .)$ (un conjunto no vacío A con una operación de "multiplicación") y con un elemento unidad 1,

el $a \in A$ ***tiene inverso*** (o *inverso multiplicativo*)

si existe $b \in A$ tal que $a \,.\, b = b \,.\, a = 1$

Al elemento b se lo anota a^{-1}.

El a se dice ***invertible.***

EJERCICIO 4.7.23 (de memoria activa)

a) Escriba y dé el nombre de las propiedades de $+$ y de $.$ en $\mathbb{R}$.

b) Hay una propiedad entre las dos operaciones: $a.(b+c) = a.b + a.c$ *nombre*??

c) ¿Qué propiedad de $+$ no se "repite" en $.$? ¿Cómo se modifica y se tiene algo parecido?

d) Hay alguna propiedad de $.$ en $\mathbb{R}$ que no se da en $\mathbb{Z}/\equiv_m$?

Recordatorio:

Por tener todas esas propiedades se dice que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un **cuerpo conmutativo**.

Con las mismas operaciones se tiene el cuerpo de los racionales: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

Cuerpo es otro ejemplo de estructura matemática, "más rica" que anillo., por eso menos general.
Si es cuerpo es anillo con unidad.

EJERCICIO 4.7.24
Para los ejemplos vistos en el 4.7.20, qué tipo de estructura algebraica tiene cada uno de los $(\mathbb{Z}/\equiv_m, \oplus, \otimes)$. ¿Cómo analiza algunas propiedades en las tablas?
¿En esos casos para qué *m* es un anillo y no un cuerpo?, ¿en qué *m* es cuerpo?

¿Puede decir qué tipo de número entero positivo es en cada caso?



Se supone que Ud. concluyó a partir de los ejemplos vistos que:

> Si m es primo entonces $(\mathbb{Z}/\equiv_m\ ,\ \oplus\ ,\ \otimes)$ es un cuerpo.
>
> Si m es compuesto entonces $(\mathbb{Z}/\equiv_m\ ,\ \oplus\ ,\ \otimes)$ es sólo un anillo conmutativo con unidad.

Recordatorio:

•Si $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$ y existe d máximo común divisor entre ellos, $d = (a, b)$, entonces existen enteros g y f tales que $d = g.\ a + f.\ b$

• $(a, b) = 1$ si y sólo si existen enteros g y f tales que $1 = g.\ a + f.\ b$

Sus conclusiones son válidas.

Vale el siguiente:

♦ TEOREMA 4.7.25

Para todo $m > 0$ y $a \in \mathbb{Z}$. $(a, m) = 1$ si y sólo si $\overline{a} \in \mathbb{Z}/\equiv_m$ es invertible.

Demostración:

Supongamos que $(a, m) = 1$.

Por propiedades del máximo común divisor existen $h \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{Z}$ tales que $1 = h.\ a + k.\ m$ y ahora aplicamos propiedades de la equivalencia módulo m:

$\overline{1} = \overline{h.\ a + k.\ m} = \overline{h.\ a} \oplus \overline{k.\ m}$ (por definición de suma), $\overline{1} = \overline{h.\ a} \oplus \overline{k.\ m} = \overline{h} \otimes \overline{a} \oplus \overline{k} \otimes \overline{m}$ (por definición de producto) y como $\overline{m} = \overline{0}$ y propiedades del neutro resulta que el último término es $\overline{\mathbf{0}}$.

Por lo cual $\overline{1} = \overline{h} \otimes \overline{a}$, entonces existe $\overline{h}$ que la clase inversa de $\overline{a}$.

Supongamos que $\overline{a} \in \mathbb{Z}/\equiv_m$ es invertible.

Es decir que existe $\overline{h} \in \mathbb{Z}/\equiv_m$ tal que $\overline{h} \otimes \overline{a} = \overline{1}$, ahora apliquemos definición de producto y definición de congruencia módulo m, $\overline{h} \otimes \overline{a} = \overline{h.a} = \overline{1}$ y $h.a - 1 = t.m$ para algún t entero. Por lo cual $h.a - t.m = 1$ o sea que $h.a + (-t).m = 1$ y como $-t$ es entero, resulta por propiedad de máximo común divisor que $(a, m) = 1$.

♦

Veamos que importante lo siguiente:

♦ COROLARIO 4.7.26

Para $p > 0$, p es primo si y sólo si $(\mathbb{Z}/\equiv_p\,,\ \oplus\,,\ \otimes\,)$ es cuerpo.

Es claro que todo p primo positivo es coprimo ($(p, k) = 1$) con los números $1 \leq k \leq p-1$.

Por lo cual toda clase no nula de $\mathbb{Z}/\equiv_p$ es invertible.

♦

Observación importante o no tanto sobre la notación:

Para indicar la clase de equivalencia $\overline{a}$ hay una notación alternativa $[a]$ y también $[a]_m$.

Para indicar las operaciones de suma y multiplicación en $\mathbb{Z}/\equiv_m$ se ha usado un símbolo distinto al que usamos en $\oplus$ y $\otimes$ pues son operaciones distintas pero hay autores que usan los símbolos + y . .

La diferente simbolización le hará equivocarse menos, sobre todo cuando se empieza a trabajar con estas operaciones.

Es usual encontrar en lugar de $(\mathbb{Z}/\equiv_m\,,\ \oplus\,,\ \otimes\,)$ simplemente $\mathbb{Z}_m$, esto significa toda la estructura: el conjunto con las operaciones definidas sobre él.

En el último corolario porqué se cambió *p* por *m* ....

Y que quiere que le diga: los primos son *p*.

Es sólo cuestión de costumbre de hablar de los $\left(\mathbb{Z}/\equiv_p\,,\oplus\,,\otimes\right)$ o $\mathbb{Z}_p$ cuando *p* es primo.

Los ***cuerpos*** $\mathbb{Z}_p$ son esencialmente los únicos ejemplos de cuerpos finitos, hay otros pero equivalentes con ellos desde un punto de vista algebraico.

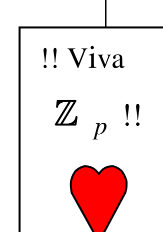
EJEMPLO 4.7.27

Una delicia para muchos:

a) Pruebe que para a y b en $\mathbb{Z}/\equiv_2$, en $\mathbb{Z}_2$ vale $(a \oplus b)^2 = a^2 \oplus b^2$

b) Generalice para cualquier primo p, usando la fórmula de Newton y que

$p \left| \binom{p}{k} \right.$ para $0 < k < p$



Para a)

a y b en $\mathbb{Z}/\equiv_2$, $(a \oplus b)^2 = a^2 \oplus (a \otimes b) \oplus (b \otimes a) \oplus b^2 = a^2 \oplus \overline{2} \otimes (a \otimes b) \oplus b^2$ aplicando las propiedades de las operaciones.

Ahora apliquemos que se está trabajando en $\mathbb{Z}_2$, por lo tanto $\overline{2} = \overline{0}$. Por lo cual resulta,

$$(a \oplus b)^2 = a^2 \oplus \overline{2} \otimes (a \otimes b) \oplus b^2 = a^2 \oplus \overline{0} \otimes (a \otimes b) \oplus b^2 = a^2 \oplus b^2$$

Para b),

a y b en $\mathbb{Z}/\equiv_p$, $(a \oplus b)^p = a^p \oplus b^p$ esto se demuestra siguiendo los pasos propuestos.

EJEMPLO 4.7.28

Hallar las soluciones de las ecuaciones en $\mathbb{Z}_{12}$:

a) $x \oplus \overline{3} = \overline{6}$

b) $\overline{7} \otimes \overline{x} \oplus \overline{5} = \overline{7}$

c) $\overline{6} \otimes \overline{x} \oplus \overline{11} = \overline{7}$

d) $\overline{6} \otimes \overline{x} \oplus \overline{10} = \overline{4}$

La operación de multiplicación tiene prioridad sobre la suma $\overline{7} \otimes \overline{x} \oplus \overline{5} = \overline{7}$ representa $(\overline{7} \otimes \overline{x}) \oplus \overline{5} = \overline{7}$ también se puede simplificar más poniendo $\overline{7}\,\overline{x} \oplus \overline{5} = \overline{7}$ (la multiplicación se sobreentiende)

Tener a mano las tablas que hizo en el 4.7.20 d) para módulo 12

Para resolver las ecuaciones se usa la misma técnica que en $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{R}$.

Para la ecuación dada en a) la solución está garantizada por la existencia de opuesto:

$$\overline{x} \oplus \overline{3} = \overline{6}$$
$$\overline{x} = \overline{6} \oplus (-\overline{3})$$
$$\overline{x} = \overline{6} \oplus \overline{9}$$
$$\overline{x} = \overline{3}$$

Justifique los pasos.

Para las ecuaciones que siguen hay que usar también el concepto de elemento invertible:

a es *invertible* si hay un *b*:

$a.b = b.a = 1 \rightarrow b = a^{-1}$

b)

$$\overline{7} \otimes \overline{x} \oplus \overline{5} = \overline{7}$$
$$\overline{7} \otimes \overline{x} = \overline{7} \oplus (-\overline{5})$$
$$\overline{7} \otimes \overline{x} = \overline{7} \oplus \overline{7}$$
$$\overline{7} \otimes \overline{x} = \overline{2}$$
$$\overline{x} = \overline{2} \otimes \left(\overline{7}\right)^{-1}$$
$$\overline{x} = \overline{2} \otimes \overline{7}$$
$$\overline{x} = \overline{2}$$

Justifique los pasos. Cuál es (7, 12) = ?

c)

$$\overline{6} \otimes \overline{x} \oplus \overline{11} = \overline{7}$$
$$\overline{6} \otimes \overline{x} = \overline{7} \oplus (-\overline{11})$$
$$\overline{6} \otimes \overline{x} = \overline{7} \oplus \overline{1}$$
$$\overline{6} \otimes \overline{x} = \overline{8}$$

Justifique los pasos. Cuál es (6, 12) = ?

¿Cómo se sigue? Las tablas construidas permiten razonar de las siguientes maneras:

* No hay ninguna clase que multiplicada por $\overline{6}$ de $\overline{8}$

* Como $\overline{6}$ no tiene inverso (nunca encuentro el $\overline{1}$ en la columna del $\overline{6}$ o fila) no se puede despejar la incógnita.

Por lo tanto, no hay solución.

d)

$$\overline{6} \otimes \overline{x} \oplus \overline{10} = \overline{4}$$
$$\overline{6} \otimes \overline{x} = \overline{4} \oplus (-\overline{10})$$
$$\overline{6} \otimes \overline{x} = \overline{4} \oplus \overline{2}$$
$$\overline{6} \otimes \overline{x} = \overline{6}$$

Justifique!! . Mirando la tabla de multiplicar en la columna o fila del $\overline{6}$, ¿qué se puede afirmar? La ecuación tiene por solución $\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}$ y $\overline{7}$.

EJEMPLO 4.7.29

Hallar las soluciones de las ecuaciones en $\mathbb{Z}_{17}$:

Haga y tenga a mano las tablas módulo 17

a) $x \oplus \overline{3} = \overline{6}$

b) $\overline{7} \otimes \overline{x} \oplus \overline{5} = \overline{7}$

Resolvemos siguiendo los pasos habituales en este tipo de pr

Para a):

$$\overline{x} \oplus \overline{3} = \overline{6}$$
$$\overline{x} = \overline{6} \oplus (-\overline{3})$$
$$\overline{x} = \overline{6} \oplus \overline{14}$$
$$\overline{x} = \overline{3}$$

Justifique.

Para b):

$$\overline{7} \otimes \overline{x} \oplus \overline{5} = \overline{7}$$
$$\overline{7} \otimes \overline{x} = \overline{7} \oplus (-\overline{5})$$
$$\overline{7} \otimes \overline{x} = \overline{7} \oplus \overline{12}$$
$$\overline{7} \otimes \overline{x} = \overline{2}$$
$$\overline{x} = \overline{2} \otimes \left(\overline{7}\right)^{-1}$$
$$\overline{x} = \overline{2} \otimes \overline{5}$$
$$\overline{x} = \overline{10}$$

Justifique los pasos.

• Comentario sobre los últimos ejemplos.

Se ha observado ya, que en los $\mathbb{Z}_m$ en el caso de los anillos que no son cuerpos hay un comportamiento aún más diferente que en los cuerpos, de las operaciones "suma" y "multiplicación" al que estas registran en $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{R}$.

Muy natural que no sea igual, se está en otro lado.

Las ecuaciones de primer grado en $\mathbb{R}$ siempre tienen solución única. Pero en $\mathbb{Z}$ ese tipo de ecuación o bien tiene solución única o no tiene solución.

La razón de esto *es estructural.* $\mathbb{R}$ es cuerpo y $\mathbb{Z}$ no.

Es así que por su estructura en $\mathbb{Z}_{12}$ hay ecuaciones de grado uno con solución única, sin solución o más de una solución, esto depende obviamente de los coeficientes.

Y por ser $\mathbb{Z}_{17}$ un cuerpo este tipo de ecuaciones tiene solución única.

¿Y para otro grado? Análogo. Se verá en lo que sigue sólo algunas sencillas.

EJERCICIO 4.7.30

Hallar las soluciones de las ecuaciones: i) En $\mathbb{Z}_{16}$ ii) En $\mathbb{Z}_{31}$

a) $\overline{7} \otimes \overline{x} \oplus \overline{5} = \overline{7}$

b) $\overline{4} \otimes \overline{x} \oplus \overline{3} = \overline{2}$

c) $\overline{9} \otimes \overline{x} \oplus \overline{3} = \overline{13}$ Comente y justifique los resultados.

d) $\overline{8} \otimes \overline{x} \oplus \overline{15} = \overline{7}$

e) $\overline{x}^2 \oplus \overline{5} = \overline{7}$

f) $\overline{3} \otimes (\overline{x}^2 \oplus \overline{14}) = \overline{5}$

g) $\overline{3} \otimes \overline{x}^2 \oplus \overline{14} = \overline{7}$

EJERCICIO 4.7.31

(no obligatorio, sólo para los estructurados y formales)

a) Buscar en las tablas hechas hasta ahora divisores de cero.

b) Demostrar que en $\mathbb{Z}_p$, con p primo no hay divisores de cero.

Un elemento $a \neq 0$ en un anillo A ***es divisor de 0*** si existe $b \in A, b \neq 0$ tal que $a.\ b = 0$

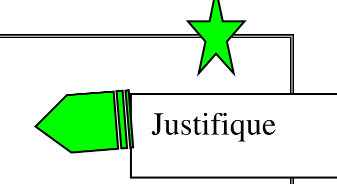
c) Anímese a dar un criterio amplio para determinar si las ecuaciones de congruencia de primer grado admiten solución.

- ***Algunas reglas muy conocidas***

Las propiedades demostradas en el EJERCICIO 4.7.15 permiten introducir un álgebra muy particular cuya aplicación justifica algunos resultados muy conocidos y usados.

Como caso particular de la parte d) de 4.7.15 vale que:

Para todo $n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1$, si $a \equiv_m b$ entonces $a^n \equiv_m b^n$.



Además vale trivialmente para $n = 0$

¿Cómo lo podría demostrar y por qué método?



$N = 6789$

Sumamos sus cifras:

$6 + 7 + 8 + 9 = 30$

entonces ....

La divisibilidad por 3:

Un número es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus cifras es 3 o múltiplo de 3.

Para demostrar esto se usará la expresión en base 10 de todo número entero *N* de h +1 cifras:

$$N = a_h a_{h-1} \cdots a_2 a_1 a_0 = a_h.10^h + a_{h-1}.10^{h-1} + \cdots + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0$$

En término de congruencias:

N es divisible por 3

si y sólo si

N es equivalente módulo 3 con 3

si y sólo si

la clase de equivalencia de *N* modulo 3 es la clase del 0 módulo 3.

- ¿Cuál es la clase de *N módulo 3* ?

Por las operaciones y propiedades presentadas se tiene:

Por $\overline{N}$ se entiende la clase de equivalencia módulo 3.

$$\overline{N} = \overline{a_h.10^h + a_{h-1}.10^{h-1} + \cdots + a_2.10^2 + a_1.10^1 + a_0.10^0} =$$
$$= \overline{a_h.10^h} \oplus \overline{a_{h-1}.10^{h-1}} \oplus \cdots \oplus \overline{a_2.10^2} \oplus \overline{a_1.10^1} \oplus \overline{a_0.10^0} =$$
$$= \overline{a_h} \otimes \overline{10^h} \oplus \overline{a_{h-1}} \otimes \overline{10^{h-1}} \oplus \cdots \oplus \overline{a_2} \otimes \overline{10^2} \oplus \overline{a_1} \otimes \overline{10^1} \oplus \overline{a_0} \otimes \overline{10^0} =$$

Justifique todos los pasos

Siguiendo:

$\overline{10} = \overline{1}$ por tanto para todo $n \in \mathbb{N}$

$\overline{10}^n = \overline{1}^n = \overline{1}$

$\overline{}$ indica clase de equivalencia módulo 3.

por propiedad enunciada al comienzo de esta sección

Reemplazando se obtiene que la clase módulo 3 de *N* es:

$$\overline{N} = \overline{a_h} \otimes \overline{1} \oplus \overline{a_{h-1}} \otimes \overline{1} \oplus \cdots \oplus \overline{a_2} \otimes \overline{1} \oplus \overline{a_1} \otimes \overline{1} \oplus \overline{a_0} \otimes \overline{1}$$

$$\overline{N} = \overline{a_h.1 + a_{h-1}.1 + \cdots + a_2.1 + a_1.1 + a_0.1}$$

$$\overline{N} = \overline{a_h + a_{h-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0}$$

Justifique todo!!!

N es divisible por 3

si y sólo si

$\overline{N} = \overline{0}$

¡La clase de *N* módulo 3 es la suma de sus cifras!

Por eso el enunciado que conoce desde chiquito y ahora lo sabe demostrar (seguro que ahora puede dormir...)

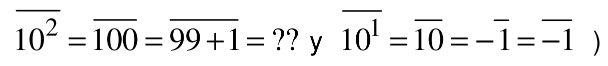


EJERCICIO 4.7.32

a) Por qué para saber si un número es divisible por 2 sólo se mira la última cifra? Haga una defensa en término de congruencias.

b) Halle una regla de divisibilidad por 9.

c) Halle una regla de divisibilidad por 11. (sugerencias: en módulo 11



$\overline{10^2} = \overline{100} = \overline{99+1} = ??$ y $\overline{10^1} = \overline{10} = -\overline{1} = \overline{-1}$)



d) Halle la cifra de la unidad de 25^{14} (sugerencia: escriba el número en base 10 y tome congruencia módulo 10)

El tiempo medido

- *Las horas y los días*

¿Cuántas horas tiene un día? Hay algunos que parecen más largos y otros más cortos, pero todos ellos tienen 24 horas. Así es la convención.

Los días se juntan de a 7 para tener una semana.

¡Use congruencias!

EJERCICIO 4.7.33

a) Ahora es las 9 de la noche. ¿Qué hora (del día) será dentro de 350 horas?

b) Si hoy es viernes, ¿qué día será dentro de 237 días? ¿Y de 19 días y 500 noches?

c) Mañana es sábado, ¿qué día fue hace 2456 horas?

- ***Los meses y los años***

El origen de nuestro calendario actual es el *calendario Juliano* (por Julio César) .

Constaba c/año común de 365 días y cada 4 años era año bisiesto de 366.

Los años comenzaban en Marzo y finalizaban en Febrero. Sus meses y su cantidad de días:

Marzo	30 días
Abril	30
Mayo	31
Juno	30
Quinto	31 (Julio C. le puso Julio)
Sexto	31 (el actual Agosto)
Septiembre	30
Octubre	31
Noviembre	30
Diciembre	31
Enero	31
Febrero	28 (los bisiestos 29)

Nuestro calendario actual es el *calendario Gregoriano* (por Papa Gregorio XIII) . La reforma se hizo en 1582 y se sacaron "de un plumazo" 10 días: después del 4 de octubre fue el 15 de octubre.

Consta cada año común de 365 días y cada 4 años es de 366, pero en el caso de los años seculares (su número es divisible por 100) para ser bisiesto debe ser por 400. Por eso lo fue el 2000 pero no el 1900.

Los años comienzan en Enero y finalizan en Diciembre con los mismos días que en el Juliano.

EJERCICIO 4.7. 34

a) ¿Qué día de la semana fue el 25 de mayo de 1810?
b) ¿Qué día de la semana fue el 9 de julio de 1816?
c) ¿Qué día de la semana fue el 15 de agosto de 1711?
d) ¿Qué día de la semana nació?

Use congruencias y cuente los años bisiestos

- ***Algunos teoremas famosos***

Hay dos teoremas muy famosos que tratan de éstos temas de la teoría de números.

- ***Los restos chinos***

Uno de ellos viene de la antigua China, que matemáticamente tuvo un desarrollo independiente al de la occidental. La obra más importante del matemático (también poeta y arquitecto) Ch'in Chiu-Shiao (1202) es el libro *Shu-shu chiu-chang* un tratado de 9 secciones, recopilación de la matemática china. En una de las secciones, *El análisis indeterminado*, expone problemas de ecuaciones de congruencia.
Entre ellos está un problema (y su solución) atribuidos a Sun Tzu (de aprox. el 300 d.C.) y el enunciado dice:

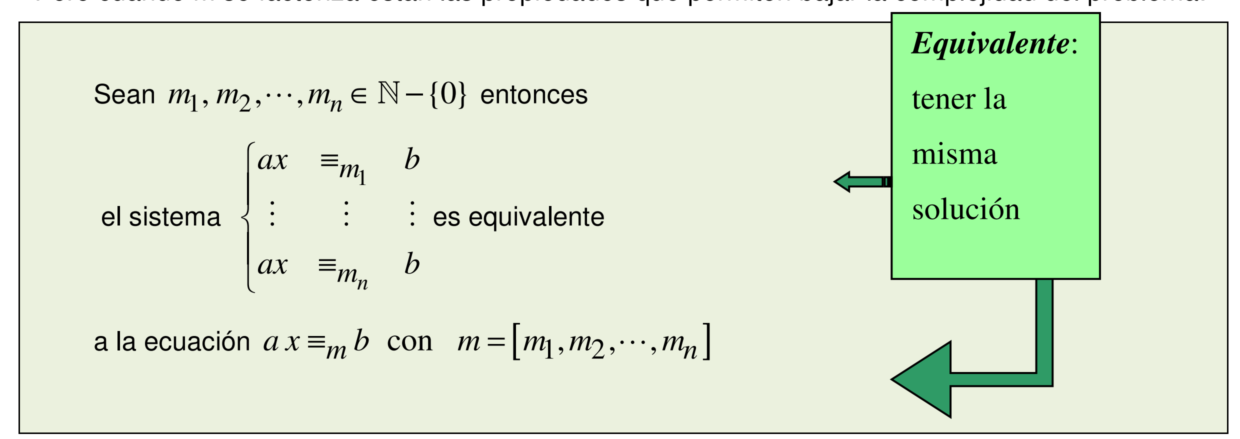
Existe una cantidad de cosas que al contarlas de tres en tres deja un residuo de dos; al contarlas de cinco en cinco deja un residuo de tres; al contarlas de siete en siete deja un residuo de dos. Hallar el número de cosas

El planteo usando las congruencias, llamando *x* a la cantidad de cosas: $\begin{cases} x \equiv_3 2 \\ x \equiv_5 3 \\ x \equiv_7 2 \end{cases}$

Este es un caso especial del **Teorema Chino del Resto** y Shiao da un algoritmo desarrollado por él para la solución del problema que es $x = 23$.

El problema de resolver ecuaciones de congruencia del tipo $\boxed{a\,x \equiv_m b}$ es laborioso para *m* grande.

Pero cuando *m* se factoriza están las propiedades que permiten bajar la complejidad del problema:



En el caso que $(m_j, m_k) = 1$ para $j \neq k$ entonces $[m_1, m_2, \cdots, m_n] = m = m_1 . m_2 . \cdots . m_n$

Lo cual da la propiedad:

Sea $m = p_1^{h_1} . p_2^{h_2} . \cdots . p_n^{h_n}$ entonces la ecuación

$$a\,x \equiv_m b$$

es equivalente al sistema $\begin{cases} ax & \equiv_{p_1^{h_1}} & b \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ax & \equiv_{p_n^{h_n}} & b \end{cases}$

La factorización para todos los m interesantes.. qué la garantiza??...

Recordatorio:

m es el mínimo común múltiplo de los enteros no nulos e y f, si $m > 0$ y además cumple

1) $e | m \wedge f | m$ y 2) $e | m^* \wedge f | m^*$ entonces $m | m^*$

♦ TOREMA 4.7.35

Sean a y b enteros, tales que a es no nulo. Sean $m_1, m_2, \cdots, m_n \in \mathbb{N} - \{0\}$ entonces

el sistema $\begin{cases} ax & \equiv_{m_1} & b \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ax & \equiv_{m_n} & b \end{cases}$ es equivalente a

la ecuación $a\,x \equiv_m b$ con $m = [m_1, m_2, \cdots, m_n]$

Recordatorio:

$m = [a, [b, c]] = [a, b], c]$ y también vale para n números enteros.

Demostración:

Supongamos que estamos en las condiciones generales de las hipótesis del teorema. Comenzaremos por lo más sencillo.

Sea x solución de la ecuación $a\,x \equiv_m b$. Por lo tanto $m | ax - b$. Como $m = [m_1, m_2, \cdots, m_n]$, por la condición 1) de definición para cada $i, 1 \leq i \leq n$ $m_i | m$. Aplicando la transitividad de la divisibilidad se tiene que para cada $i, 1 \leq i \leq n$ $m_i | a\,x - b$. Por lo cual x solución del sistema.

Vamos ahora a la implicación un poco más complicada.

Sea x solución del sistema, es decir que se cumple que para cada $i, 1 \leq i \leq n$ $a\,x - b = k_i . m_i$

Es decir que para cada $i, 1 \leq i \leq n \quad m_i \mid a\,x - b$. Si $m = [m_1, m_2, \cdots, m_n]$, podemos considerar sólo dos ecuaciones sin pérdida de generalidad por la "asociatividad" del cálculo del mínimo común múltiplo.

Supongamos que $i, 1 \leq i \leq 2 \quad m_i \mid a\,x - b$. Debemos comprobar que $m \mid ax - b$. Es decir se cumple $a\,x \equiv_m b$. Recordemos a $m = \dfrac{m_1 . m_2}{d}$ siendo $d = (m_1, m_2)$ el máximo común divisor entre m_1, m_2.

> Recordatorio:
>
> •Si $(e, f) = 1$ y $e \mid g$ y $f \mid g$ entonces $e.f \mid g$
>
> • Si $d = (e, f)$ entoces $e = E.d$ y $f = F.d$ y $(E, F) = 1$.

$A_1.d = m_1 \mid a.x - b$ y además $A_2.d = m_2 \mid a.x - b$.

Es entonces que $m = d. A_1. A_2$.

Además $A_1 \mid a.x - b$ y además $A_2 \mid a.x - b$

y usando propiedades tenemos que :

$A_1.A_2 \mid a\,x - b$, es decir que existe $A \in \mathbb{Z}$ y vale que $A.A_1.A_2 = a\,x - b$. (1)

Además se tiene que $A_1.d.K = a.x - b$ y además $A_2.d.T = a.x - b$, para $K \in \mathbb{Z}$ y $T \in \mathbb{Z}$.

Luego resulta $A.A_1.A_2 = K.d.A_1$ y que $A.A_1 A_2 = T.d.A_2$

de donde resulta que $K.d.A_1 = T.d.A_2$.

Por lo cual se tiene que $K.A_1 = T.A_2$ (haciendo un poco de cuentas…)

> Recordatorio:
>
> •Si $(e, f) = 1$ y
>
> $e \mid g.f$ entonces $e \mid g$

En términos de divisibilidad significa por ejemplo, que

$A_1 \mid T.A_2$ y como $(A_1, A_2) = 1, \quad A_1 \mid T$. Por lo tanto existe un entero *U*,

$T = U.A_1$ y remplazando convenientemente $A.A_1 A_2 = T.d.A_2 = U.A_1.d.A_2 = U.A_1.A_2.d = U.m$

Pero por (1) $A.A_1.A_2 = a\,x - b = U.A_1.A_2.d = U.m$ es decir $m \mid ax - b$.

Es decir se cumple $a\,x \equiv_m b$.

♦

EJEMPLO 4.7.36

Resolver la ecuación en $\mathbb{Z}_{\equiv_{100}}$ $\quad \overline{3} \otimes x = \overline{33}$

Como se hará la factorización del 100 y se trabajará en distintos $\mathbb{Z}_{\equiv_m}$ para los factores de *m*, es necesario no confundirse por lo cual se usará alguna de las notaciones alternativas

$$3 \otimes x \equiv_{100} 33 \text{ o brevemente } 3\,x \equiv_{100} 33 \text{ o } 3x = 33 \ (\text{mod } 100)$$

Haga las tablas de $\mathbb{Z}_4$ y $\mathbb{Z}_{25}$

Como $100 = 2^2.5^2$, la ecuación dada es equivalente a

$\begin{cases} 3x \equiv_4 33 \\ 3x \equiv_{25} 33 \end{cases}$ pasando la 1er. ec. a $\mathbb{Z}/_{\equiv_4}$ y la 2da. a $\mathbb{Z}/_{\equiv_{25}}$ $\begin{cases} 3x \equiv_4 2 \\ 3x \equiv_{25} 8 \end{cases}$

Son solución de la 1er. ecuación los enteros de la *clase del 3 módulo 4*: 3, 7, 11, 15,...
Son solución de la 2da. ecuación los enteros de la *clase del 11 módulo 25*: 11, 36, ...
Para ser solución del sistema debe cumplir con las dos condiciones (son los elementos de la intersección de las dos clases)... es entonces el 11 el primero de ellos.
Es la clase del 11 módulo 100.

EJEMPLO 4.7.37 (un problema Chino de aproximadamente del 1275)
"*Hallar un número que al ser dividido por siete da uno como resto, al ser dividido por ocho da dos como resto y al ser dividido por nueve da tres como residuo."*

El planteo lleva al sistema:

$$\begin{cases} x \equiv_7 1 \\ x \equiv_8 2 \\ x \equiv_9 3 \end{cases}$$

Sugerencia de resolución: por definición, de la 1ra. $x = 1 + 7 \cdot k$ (1)
sustituyendo en la 2da. $1 + 7. k = 2 \pmod 8$

resolviendo se tiene: $k = 7 \pmod 8$ Verifique !!

Pero entonces $k = 7 + 8. h$ Reemplazando en (1)

Así se obtiene un valor de $x = 1 + 7.(7 + 8h)$ que se sustituye en la 3er. ecuación.

(Verifique la solución es $x = 498$ (mod.) 504

Estos ejemplos tienen la solución garantizada por

♦ **Teorema Chino del resto** 4.7.38

Sean $m_1, m_2, \cdots, m_n \in \mathbb{N} - \{0\}$, con los $(m_j, m_k) = 1$ para $j \neq k$

entonces el sistema $\begin{cases} x & \equiv_{m_1} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x & \equiv_{m_n} & b_n \end{cases}$ tiene solución única; además módulo el producto

$m_1.m_2.\cdots.m_n$ cualquier par de soluciones es congruente módulo *m*.

EJERCICIO 4.7.39

Resolver $\begin{cases} x & \equiv_2 & 1 \\ x & \equiv_3 & 2 \\ x & \equiv_5 & 3 \\ x & \equiv_7 & 5 \end{cases}$

- ***El pequeño poderoso***

En el área de la teoría de números, el más grande matemático del siglo XVII es Pierre de Fermat (1601-1665). Fue un gran algebrista que usó los trabajos de Vieta para hacer un tratamiento analítico de las ecuaciones y bajo ese aspecto trató viejos problemas de la teoría de números estudiando profundamente las obras de Diofantos, Euclides y Apolonio. Su interés por la teoría de números no tenía límites, se interesó por todos los temas de esa rama matemática.
También en el siglo XVII se dieron importantes avances en otras áreas de la Matemática.
Muchos de los resultados de Fermat han llegado hasta nuestra época por sus anotaciones hechas en los márgenes de una traducción de la *Aritmética* de Diofantos.
Fermat planteó varios problemas (eran desafíos que se hacían entre los matemáticos de la época)
Entre ellos están:

1. *Todo número primo de la forma 4.n + 1 se pude escribir como suma de dos cuadrados.*
2. *Todo número natural se expresa como suma de cuatro cuadrados*
3. *La ecuación* $x^2 - d\,y^2 = 1$ *tiene infinitas soluciones.*

Fermat resolvió los problemas 1 y 3; dos siglos después Lagrange solucionó el 2.

El problema más famoso planteado por Fermat (puede ser que lo sea de toda la Matemática) es el ***Gran teorema de Fermat***:

La ecuación $x^n + y^n = z^n$ ***no posee solución para*** $x, y, z \in \mathbb{Z},$ ***si*** $n \geq 3$

Fermat dijo que tenía una "prueba maravillosa" pero no la dejó escrita. Escribió en la *Aritmética* "que el margen es muy pequeño para escribirla". Hay quienes dudan que Fermat tuviera la prueba o que si tenía una, fuera realmente una demostración correcta. Sí ha dado una demostración para el caso de $n = 4$.

La demostración para $n = 3$ la descubrió Euler un siglo más tarde.

Este problema general despertó mucha inquietud y hubieron muchos intentos de demostración y solución lo que originó grandes avances y aparición de nuevas técnicas para poder resolverlo. Se dieron a lo lardo de tres siglos varias "demostraciones" defectuosas. La demostración la dio el matemático inglés Andrew Wiles, durante un congreso en Cambridge de junio de 1993. La demostración de Wiles usa todo el potencial matemático que se tenía a disposición en el siglo XX, está considerada una obra maestra de la matemática contemporánea y es por eso que se dice que la demostración dada por Wiles no es la que tenía Fermat, hay quienes siguen tratando de ver si la logran encontrar. (recomendación: lea el libro de Simon Singh *El último teorema de Fermat,* no es la prueba sino sobre la historia de la misma, Fermat y Wiles).

El teorema que está ligado a los temas de este capítulo de estudio es el que se conoce como el "*pequeño teorema de Fermat*":

♦ TEOREMA 4.7.40

a) Si p es primo, entonces $(\forall a)(a \in \mathbb{Z}$ y $(a, p) = 1$ entonces $a^{p-1} \equiv_p 1)$

b) Si p es primo, entonces $(\forall a)(a \in \mathbb{Z}$ entonces $a^p \equiv_p a)$

Demostración:

La demostración del teorema es muy sencilla pero quedan como tema de investigación para aquellos muy interesados en el tema.

EJERCICIO 4.7.41

a) Verificar el teorema de Fermat para $a = 4$, $p = 11$; $a = 35$, $p = 17$.

b) Hallar el resto de la división de 4^{3451} por 7.

c) Calcular 5^{3457} módulo 11.

d) Hallar el menor *n* para el cual $12^n \equiv_{23} 1$

e) Probar que $x^5 - x$ es divisible por 3 y por 5 para todo entero x.

8. Conjuntos Coordinables

Lo que expondremos es una serie de conceptos que generalizan la acción de contar los elementos de un conjunto.

Sean A y B conjuntos, A es **coordinable** con B si y sólo si existe una función biyectiva entre ellos.

Esto es que exista $f : A \to B$ y f biyectiva.

Se escribe $A \equiv_c B$

♦ PROPIEDAD 4.8.1**:**

a) $A \equiv_c A$ para todo conjunto A

b) Si $A \equiv_c B$ entonces $B \equiv_c A$ para todo par de conjuntos A y B.

c) Si $A \equiv_c B \wedge B \equiv_c C$ entonces $A \equiv_c C$ para toda terna de conjuntos A, B y C.

Demostración:

a) Para todo conjunto, existe la función $Id_A : A \to A$ que es biyectiva.

b) Si $A \equiv_c B$ entonces existe una función biyectiva $f : A \to B$ entonces existe la función inversa $f^{-1} : B \to A$ que también es biyectiva, por lo tanto $B \equiv_c A$

c) Si $A \equiv_c B$ y $B \equiv_c C$ existe una función biyectiva $f : A \to B$ y existe una función biyectiva $g : B \to C$ entonces la función $g \circ f : A \to C$ también es biyectiva, por lo tanto $A \equiv_c C$

♦

$\equiv_C$ es una relación de equivalencia definida sobre un conjunto de partes conveniente.

Por lo tanto, todos los conjuntos coordinables entre sí están en una misma clase de equivalencia.

La clase de equivalencia correspondiente a esta relación $\equiv_C$ a la cual A pertenece se llama **cardinal de** A.

La **cardinalidad de** A **es menor o igual que la de** B y se anota $A \leq_c B$ si y sólo si existe una función inyectiva $f : A \rightarrow B$

♦ PROPIEDAD 4.8.2**:**
$A \leq_c B$ entonces existe $C \subseteq B$ tal que $A \equiv_c C$

Demostración**:**
Si $A \leq_c B$ existe $f : A \rightarrow B$ inyectiva. Puede definirse $f^* : A \rightarrow \operatorname{Im}(f)$, siendo f^* una restricción de f, ya que $\operatorname{Im}(f) \subseteq B$ por la siguiente ley $f^*(x) = f(x), \quad (\forall x)(x \in A)$
Además f^* es inyectiva, por ser restricción de una función inyectiva y es suryectiva ya que la imagen de f^* coincide con el codominio de f^* , es decir $\operatorname{Im}(f^*) = \operatorname{Im}(f)$.
Por lo tanto f^* es biyectiva.
Tomando el conjunto $C = \operatorname{Im}(f)$, se construye entonces la función $g = Id_C \circ f^* : A \rightarrow C$, como f^* y Id_c son biyectivas, la composición también lo es, por lo tanto g es una biyección de A en ***C*** y se tiene así $A \equiv_c C$.

♦

También vale su recíproca:

♦ PROPIEDAD **4.8.3**:
Si existe $C \subseteq B$ tal que $A \equiv_c C$ entonces $A \leq_c B$.

Demostración:

Si $A \equiv_c C$ existe $f : A \to C$ biyectiva, entonces puede definirse $Inc_c : C \to B$, siendo

$Inc_c(x) = x \quad (\forall x)(x \in C)$ que claramente es una restricción de Id_B por lo tanto es inyectiva.

Se construye entonces la función $h = Inc_c \circ f : A \to B$, que por ser composición de inyectivas es inyectiva. Por lo tanto h es una inyección de A en B y se tiene que $A \leq_c B$.

♦

Un conjunto A es ***finito*** si y sólo si:

* $A = \varnothing$ o

* $A \equiv_c [0, n] \cap \mathbb{N}$, es decir A es coordinable con el intervalo natural [0, *n*].

Si un conjunto A es finito porque no tiene elementos o porque tiene $n + 1$ elementos, por ser coordinable con el intervalo natural [0, *n*].

Un conjunto A es ***numerable*** si y solo si:

*A es finito o

* $A \equiv_c \mathbb{N}$, A es coordinable con el conjunto de los números naturales

Si un conjunto es *numerable*, puede ser **finito numerable**, que es el caso de los conjuntos finitos, o **infinito numerable**, que es el caso de los conjuntos coordinables con los naturales.

Intuitivamente decir que un conjunto es numerable es equivalente a decir que pueden numerarse sus elementos.

EJEMPLO:

1) El conjunto de los números enteros es infinito numerable.

Veamos que $\mathbb{N} \equiv_c Z$

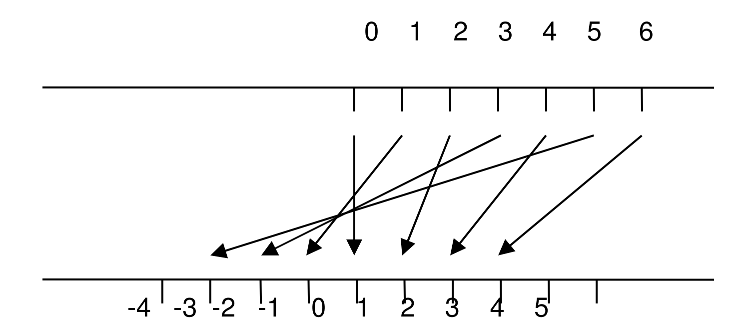
Construimos una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por:

¡Esto es sorprendente!
Un subconjunto
coordinable con el total…..



$$f(n) = \begin{cases} k & si \quad n = 2k \\ -(k+1) & si \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

Gráficamente:



Esta función *f* es fácil probar que es biyectiva, por lo tanto $\mathbb{N} \equiv_c \mathbb{Z}$.

2) El conjunto de los números pares positivos es infinito numerable.

Veamos que $\mathbb{N} \equiv_c P$, siendo $P = \{x \in N : x = 2k \wedge k \in N\}$

Construimos una función $f : \mathbb{N} \to P$ definida por: $f(n) = 2n$

Como *f* es biyectiva (probarlo!! Es muy sencillo) , resulta $\mathbb{N} \equiv_c P$

EJERCICIO 4.8.4:

Demostrar que $\mathbb{N} \equiv_c I$, siendo $I = \{x \in \mathbb{N} : x = 2k + 1 \wedge k \in N\}$

Notar que por propiedades de la coordinabilidad como $\mathbb{N} \equiv_c P$ y $\mathbb{N} \equiv_c Z$, entonces $\mathbb{Z} \equiv_c \mathbb{N}$, por lo tanto $\mathbb{Z} \equiv_c P$.

EJEMPLO 4.8.5:

El conjunto $\mathbb{N} - \{0,1,2,3\}$ es infinito numerable

Construimos una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} - \{0,1,2,3\}$ definida por: $f(n) = n + 4$

f es biyectiva ya que si $n + 4 = m + 4$ entonces $n = m$.

Además si $y \in \mathbb{N} - \{0,1,2,3\}$ entonces existe un natural n tal que $n + 4 = y$, siendo $n = y - 4$, que por ser $y \geq 3$, resulta que $n \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}$ que es el dominio de *f* .

Si al conjunto de los naturales le saco un subconjunto finito, sigue siendo coordinable con los naturales.

♦ PROPIEDAD 4.8.6:

Sea A un conjunto finito. Entonces para todo X, si $X \subseteq A$ entonces X es finito

Demostración:

Como A es finito $A \equiv_c [0,n]$ entonces podemos asignar a cada elemento de A un número natural del intervalo [0, n] y es biyectiva.

Por lo tanto podemos considerar que cada elemento de A esta subindicado por el número natural que le corresponde por la asignación $A = \{a_0, a_1, a_2, ..., a_n\}$.

Si $X = \varnothing$ es trivial.

Si $X \neq \varnothing$ como $X \subseteq A$ se tiene que $X = \{a_j, a_i, a_m, ..., a_w\}$ donde los subíndices de los elementos de X son números naturales de [0, n].

Por el Principio de Buena Ordenación de los números naturales el conjunto de subíndices de X tiene un mínimo, sea a_j ese elemento y podemos asignarle el 0.

Tomamos el conjunto $X - \{a_j\}$, este conjunto también tiene un elemento de mínimo subíndice por ejemplo a_t y le asignamos el 1. Luego considerando $X - \{a_j, a_t\}$ este conjunto también tiene un elemento de mínimo subíndice y le asignamos el 2.

Podemos continuar el proceso, ya que a lo sumo en X hay $n+1$ elementos (pues $X \subseteq A$). Por lo cual termina!

Definiendo entonces así una función biyectiva $g : X \to [0,k]$ donde $k+1$ es el número de elementos de X, tenemos que $X \equiv_c [0,k]$ y por lo tanto finito. ♦

♦ PROPIEDAD 4.8.7:

La unión de conjuntos finitos, es un conjunto finito.

Demostración:

Sea A finito tal que $A \equiv_c [0,n]$ y sea $f : A \to [0,n]$ biyectiva.

Sea B finito tal que $B \equiv_c [0,m]$ y sea $g : B \to [0,m]$ biyectiva.

Pueden darse 2 casos: a) $A \cap B \neq \varnothing$ o b) $A \cap B = \varnothing$

a) $A \cap B \neq \varnothing$

Llamemos *C* al conjunto $A \cap B = C$

Como $C \subseteq A$ y $A - B \subseteq A$ y $B - A \subseteq B$ sabiendo que A y B son finitos, resultan los conjuntos *C*, A - B y B - A finitos, por la propiedad anterior.

Podemos definir entonces funciones $h : A - B \to [0,t]$, $u : B - A \to [0,l]$ y $w : C \to [0, p]$, biyectivas. Donde $t + p = n$ y $l + p = m.$

Tenemos ahora 3 conjuntos disjuntos finitos, tales que $(A - B) \cup (B - A) \cup C = A \cup B$, definimos entonces la función biyectiva $d : A \cup B \to [0, t + l + p]$:

$$d(x) = \begin{cases} h(x) & si \quad x \in A - B \\ u(x) + t & si \quad x \in B - A \\ w(x) + t + l & si \quad x \in C \end{cases}$$

Por lo tanto $A \cup B$ es finito

b) $A \cap B = \varnothing$

Definimos la función $h : A \cup B \to [0, n + m]$,

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in A \\ g(x) + n & si \quad x \in B \end{cases}$$

Que es biyectiva.

Por lo tanto en ambos posibles casos se construye una biyección de $A \cup B$ sobre un intervalo natural, luego resulta $A \cup B$ finito.

♦

Analicemos la coordinabilidad de otro conjunto numérico como $\mathbb{Q}$, se hará por partes.

- Consideremos el conjunto $\mathbb{Q}^{+} = \left\{ \frac{n}{m} : m \text{ y } n \text{ en } \mathbb{N} \wedge m \neq 0 \right\}$

Definimos una función $t : \mathbb{Q}^{+} \to \mathbb{N} \times (\mathbb{N} - \{0\})$ tal que $t(\frac{n}{m}) = (n,m)$.

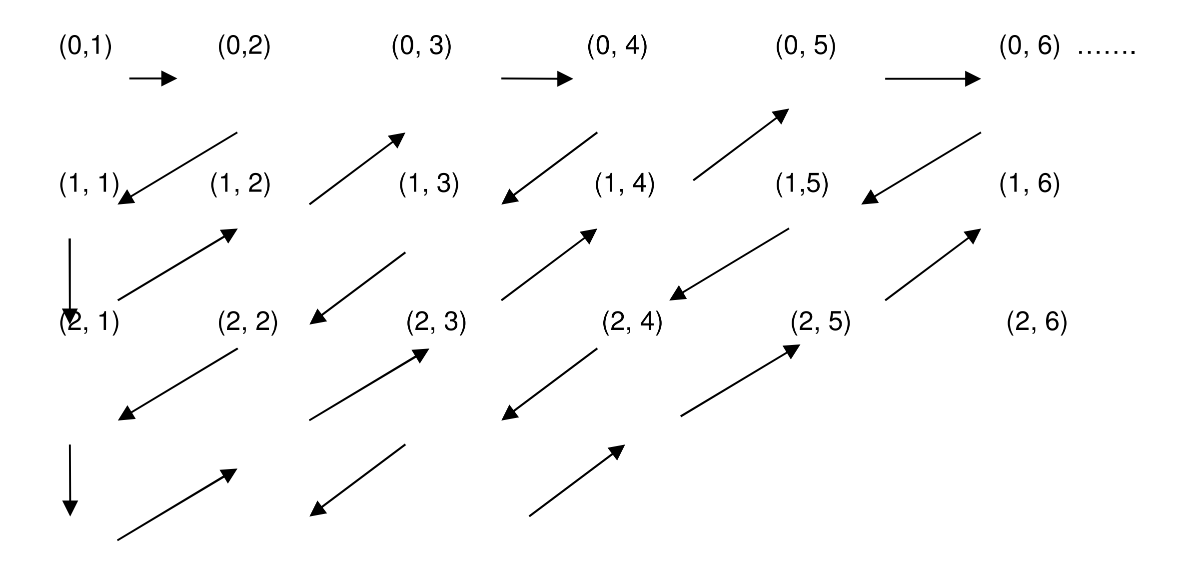
Veamos que *t* es biyectiva:

Si $(m, n) = (r, h)$ entonces $m = r$ y $n = h$, por lo tanto $\frac{n}{m} = \frac{r}{h}$, por lo tanto *t* es inyectiva.

Sea $(n,m) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N} - \{0\})$ entonces existe $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}^{+}$ y resulta que $t(\frac{n}{m}) = (n,m)$ por lo tanto

t es suryectiva.

- Además tenemos que $\mathbb{N} \equiv_c \mathbb{N} \times (\mathbb{N} - \{0\})$ ya que existe una función biyectiva generada por el siguiente diagrama:



La idea de este diagrama de flechas es recorrer los puntos que sus componentes tengan igual suma (por ejemplo $k = 2$), cuando en esa " *diagonal*" ya recorrimos todos los de esa suma, se dirige a el punto que tiene por suma un número más (por ejemplo $k + 1 = 3$) que tiene *abajo* si esta sobre la primera columna, o que tiene a la *derecha* si esta sobre la primera fila.

Cada uno de los puntos que se van recorriendo con ese patrón se pueden ir numerando ….. esto es " biyectarlos" en $\mathbb{N}$.

Por lo tanto cómo $\mathbb{Q}^+ \equiv_c \mathbb{N} \times (\mathbb{N} - \{0\})$ y $\mathbb{N} \equiv_c \mathbb{N} \times (\mathbb{N} - \{0\})$ por transitividad resulta que

$$\mathbb{N} \equiv_c \mathbb{Q}^+$$

Tenemos entonces que $\mathbb{Q}^+$ es numerable.

- Analicemos el conjunto $\mathbb{Q}^- = \left\{ \dfrac{n}{m} : m \in \mathbb{N} \wedge m \neq 0 \wedge n \in \mathbb{Z} \wedge n < 0 \right\}$.

Podemos identificar cada elemento de $\mathbb{Q}^-$ con $(\mathbb{Z}^- - \{0\}) \times (\mathbb{N} - \{0\})$ definiendo la función

t: $\mathbb{Q}^- \to (\mathbb{Z}^- - \{0\}) \times (\mathbb{N} - \{0\})$ dada por

$t\left(\dfrac{p}{q}\right) = (p, q)$. Claramente es una biyección.

Además si definimos $h : \mathbb{N} \times (\mathbb{N} - \{0\}) \to (\mathbb{Z}^- - \{0\}) \times (\mathbb{N} - \{0\})$ siendo

$$h((n, m)) = (-(n+1), m) \quad .$$

Esta función es biyectiva (muy fácil de probar!!!), por lo tanto se tiene:

$\mathbb{Q}^- \equiv_c (\mathbb{Z}^- - \{0\}) \times (\mathbb{N} - \{0\})$ y $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} - \{0\}) \equiv_c (\mathbb{Z}^- - \{0\}) \times (\mathbb{N} - \{0\})$ y por lo probado con el diagrama $\mathbb{N} \equiv_c \mathbb{N} \times (\mathbb{N} - \{0\})$

Por las propiedades de $\equiv_c$, entonces $\mathbb{N} \equiv_c \mathbb{Q}^-$.

Tenemos entonces que $\mathbb{Q}^-$ es numerable.

♦ PROPIEDAD 4.8.8:
La unión numerable de conjuntos numerables, es un conjunto numerable.

Demostración**:**

1) Si son todos los conjuntos finitos la demostración se puede hacer por inducción usando el resultado de la PROPIEDAD 4.8.7.

2) Si un conjunto A es finito y otro B infinito numerable entonces $A \cup B$ es infinito numerable:

Como A es finito existe $f : A \to [0,\ n]$ biyectiva. Sabiendo que B infinito numerable existe $g : B \to \mathbb{N}$ biyectiva.

Es claro que $A \cup B = A \cup (B - A)$, por lo tanto es posible definir una biyección como sigue:

$$h : A \cup (B - A) \to \mathbb{N}$$

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\in A \\ g(x)+n+1 & \text{si } x\in B-A \end{cases}$$

Por lo tanto resulto que $A\cup B$ es infinito numerable

3) Si dentro de los conjuntos numerables que tenemos que realizar la unión hay alguno finito y al menos dos infinitos numerables por 2) podemos considerar todos infinitos numerables.
   Si hay al menos dos numerables que no sean finitos haremos lo que sigue:

Sean $A_0, A_{1,}, A_2, ...A_n$ conjuntos infinito numerables.

Para cada A_i existe una función biyectiva $f_i : \mathbb{N} \to A_i$, por lo tanto podemos identificar cada elemento con un número natural, escribimos entonces los elementos de cada conjunto:

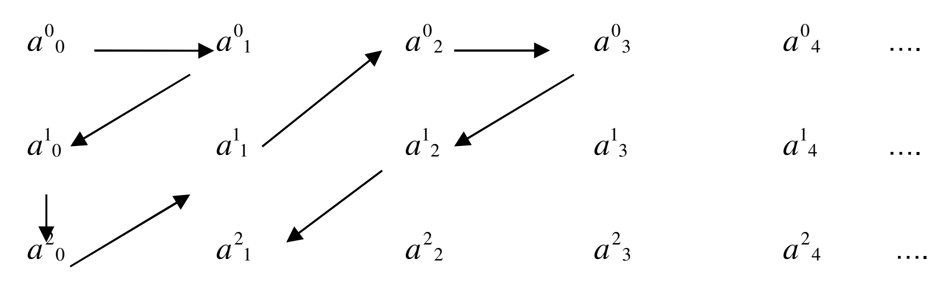
$A_0 = \{a^0{}_{0,}, a^0{}_1, ..., a^0{}_h, ...\}$

$A_1 = \{a^1{}_{0,}, a^1{}_1, ..., a^1{}_m, ...\}$

$A_2 = \{a^2{}_{0,}, a^2{}_1, ..., a^2{}_w, ...\}$

…..

Construimos una biyección con $\mathbb{N}$ según el siguiente diagrama, donde el recorrido del diagrama está dado por la suma del subíndice y el superíndice. Y vamos *numerando* los elementos.



Esta asignación define una función que es biyectiva, por lo tanto $A = \bigcup_{i\in N} A_i$ es numerable.

♦

Como $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$ y la unión de conjuntos numerables es numerable, tenemos que $\mathbb{Q}$ ***es** numerable.*



¡Lo aceptaremos sin demostración !

Pero no todos los conjuntos numéricos son numerables.

Los números reales no son numerables

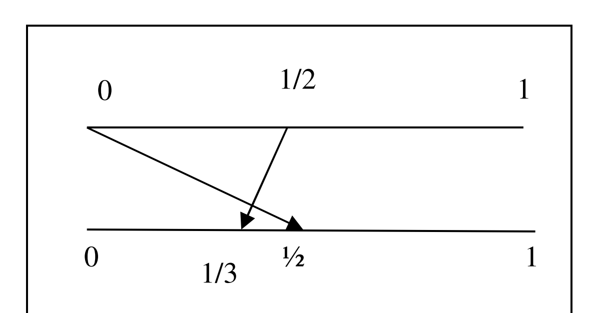
Veamos qué cosas curiosas suceden en $\mathbb{R}$, ya vimos varias curiosidades en la coordinabilidad de los otros conjuntos numéricos.

EJEMPLO 4.8.9:

1) Probaremos que $[0,1) \equiv_c (0,1)$

Definimos una función biyectiva $g:[0,1) \rightarrow (0,1)$ definida por:

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & si \quad x=0 \\ \frac{1}{n+1} & si \quad x=\frac{1}{n} \wedge n>1 \\ x & si \quad x \neq \frac{1}{n} \wedge x \neq 0 \end{cases}$$



Por lo tanto $[0,1) \equiv_c (0,1)$

2) Veamos que también $[0,1] \equiv_c (0,1)$

Definimos una función biyectiva $g:[0,1] \rightarrow (0,1)$ definida por:

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & si \quad x=0 \\ \frac{1}{n+2} & si \quad x=\frac{1}{n} \wedge n \geq 1 \\ x & si \quad x \neq \frac{1}{n} \wedge x \neq 0 \end{cases}$$

Haga un esquema….

Por lo tanto $[0,1] \equiv_c (0,1)$

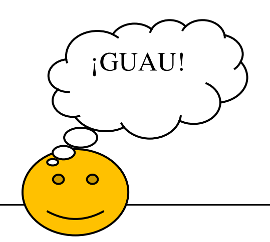
3) Tomemos ahora un intervalo $[a,b]$ y veamos que $[a,b] \equiv_c [0,1]$

Construimos la recta que pasa por los puntos $A(a,0)$ y $B(b,1)$:

$\dfrac{y-0}{1-0} = \dfrac{x-a}{b-a}$ entonces tenemos que $y = \dfrac{x-a}{b-a}$, lo que nos permite definir una función biyectiva $g:[a,b] \to [0,1]$, dada por $g(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$

EJERCICIO 4.8.10:

Probar que $[a,b] \equiv_c [c,d]$



De este modo, tenemos que *cualquiera sea el par de intervalos reales, esos intervalos son coordinables entre sí.* Sean cerrados o abiertos o semiabiertos. *Pero todavía falta…*

EJEMPLO 4.8.11:

Probemos que $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \equiv_c \mathbb{R}$.

La función $g:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = tg(x)$ es una biyección y por lo tanto determina que $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \equiv_c \mathbb{R}$

De este modo hemos probado que, *cualquiera de los intervalos reales es coordinable con los números reales.*

Los números reales tienen un cardinal mayor que los naturales.

♦ TEOREMA de CANTOR 4.8.12:

Para cualquier conjunto A, $A \leq_c P(A)$. Y no vale la igualdad.

Demostración:

Recordemos que $\mathcal{P}\ (A) = \{X : X \subseteq A\}$

Hay que ver que existe una inyección de A en $\mathcal{P}(A)$ y que no puede existir una función suryectiva de $\mathcal{P}(A)$ en A.

1) Si $A = \varnothing$ el conjunto no tiene elementos, pero $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing\}$ tiene un elemento por lo cual no son coordinables. Y vale que $0 \leq 1$, luego $A \leq_c \mathcal{P}(A)$.

2) Suponemos $A \neq \varnothing$.

Sea $g : A \to \mathcal{P}(A)$ definida por $g(a) = \{a\}$ para cada $a \in A$.

Esta función es inyectiva, por lo tanto $A \leq_c \mathcal{P}(A)$

3) Supongamos que existe una función $h : A \to \mathcal{P}(A)$ biyectiva.

Tomemos el conjunto $B = \{x \in A : x \notin h(x)\}$, por definición $B \subseteq A$, entonces $B \in \mathcal{P}(A)$ entonces por ser *h* suryectiva $(\exists b)(b \in A \wedge h(b) = B)$

Entonces, observemos que ocurre:

Como $b \in B$ entonces $b \notin h(b)$ por definición de B pero $h(b) = B$, luego esto es absurdo!!!

Si $b \notin B$ entonces por definición de B, $b \in h(b)$ pero $h(b) = B$, luego también es absurdo!!!

Por lo tanto *h* no puede ser suryectiva. Por lo cual no existe una biyección de A en *P*(A).

♦

Hay infinitos números cardinales.

En general $A \leq_c \mathcal{P}(A) \leq_c \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$

El cardinal de $\mathcal{P}(A)$ es más grande que el de A. Y asi se obtiene una "cadena de cardinales"….

Al cardinal de $\mathbb{N}$ se lo llama aleph 0, se escribe χ_0.

Al cardinal de $\mathbb{R}$ se lo anota *c* y se lo llama **continuo**. Hay autores que lo llaman aleph 1, se escribe χ_1 . Recordemos que una conjetura es un enunciado que aún no ha sido probado.

La **hipótesis del continuo** dice que: no hay ningún otro cardinal entre χ_0 y *c*. Es una conjetura.

Hay teorías dentro de la Teoría de Conjuntos que se desarrollan con la hipótesis del continuo y otras no. Es un motivo de estudio permanente y abierto.

CAPÍTULO 5
Introducción a la Geometría Analítica en $\mathbb{R}^2$

La Geometría Analítica es un puente entre el Algebra y la Geometría que hace posible resolver algebraicamente (o analíticamente) problemas geométricos. También nos permite resolver geométricamente problemas algebraicos, pero el primer caso es mucho más importante, especialmente cuando se asignan números a conceptos esencialmente geométricos. Por ejemplo, pensemos en la longitud de un segmento de recta, o en el ángulo entre dos rectas. Aún cuando se conozcan exactamente las rectas y los puntos en cuestión, la cantidad que representa la longitud de un segmento, o el ángulo entre dos rectas, en la realidad sólo se puede medir en forma aproximada. Los métodos algebraicos nos permiten calcular de manera exacta esa cantidad.

En un **Anexo** de este capítulo se presentan resultados de **Trigonometría** que le pueden ser de utilidad si es que está olvidado de esos conceptos. Conceptos que se aplican en este capítulo, también para los temas de vectores y complejos entre otros, que se abordarán en capítulos posteriores.

En este Capítulo daremos las definiciones básicas de la Geometría Analítica. En los siguientes abordaremos otros temas relacionados, que hacen uso de lo presentado en éste.

La relación entre el Algebra y la Geometría se forma asignando números a puntos. Por ejemplo, veamos esta asignación de números a los puntos de una recta.

1. Coordenadas en la recta

Para comenzar seleccionamos un par de puntos, ***O*** y ***U*** de una recta, como se muestra en la figura.

O U Q

0 1 x

Al punto ***O***, que llamaremos el **origen**, se le asigna **el número cero** y al punto ***U*** se le asigna **el número uno**.

Si definimos a la longitud de $\overline{OU}$ como **la unidad de longitud** asignamos números a todos los demás puntos de la recta como sigue: a *Q,* en el lado del origen donde se encuentra *U*, se le asigna el número positivo *x*, si y sólo si su distancia al origen es *x*. A un punto *T* del lado contrario del origen se le asigna el número negativo -*x* si y sólo si su distancia al origen es *x* unidades.

Resulta así que **a cada punto de la recta se le asigna un número real y a cada número real le corresponde un punto en la recta.**

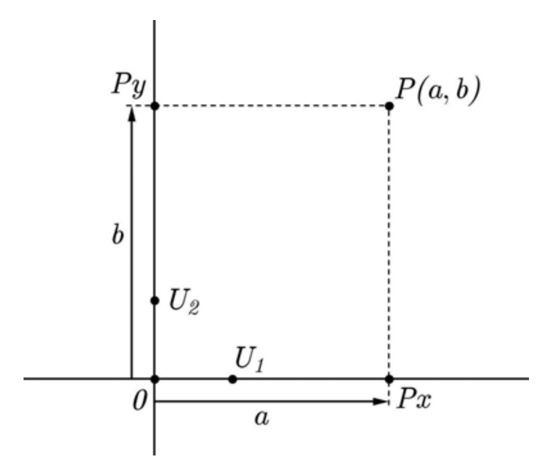
De este modo se establece una **escala** en la recta, así a esta recta la llamaremos en adelante un **eje coordenado.** Al número a que representa un punto P particular se le llama **coordenada** de ese punto, y al punto P se le llama la **gráfica** del número a.

EJERCICIO 5.1.1
Representar en un eje coordenado los puntos cuyas coordenadas son: – 1, 5, 1/3 , -5/8 , 0 , 3/2, 4

2. Coordenadas en el plano

Del mismo modo que se representan los puntos en una recta (espacio unidimensional) mediante números, los puntos en un plano (que es un espacio bidimensional) se pueden representar por pares de números.

Para representar **puntos en un plano** mediante **pares de números**, elegimos dos rectas que se intersecten y establecemos una escala en cada una de ellas, como vemos en la figura.



El punto de intersección es el origen. Estas dos rectas se llaman **ejes**, y se diferencian mediante símbolos, que normalmente son las letras x e y. Para un punto dado P en el plano, corresponde un punto Px en el eje x. Es el punto de intersección del eje x con la recta que contiene P y es paralela al eje y. (Si P está en el eje y, esta recta coincide con el eje y.)

Igualmente, existe un punto Py en el eje y, que es el punto de intersección de ese eje y la recta que pasa por P que es paralela al (o que es el) eje x. Las coordenadas de esos dos puntos en los ejes son las **coordenadas** de P.

Si a es la coordenada de Px y b es la de Py, el punto ***P* queda representado por el par** (a,b).

a es la **abscisa** de P y ***b*** es la **ordenada** de P.

Se llama **plano Cartesiano** (como sinónimo **plano coordenado**) al plano en el que se ha introducido un sistema de referencia que asigna a cada punto sus coordenadas.

En un plano coordenado se acostumbra utilizar las siguientes convenciones:

1. Los ejes son perpendiculares entre sí.
2. El eje x es una recta horizontal con sus coordenadas positivas hacia la derecha del origen, y el eje y es una recta vertical con sus coordenadas positivas arriba del origen.
3. Se usa la misma escala en ambos ejes.

Naturalmente, no es indispensable apegarse a estas convenciones cuando haya otras que sean más cómodas. Con frecuencia se viola la tercera, cuando se trabaja con figuras cuyo trazo podría ser muy difícil si insistiéramos en usar la misma escala en ambos ejes. En esos casos podremos usar libremente escalas distintas, sin olvidar que con ello distorsionamos la figura.

OBSERVACION 5.2.1 Nótese que todos los puntos en el eje x tienen ordenada cero, mientras que los que están en el eje y tienen abscisa cero. El origen tiene sus dos coordenadas iguales a cero, porque está en ambos ejes.

Los ejes dividen al plano en cuatro regiones, que se llaman **cuadrantes,** los cuales conviene identificar con los números que se muestran en la figura.

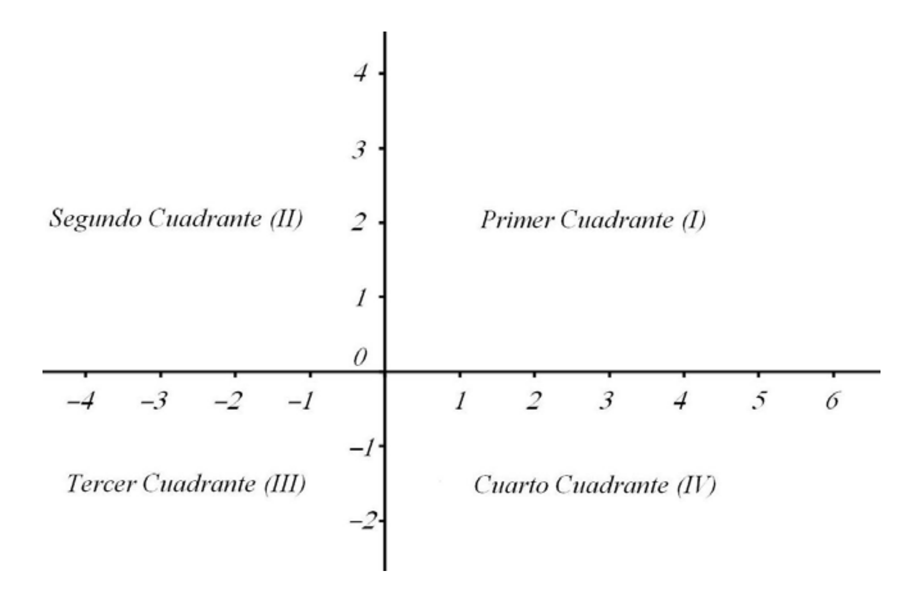
En el primer cuadrante abscisa y ordenada positivas. ($x > 0$; $y > 0$)

En el segundo cuadrante abscisa negativa y ordenada positiva. ($x < 0$; $y > 0$)

En el tercer cuadrante abscisa y ordenada negativas. ($x < 0$; $y < 0$)

En el cuarto cuadrante abscisa positiva y ordenada negativa. ($x > 0$; $y < 0$)

Los puntos que están en esos ejes no están en ningún cuadrante.



A las coordenadas de un punto, determinadas de esta manera, con frecuencia se les llama coordenadas cartesianas, en honor del matemático y filósofo francés René Descartes.

En el apéndice de un libro publicado en 1637, Descartes presentó la primera descripción de la Geometría Analítica. A partir de allí vinieron grandes avances en la Matemática que condujeron entre otras cosas, a la invención del cálculo infinitesimal.

¡Sea curioso! y busque en la web sobre Descartes (*Cartesius*)

EJERCICIO 5.2.2

a) Representar en un plano coordenado los siguientes puntos:

$P(1, 2)$; $Q(-2, 3)$; $R(3, \frac{1}{2})$; $T(3, -3)$; $S(0, -4)$; $V(-2, 0)$; $W(-\frac{1}{2}, -4)$

b) En un plano coordenado, representar los puntos de abscisa negativa y ordenada > 3.

c) En un plano coordenado, representar los puntos de abscisa positiva y ordenada < – 1.

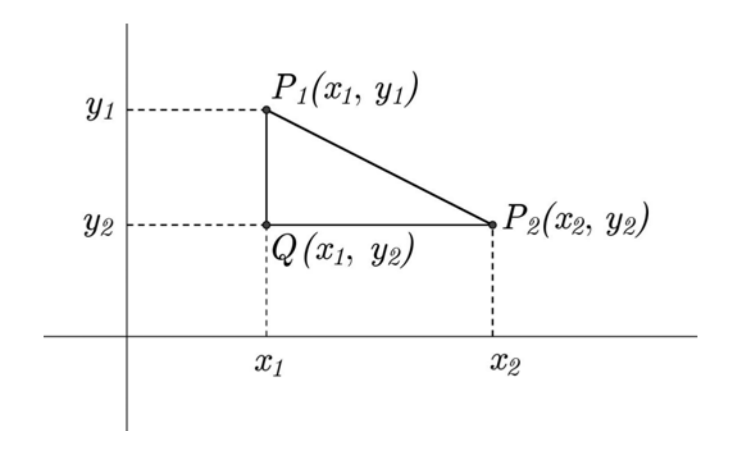
d) En un plano coordenado, representar los puntos de abscisa ≥ – 2 y ordenada < – 1.

e) En un plano coordenado, representar los puntos de abscisa ≥ 1 y ordenada negativa.

3. Fórmula de la distancia entre dos puntos

Dirijamos ahora nuestra atención al problema de determinar la distancia entre dos puntos en el plano.

Supongamos que nos interesa calcular la distancia entre los puntos $P_1\,(x_1, y_1)$ y $P_2\,(x_2, y_2)$ del plano. Pensemos sobre la figura.



Se traza una recta vertical que pase por P_1 y una horizontal que pase por P_2, que se intersectan en un punto $Q(x_1, y_2)$. Suponiendo que P_1 y P_2 no se encuentren en la misma recta horizontal o vertical,

$P_1Q\ P_2$ forman un triángulo rectángulo que tiene su ángulo recto en Q. Podemos emplear ahora el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de P_1 a P_2.

De acuerdo con la interpretación de valor absoluto:

$$d\left(Q,P_2\right)=\left|x_2-x_1\right| \qquad\qquad d\left(Q,P_1\right)=\left|y_2-y_1\right|$$

(Mantenemos en este caso los valores absolutos, porque deseamos que la fórmula obtenida sea válida para cualquier par de puntos P_1 y P_2 , no tan sólo para una situación como la que vemos en la figura)

Aplicando el teorema de Pitágoras,

$$d\left(P_1,P_2\right)^2=d\left(Q,P_1\right)^2+d\left(Q,P_2\right)^2$$

$$d\left(P_1,P_2\right)\ =\left|\sqrt{d\left(Q,P_1\right)^2+d\left(Q,P_2\right)^2}\right|$$

Recordatorio:

b, a, c — $a^2 = b^2 + c^2$

Teorema de Pitágoras

$$\boxed{d\left(P_1,P_2\right)\ =\left|\sqrt{\left|x_2-x_1\right|^2+\left|y_2-y_1\right|^2}\right|}$$

Para deducir esta fórmula supusimos que P_1 y P_2 no estaban en la misma recta horizontal o vertical; sin embargo, la fórmula es válida aún en esos casos.

Puede verificar usted estos casos.

¡Me conviene dibujar!

EJEMPLO 5.3.1

a) Calcular la distancia entre $P_1(-2, 4)$ y $P_2(3, 2)$

Solución: Aplicamos directamente la fórmula obtenida antes. Para el caso se designa por $x_1 = -2,\ x_2 = 3,\ y_1 = 4,\ y_2 = 2$. Por lo tanto se tiene:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(3-(-2))^2 + (2-4)^2} = \sqrt{(3+2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

b) Calcular la distancia entre $P_1(0, -3)$ y $P_2(-3, 5)$

Solución: Aplicamos directamente la fórmula obtenida antes. En este caso: $x_1 = 0,\ x_2 = -3,\ y_1 = -3,\ y_2 = 5$. Por lo tanto se tiene:

$$d(P1, P2) = \sqrt{(-3-0)^2 + (5-(-3))^2} = \sqrt{(-3)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{9+64} = \sqrt{73}$$

c) Calcular la distancia entre $P_1(0, 0)$ y $P_2(-3, 4)$

Solución: Aplicamos directamente la fórmula obtenida antes.
En este caso: $x_1 = 0,\ x_2 = -3,\ y_1 = 0,\ y_2 = 4$. Por lo tanto se tiene:

$$d(P1, P2) = \sqrt{(-3-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

EJEMPLO 5.3.2

Determinar si $A(1, 7)$, $B(0, 3)$ y $C(-2, -5)$ son **colineales** (es decir: están alineados, están en una recta).

Solución:

$$d(A,B) = \sqrt{(0-1)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$d(A,C) = \sqrt{(-2-1)^2 + (-5-7)^2} = \sqrt{9+144} = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}$$

$$d(B,C) = \sqrt{(0+2)^2 + (3+5)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

Aquí vemos que la longitud del lado mayor es exactamente igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados.

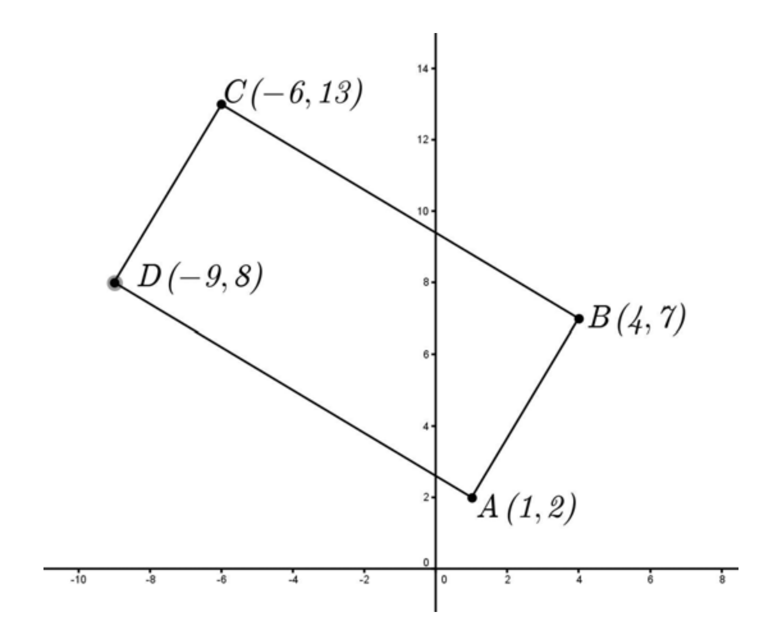
Pero en un triángulo, la longitud del lado mayor debe ser menor que la suma de las longitudes de los otros lados.

Luego, los tres puntos deben ser colineales. Ahora haga el dibujo y se convence!

EJEMPLO 5.3.3

Demostrar que $A(1, 2)$, $B(4, 7)$, $C(-6, 13)$ y $D(-9, 8)$ son vértices de un rectángulo.

Solución: Los puntos están graficados (para ayudarnos a interpretar) en la figura.



Calculemos las longitudes de los lados:

$$d(A,B)=\sqrt{(4-1)^2+(7-2)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$$

$$d(A,D)=\sqrt{(-9-1)^2+(8-2)^2}=\sqrt{100+36}=\sqrt{136}$$

$$d(B,C)=\sqrt{(-6-4)^2+(13-7)^2}=\sqrt{100+36}=\sqrt{136}$$

$$d(D,C)=\sqrt{(-9+6)^2+(8-13)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$$

Que las longitudes sean iguales dos a dos nos permite asegurar que es un paralelogramo. Veamos si es un rectángulo, si las diagonales de ese paralelogramo son iguales, entonces la figura es un rectángulo.

Por consiguiente, determinaremos las longitudes de las diagonales:

$$d(A,C)=\sqrt{(-6-1)^2+(13-2)^2}=\sqrt{49+121}=\sqrt{170}$$

$$d(B,D)=\sqrt{(-9-4)^2+(8-7)^2}=\sqrt{169+1}=\sqrt{170}$$

Como este paralelogramo tiene sus diagonales iguales, podemos concluir que es un rectángulo.

EJERCICIO 5.3.4

En cada caso *graficar* y calcular la distancia entre:

1. $P(-1,2)$ y $Q(-3,2)$
2. $P(2,2)$ y $Q(2,-1)$

3. $P(3, -4)$ y $Q(0, 2)$
4. $P(-3, 1)$ y $Q(1, 0)$
5. $P(3, 5)$ y $Q(2, 6)$

EJERCICIO 5.3.5

Determinar las coordenadas del punto medio M entre dos puntos $P(a, b)$ y $Q(c, d)$ cualesquiera, y representar gráficamente.

Notar que M debe cumplir que:

$d(P, M) = d(M, Q)$

y que $d(P, M) + d(M,Q) = d(P,Q)$.

(Pista: qué ocurre con el punto $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$?)

a) Hallar el punto medio del segmento $\overline{AB}$, si $A(2, 3)$ y $B(4, 2)$. Graficar.

b) Hallar el punto medio del segmento $\overline{DE}$, si $D(4, 0)$ y $E(0, -3)$. Graficar.

EJERCICIO 5.3.6

a) Hallar un punto del *eje* x que **equidiste** (esté a igual distancia) de los puntos (2, 3) y (4, 0). Dibujar.

b) Hallar un punto del *eje* y que equidiste de (0, 0) y de (2, – 4). Dibujar.

EJERCICIO 5.3.7

En cada caso representar y hallar el perímetro del triángulo de vértices:

a) $A(-2, 1)$; $B(2, 4)$; $C(0, 0)$

b) $A(1, -3)$; $B(-2, 1)$; $C(-2, 4)$

En los apartados siguientes se hará una aplicación de la Geometría Analítica: encontrar ecuaciones que representan distintos lugares geométricos del plano. Esto es, expresiones algebraicas que ligan las coordenadas de los puntos de esos lugares geométricos. Todo punto que cumple esas ecuaciones está en el lugar geométrico y ninguno más.

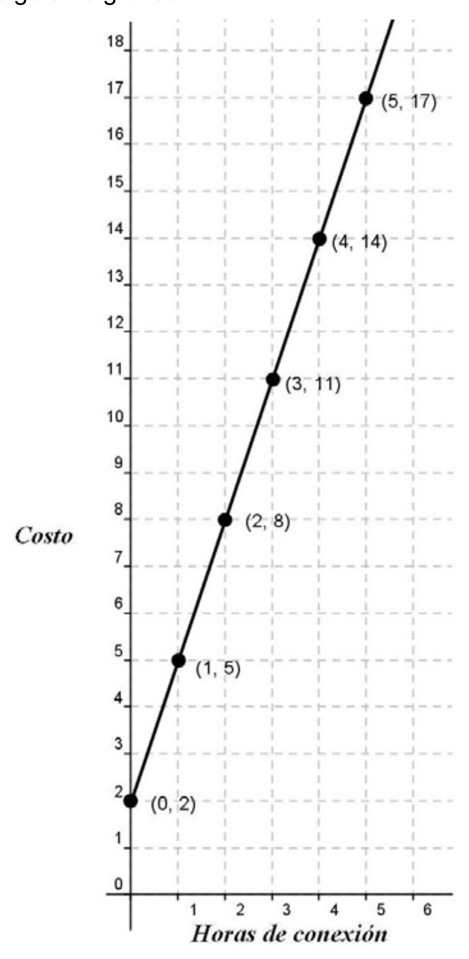
4. Ecuaciones de Rectas

Una empresa de computación ofrece un servicio de conexión telefónica que cuesta $2 mensuales más $3 por cada hora de tiempo de conexión efectiva.

En la tabla vemos la tarifa:

(x)	**Horas de conexión**					
x	0	1	2	3	4	5
y	2	5	8	11	14	17
(y)	**Costo**					

Con los datos podemos hacer el siguiente gráfico:



Si x cambia de 0 a 1, y cambia de 2 a 5; si x cambia de 1 a 2, y cambia de 5 a 8, y así siguiendo.

Para igual cambio de x (1), hay un igual cambio de y (3), el cociente entre el cambio en y sobre el cambio en x es constante e igual a 3.

$$\frac{cambio\ de\ y}{cambio\ de\ x} = \frac{5-2}{1-0} = \frac{8-5}{2-1} = \frac{11-8}{3-2} = \frac{14-11}{4-3} = \frac{17-14}{5-4} = 3$$

Al graficar los puntos de la tabla vemos que ellos representan una recta del plano.

Nuestro objetivo es determinar en forma general una relación algebraica de las coordenadas (x, y) de los puntos que están sobre cualquier recta.

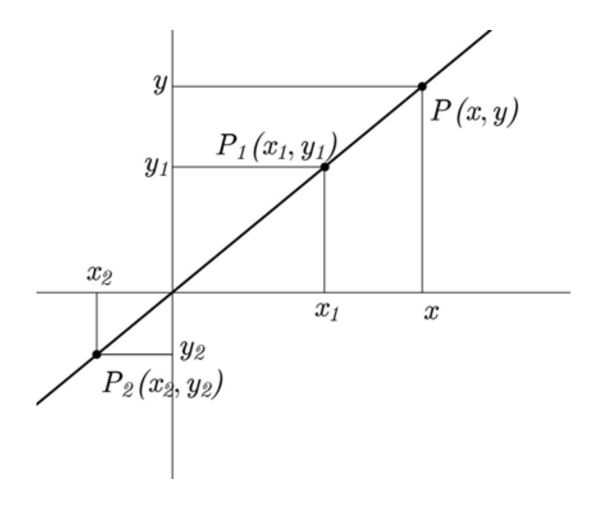
Consideremos dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ tales que satisfagan la relación:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \quad \text{con } x_1 \neq 0 \text{ y } \quad x_2 \neq 0$$

La razón entre la ordenada y la abscisa de esos dos puntos es constante y se designa por ***m***.

Todo punto $P(x,y)$ con la propiedad que $\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{m}$ estará sobre la misma recta que pasa por P_1 y por P_2 como se puede ver en la figura y justificar por semejanza de triángulos.

Además ***m*** es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje positivo de las abscisas.



El conjunto de puntos $P(x, y)$ tales que: (1) $y = m.x$

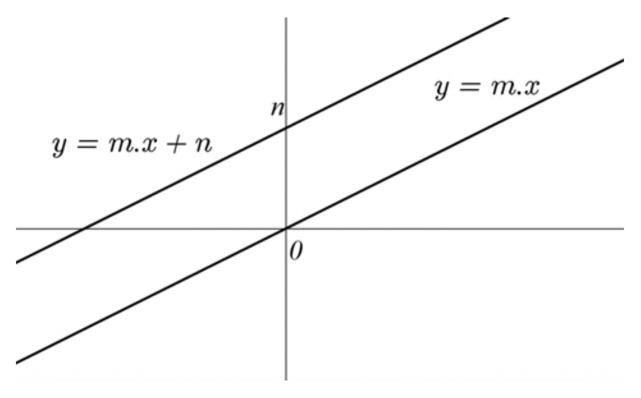
es una recta que pasa por el origen y llamaremos ***pendiente*** al valor ***m.***

Equivalentemente, la ecuación $y = m.x$ es de una recta que pasa por el origen y tiene pendiente m.

Para comprobarlo basta con reemplazar las coordenadas de $O(0, 0)$ en la ecuación y ver que la satisface.

Consideremos la ecuación: (2) $y = m.x + n$

Los valores de y se han modificado en una misma cantidad ***n*** respecto de la y dada por (1)



Luego se obtiene así una recta paralela a la representada por (1), además, es de fácil comprobación que el punto $R(0, n)$ satisface la ecuación (2).

Al valor ***n*** se lo llama ***ordenada al origen***.

Una ecuación como (1) o como (2), se llama **forma explícita** de la ecuación de la recta, quedan claras (explícitas) su pendiente y su ordenada al origen.

OBSERVACION 5.4.1: cualquiera sea el par de puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ distintos, que satisfaga la ecuación (2) (o la ecuación (1) en cuyo caso $n = 0$) se verifica:

$y_1 = m.x_1 + n$

$y_2 = m.x_2 + n$, con lo cual

$$n = y_1 - m.x_1 = y_2 - m.x_2$$

$$y_1 - y_2 = m\,(x_1 - x_2)$$

en el caso que $x_1 - x_2 \neq 0$, se tiene:

$$\boxed{\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = m}$$

Es decir que el cambio en y sobre el cambio en x (entre dos puntos distintos que están sobre la recta) es constante e igual a la pendiente m. Haga un dibujo de la situación para comprobar que m es la pendiente de la recta (la tangente del ángulo que la recta forma con el eje positivo de las abscisas).

EJEMPLO 5.4.2

Determinar la pendiente de la recta dada por la ecuación $y - 3x = 2$

Hallar un punto que está en la recta y otro que no está.

Solución: Llevamos a la forma explícita: $y = 3x+2$, por lo tanto $m = 3$.

Un punto $E(a, b)$ es de la recta si y sólo si sus coordenadas satisfacen la ecuación dada, y

por tanto un punto $N(p\ ,\ q)$ no estará en la recta si y sólo si sus coordenadas NO satisfacen la ecuación. Desde ya que hay infinitos puntos en la recta e infinitos puntos fuera de ella.

Luego debe cumplirse que $b = 3a+2$, si $a = 1$, resulta que $b = 5$. Por lo cual un E posible es $E(1,\ 5)$. Un N posible es $N(\ 1, 7)$. Represente la recta y convénzase señalando E y N….

Observemos que hemos obtenido dos formas de ecuaciones de recta, la (1) representa una recta que pasa por el origen y tiene pendiente m y la (2) que también representa una recta que tiene pendiente m y cuya ordenada al origen es n. Es claro que (1) es un caso particular de (2).

Por otra parte, por la observación anterior si la recta tiene pendiente m, dos puntos distintos que estén sobre ella deben tener distinta abscisa. Por lo tanto las **rectas que podemos representar con las ecuaciones del tipo (2) son rectas no paralelas al eje y.**

Para determinar ecuaciones de las rectas que sean paralelas al eje y hagamos la siguiente especulación: imaginemos varios puntos distintos que estén sobre **una recta paralela al eje y,** y pensemos: ¿Qué tienen en común?

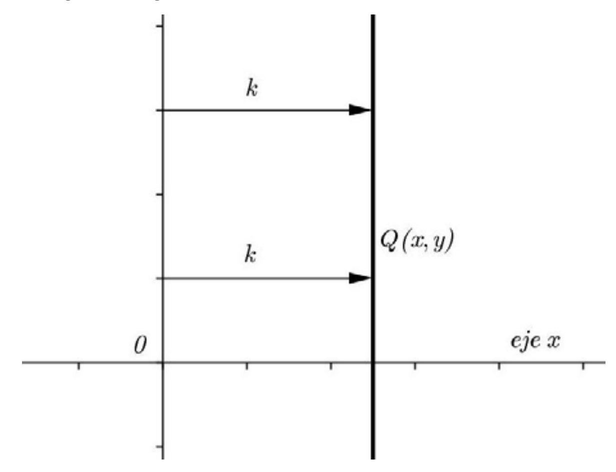
¿???

Cualquiera sea la distancia de la recta al eje y, la abscisa de esos puntos es la misma, eso es lo que caracteriza a esos puntos.

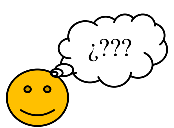
Luego una ecuación que representa la recta que es paralela el eje y es:

(3) $\quad x = k \quad$ si k es la abscisa de cualquiera de sus puntos.

Reforzar la idea en el siguiente gráfico:



Analicemos qué significa que la pendiente m sea 0. Esto es que dos puntos distintos que están sobre la recta tienen igual ordenada, ya que el cambio de ordenadas en ese caso es 0, y eso pasa para cualquier par de puntos.



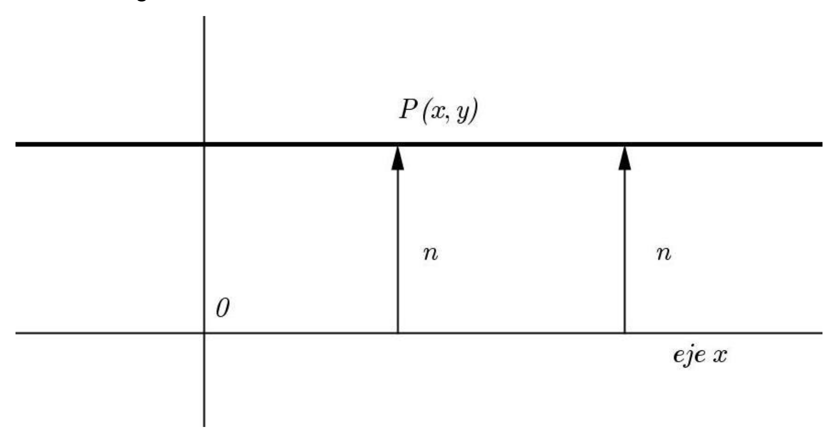
Como la pendiente $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = m$, siendo $x_1 \neq x_2$

Luego, si la pendiente es 0 todos los puntos tienen igual ordenada, es decir ellos están sobre una **recta paralela al eje x.**

Una ecuación que representa esa situación es:

(4) $y = n$, siendo n la ordenada de cualquiera de sus puntos.

Confirmemos en el gráfico:



Dada $y = m.x + n$ haciendo convenientes pasajes de términos se puede llevar a la forma: $-m.x + y - n = 0$, de donde resulta que:

(5) $a.x + b.y + c = 0$

expresión que representa una recta para a y b números reales no simultáneamente nulos. Ella da todas las posibilidades de ecuaciones de rectas analizadas previamente.

Tarea: Puede usted considerar qué pasa para los casos en que se anula alguno de los parámetros a, b ó c (con la restricción que a y b no sean 0 simultáneamente) y observe que puede obtener las ecuaciones de tipo (1), (3) ó (4).

¡Cierto!

Una expresión del tipo **(5)** se llama **ecuación general de la recta.**

OBSERVACION 5.4.3: Por lo anteriormente dicho *una misma recta puede tener más de una ecuación que la represente.* Basta multiplicar una de esas ecuaciones por una constante no nula para obtener otra ecuación que representará la misma recta, por ello **se debe decir *una ecuación de la recta*** y no la ecuación de la recta.

EJEMPLO 5.4.4

Determinar la pendiente y la ordenada al origen de la recta determinada por la ecuación:

$$3x - 2y + 4 = 0$$

Solución: Para ello despejamos y, $2y = 3x + 4$,

$y = \frac{3}{2}x + \frac{4}{2}$ por lo tanto $y = \frac{3}{2}x + 2$, luego la pendiente es $m = \frac{3}{2}$ y la ordenada al origen es $n = 2$.

EJEMPLO 5.4.5

Hallar una ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3, -2)$ y es paralela al eje y.

Solución:

Todos los puntos de una recta paralela al eje y tienen igual abscisa. Si $P(3, -2)$ es uno de sus puntos todos ellos tendrán abscisa 3, por lo cual una ecuación será $x = 3$.

Se sabe que **dos puntos determinan una recta**. Además **única**.



Es uno de los Postulados de Euclides.

Por lo tanto si se conocen las coordenadas de dos puntos que estén en una recta se podrá determinar una ecuación de la misma.

EJERCICIO 5.4.6

Hallar una ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ distintos del plano. (Idea para la solución: usar la forma implícita, sabiendo que los dos puntos la satisfacen, y considerar la Observación 5.4.1.)

EJERCICIO 5.4.7

Hallar una ecuación de la recta que pasa por $P(-3, 1)$ y por $Q(2, 2)$

EJERCICIO 5.4.8

Hallar una ecuación de la recta que es paralela a la determinada por $3 - 4y = 2x$, y pasa por $A(3, -7)$

EJERCICIO 5.4.9

¿Los puntos $P(-2, 3)$, $R(0, 5)$ y $S(1, -1)$ son puntos de la recta de ecuación $3x - 2y = 0$?

EJERCICIO 5.4.10

Hallar ecuaciones para las rectas que contienen a los lados del triángulo formado por los vértices $R(2, 3)$, $S(1, 0)$, $Q(5, 2)$.

EJERCICIO 5.4.11

Verificar que si dos rectas r_1 y r_2 son perpendiculares, y supongamos que r_1 no es paralela al eje x, entonces $m_1 = -(m_2)^{-1}$, siendo m_1 y m_2 respectivamente las pendientes de r_1 y r_2.

Recordatorio:
$m = \tan\alpha$, siendo α el ángulo que forma la recta con el eje positivo x

Recordatorio:
$\tan(\alpha + 90^\circ) = \dfrac{sen(\alpha + 90^\circ)}{\cos(\alpha + 90^\circ)}$, siendo α el ángulo que forma la recta r_1 con el eje positivo x, y use las expresiones de seno y coseno para la suma de ángulos. Y usar los valores de sen 90^0 y de cos 90^0

¿Qué ocurre si una de las rectas es paralela a uno de los ejes y son perpendiculares entre si?

5. Cónicas

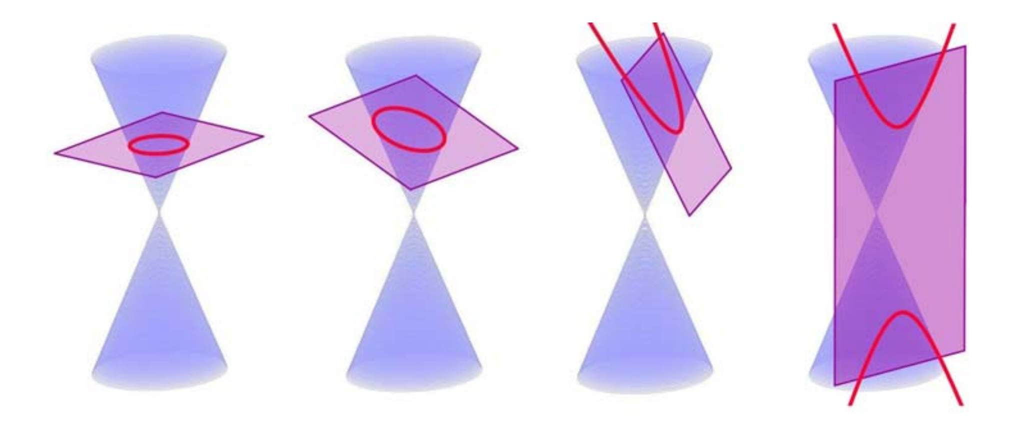
Anteriormente estudiamos que una ecuación de primer grado en ambas variables x e y, siempre representa una recta, y toda recta se puede representar por una ecuación de primer grado en ambas variables.

La ecuación general de segundo grado tiene la forma:

$$a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2 + d\,x + e\,y + f = 0$$

en la cual a, b y c son números reales que no son cero a la vez.

Las ecuaciones de segundo grado representan, con dos excepciones triviales, a secciones cónicas; esto es, curvas formadas por la intersección de un plano con un cono circular recto.



Para una demostración sobre esta afirmación y que se ha representado en los gráficos anteriores, ver el **Apéndice 1 del Capítulo 7.**

De manera inversa, todas las secciones cónicas se designan mediante ecuaciones de segundo grado. (Analice que representa si $b = d = e = f = 0$ y si $d = e = f = 0$ y si además $a = 0$ ó $c = 0$)

Un cono tiene dos porciones, o *troncos,* separados entre sí por el vértice; no tiene base o extremo, por lo que se prolonga indefinidamente en ambas direcciones; de esta manera, algunas de las secciones cónicas no están acotadas.

Las secciones cónicas tradicionales, o simplemente ***cónicas***, son la *elipse*, la *parábola*, la *hipérbola*; la *circunferencia* es un caso especial de la elipse.

A los demás casos se les llama *cónicas degeneradas.*

Existen otros dos casos representados por ecuaciones de segundo grado: un par de rectas y la carencia de gráfica, que no se obtienen como intersección de cono y plano.

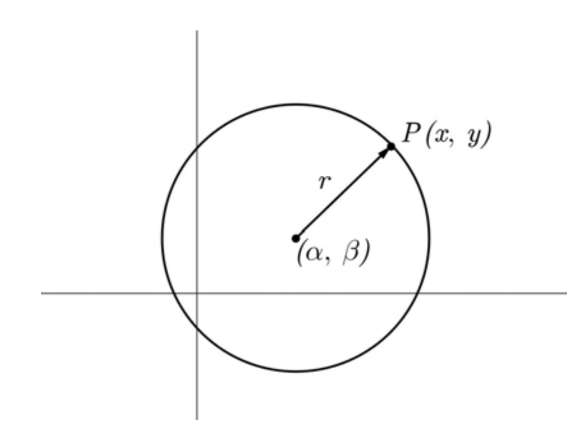
Circunferencia

En este apartado vamos a determinar ecuaciones para las circunferencias, que como veremos luego es un caso particular (y muy sencillo) de una situación más general.

Una **circunferencia** es el conjunto de puntos del plano que equidistan (están a igual distancia) de un punto fijo llamado **centro**. Esa distancia se llama **radio**.

Dependerá de la posición del centro C y el radio r la ecuación que se obtenga.

Sea $C(\alpha, \beta)$ y sea r el radio.



Si $P(x, y)$ es un punto genérico de la circunferencia por ello debe cumplir:

$$d(P,C) = r$$

es decir, aplicando la fórmula de distancia:

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = r$$

por lo cual

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

Hemos determinado la expresión buscada.

(1) $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ *Ecuación canónica* de la **circunferencia con centro $C(\alpha,\beta)$ y radio r**

EJEMPLO 5.5.1

Hallar una ecuación de la circunferencia con centro en $C(2, -1)$ y tiene radio 5.

Solución: En este caso $\beta = -1$ y $\alpha = 2$, y $r = 5$, sólo hay que remplazar en la expresión (1) hallada:

$$(x - 2)^2 + (y - (-1))^2 = 5^2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$$

EJERCICIO 5.5.2

Hallar una ecuación de la circunferencia que cumple:

a) De centro $C(-1, 2)$ y radio1
b) De centro $C(0, 0)$ y radio 3
c) De centro $C(0, 0)$ y radio 1.
d) De centro $C(-3, 4)$ y radio 1.
e) De centro $C(5, 0)$ y radio $3^{1/2}$.
f) Pasa por los puntos $A(1, 3)$, $B(-1, 3)$ y $E(2, 1)$.

Si se desarrollan los cuadrados en (1) se obtiene:

$$x^2 - 2\,\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\,\beta y + \beta^2 = r^2$$

que se puede llevar a la forma:

(2) $a\,x^2 + b\,y^2 + c\,x + d\,y + e = 0$ para valores convenientes de a, b, c, d y e en $\mathbb{R}$

Observar que debe ser $a = b$.

La pregunta es ¿toda expresión de la forma (2) representa una circunferencia? Analicemos con un ejemplo la respuesta.

EJEMPLO 5.5.3

Consideremos $2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y - 8 = 0$ el propósito es llevarla a la forma (1) para determinar sus elementos; dividimos por 2 miembro a miembro y completamos cuadrados.

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \qquad \textbf{(*)}$$

Este artilugio o estrategia, de completación de cuadrados, consiste en tratar que la expresión en "x", respectivamente en "y", que poseemos se parezca a una de la forma $(x-\alpha)^2$, es decir a una expresión de la forma $(x-\alpha)^2 = x^2 - 2x\alpha + \alpha^2$, análogo para $(y-\beta)^2$.

Así resulta que:

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y - 4 = x^2 - 2x(-1) + y^2 - 2.2y - 4 = 0$$

Observar que como $x^2 + 2x = x^2 - 2x(-1) = x^2 - 2x(-1) + (-1)^2 - 1 = (x+1)^2 - 1$

y de igual forma : $y^2 - 4y = y^2 - 2.2y + 2^2 - 4 = (y-2)^2 - 4$

Luego, la expresión señalada anteriormente con **(*)** puede escribirse como:

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4$$

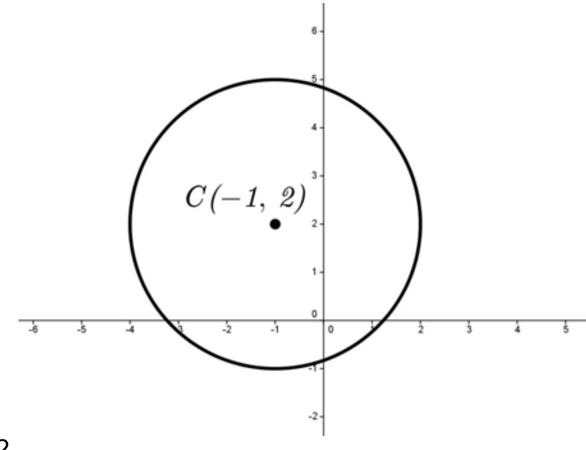
y por lo observado antes puede reescribirse sumando a ambos miembros 1 unidad para completar las "x" y 4 unidades para completar las "y".

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y = (x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 = 4$$

Con lo que queda:

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

Observar que el primer miembro es POSITIVO, luego para ser una circunferencia el segundo miembro que está representando al cuadrado del radio también debe serlo y en este caso así es.



Por lo tanto la ecuación dada representa una circunferencia con centro $C(-1, 2)$ y radio 3, cuya gráfica es la adjunta.

EJEMPLO 5.5.4

Sea ahora la ecuación $x^2 + y^2 - x + \frac{3}{2}y - \frac{67}{16} = 0$. Estudiemos a qué circunferencia corresponde, llevándola a su forma canónica para luego representarla gráficamente.

Completemos cuadrados…

$$x^2 - x + y^2 + \frac{3}{2}y = \frac{67}{16}$$

Sumamos a ambos miembros lo necesario para que los términos en "x" y en "y" sean cuadrados perfectos.

$$x^2 - 2.x.\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + 2.y.\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{67}{16} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

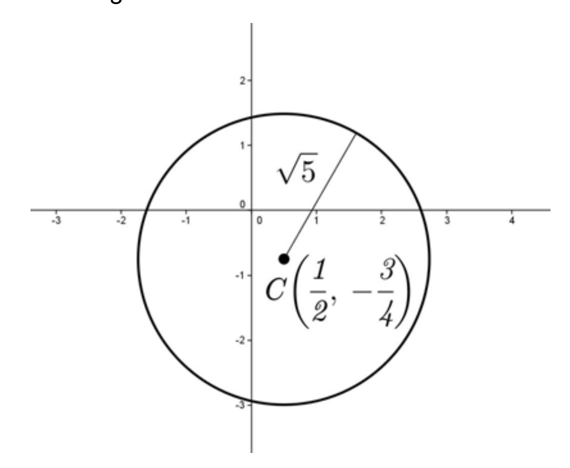
Así queda:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{67}{16} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

y resolviendo las cuentas del segundo miembro da:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = 5$$

Por lo tanto, la ecuación dada representa una circunferencia con centro $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ y radio $r = \sqrt{5}$, cuya gráfica es la de la figura.



EJERCICIO 5.5.5

Encontrar la condición para que (2) represente una circunferencia.

EJERCICIO 5.5.6

Decir, justificando la respuesta, si las siguientes ecuaciones representan o no una circunferencia. En caso de serlo hallar sus elementos.

a) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 1$

b) $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 1$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$

d) $x^2 - 2x + y^2 = 1$

e) $3x^2 + 3y^2 + 9x - 3y + 21 = 0$

f) $6x^2 + 6y^2 - 12x + 12y - 6 = 0$

Parábola

La definición de parábola como lugar geométrico es la siguiente:

> Una **parábola** es el conjunto de los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo (**foco**) y de una recta fija (**directriz**), que no contiene al foco.

Imaginemos que el punto $F(c, 0)$ es **el foco** y **la directriz** es dada por $x = -c,\ c \neq 0$.

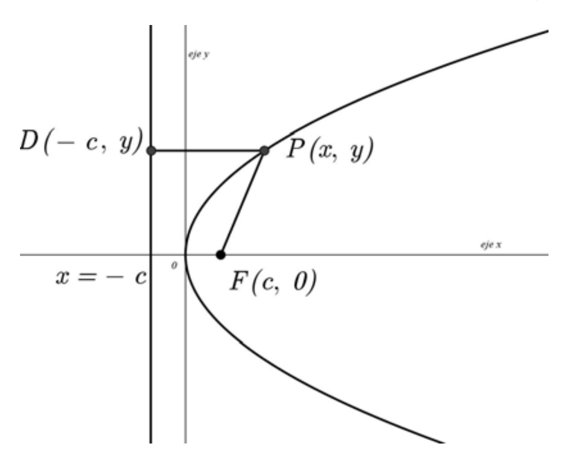
Escogemos un punto $P(x, y)$ de la parábola y vemos que condiciones deben satisfacer x e y.

Al valor $|c|$ se lo llama **distancia focal.**

De acuerdo a la definición, tenemos:

$$d(P,F) = d(P,D)$$

¿?



Para pensar:

Por qué podemos afirmar que D tiene coordenadas $(-c, y)$?

Aplicando la definición de distancia entre dos puntos:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2}$$

y como las bases son positivas (por qué?), elevando al cuadrado resulta:

$$(x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2$$

desarrollando los binomios al cuadrado:

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2$$

simplificando queda:

$$y^2 = 4cx \qquad (1)$$

Observar que los pasos que realizamos a partir de la definición hasta obtener (1) pueden revertirse. Por qué?

Por lo tanto si un punto está en la parábola cuyo foco está en $(c, 0)$ y su directriz tiene como ecuación $x = -c$, satisface la ecuación $y^2 = 4cx$ y recíprocamente.

Un punto $P(x, y)$ está en la parábola de foco $F(c, 0)$ y directriz *d*: $x = -c$ si y sólo si satisface la ecuación: $y^2 = 4cx$

OBSERVACION 5.5.7: Comprobar que un punto $P(y^2/4c\ , y^2)$ es tal que :

$$d(P, F) = d(P, D)\text{, con } F(c, 0) \text{ el foco y la directriz, } x = -c,\ c \neq 0$$

- Veamos algunas ***propiedades*** de esta parábola:

Primero consideremos que el eje x es un eje de simetría; en otras palabras, la parte que está abajo del eje x es la imagen especular (en espejo) de la parte de arriba de él. A esta línea se le llama el **eje de la parábola** y es perpendicular a la directriz y contiene al foco.

El punto de intersección del eje de la parábola con la parábola es el **vértice** V.

El vértice de la parábola dada por $y^2 = 4cx$ es el origen $V(0, 0)$.



- Se puede invertir el papel de x e y en lo anterior, se obtendrá:

Un punto $P(x, y)$ se encuentra en la parábola cuyo foco está en $F(0, c)$ y cuya directriz es d: $y = -c$, si y sólo si satisface la ecuación:

$$x^2 = 4cy$$

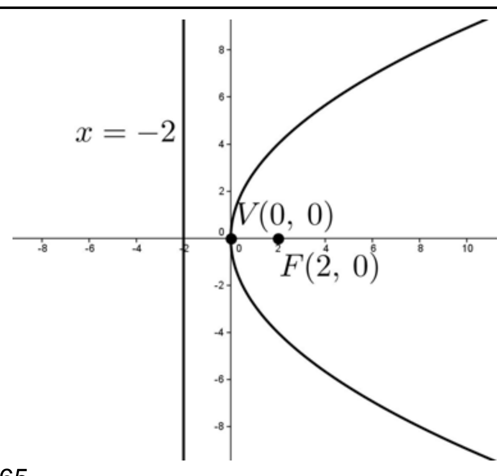
EJEMPLO 5.5.8

Trazar y describir a $y^2 = 8x$.

Solución:

Esta ecuación tiene la forma

$y^2 = 4cx$, siendo $c = 2$.



De esta manera, la ecuación representa una parábola cuyo vértice está en el origen (0, 0) y su eje en el eje x.

El foco está en (2, 0) y su directriz es $x = -2$.

EJEMPLO 5.5.9

Trazar y describir $x^2 = -12y$

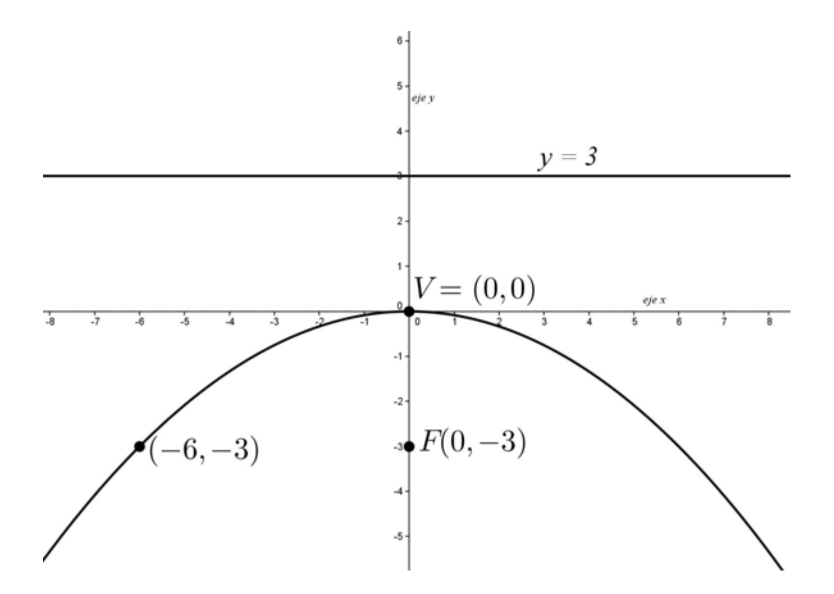
Solución:

Esta ecuación tiene la forma:

$x^2 = 4cy$, siendo $c = -3$.

Por consiguiente, es una parábola con su vértice en el origen y su eje en el eje y.

El foco está en (0, – 3) y una ecuación de la directriz es $y = 3$.



Observemos que, de acuerdo con estos dos ejemplos, el *signo de c expresa la dirección hacia la cual se abre la parábola*. En general vale (justifique):

Si c **es positiva**, la parábola se abre en dirección positiva (a la **derecha o arriba**).

Si c **es negativa.**, la parábola se abre en dirección negativa (a la **izquierda o abajo).**

EJEMPLO 5.5.10

Deducir una(s) ecuación(es) de la o las parábolas que tienen su vértice en el origen y su foco en el punto (– 4, 0).

Solución:

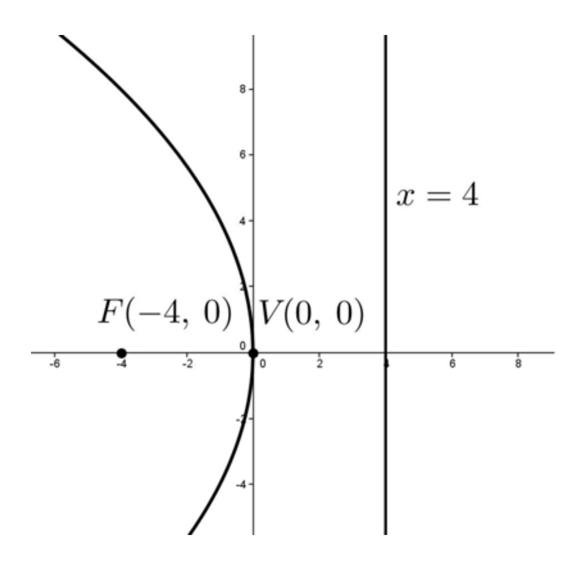
Como el foco y el vértice se encuentran en el eje x, éste es el eje de la parábola.

Por tanto, está representada por una ecuación de la forma $y^2 = 4cx$.

Si el vértice es $V(0, 0)$ y el foco está en $(-4, 0)$, $c = -4$ y la ecuación es:

$$y^2 = -16x$$

Hay una única parábola con vértice en el origen y foco (-4.0), que es la representada en la figura.



Respecto a las ecuaciones que la representan son sólo una, salvo por modificaciones algebraicas equivalentes, por ejemplo:

$$16\,x + y^2 = 0,.. \quad 4\,x + y^2/4 = 0,\ldots\ldots \quad 3\,y^2 = -48\,x, \text{ etc.}$$

que son expresiones algebraicas distintas, pero todas equivalentes entre sí.

EJERCICIO 5.5.11

Trazar y describir las parábolas representadas por las siguientes ecuaciones

a) $y^2 = -12x$ b) $x^2 = -8y$ c) $y^2 = 10x$

d) $x^2 = 5y$ e) $x^2 = 6y$ f) $y^2 + 5x = 0$

EJERCICIO 5.5.12

Deduce una(s) ecuación(es) de la o las parábolas descriptas en los siguientes puntos:

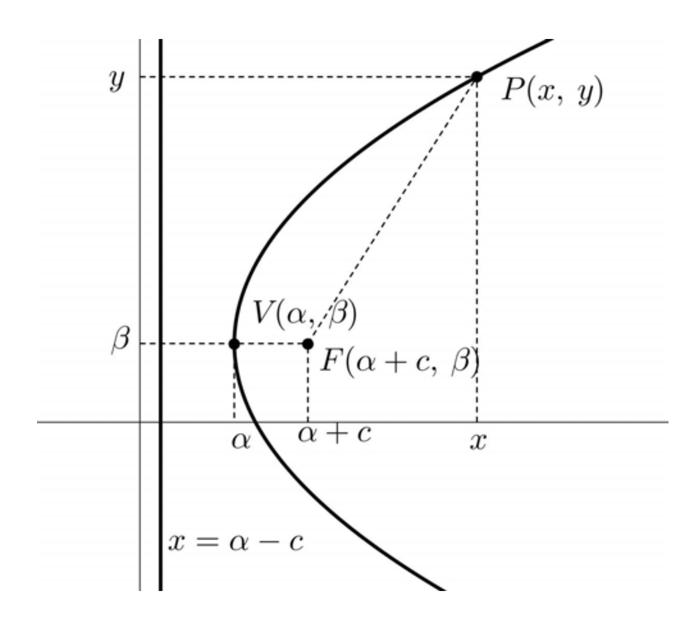
a) Vértice en (0, 0), eje en el eje *x*, contiene a (1, 5)

b) Vértice en (0, 0), eje en el eje *y*, contiene a (1, 5)

c) Foco en (– 3, 0), directriz representada por $x = 3$.

d) Vértice en (0, 0), contiene a (2, 3) y a (– 2, 3)

- *Sea ahora una parábola de vértice* $V(\alpha,\beta)$*, con eje paralelo al eje* x*, distancia focal* c, tal como ilustra la figura



Si planteamos que la distancia de un punto $P(x,y)$ al foco es igual a la distancia del punto $P(x,y)$ a la recta directriz, resulta que:

$$\sqrt{\left(x-(\alpha+c)\right)^2+(y-\beta)^2}=\sqrt{\left(x-(\alpha-c)\right)^2}$$

EJERCICIO 5.5.13

Continuar la demostración planteada, siguiendo los pasos similares a los realizados para la obtención de las ecuaciones para parábolas con vértices en $O(0,0)$, y llegará a la expresión:

$$(y-\beta)^2=4c(x-\alpha)$$

> Un punto $P(x,\ y)$ está en la parábola de foco $F\ (\alpha+c,\ \beta)$ y directriz d: $x=\alpha-c$, con vértice $V(\alpha,\beta)$ si y sólo si satisface la ecuación $(y-\beta)^2=4c(x-\alpha)$
>
> (la parábola es de eje paralelo al eje x, con distancia focal $|c|$)

EJERCICIO 5.5.14

Deducir una ecuación de la parábola que tiene vértice $V(\alpha, \beta)$, con foco $F(\alpha, \beta + c)$ y directriz d: $y = \beta - c$ (la parábola es de eje paralelo al eje y, con distancia focal $|c|$).

Representar gráficamente para orientarse!

EJERCICIO 5.5.15

Graficar las parábolas determinadas por las siguientes ecuaciones:

a) $y^2 = 4(x - 1)$

b) $y^2 = 4(x + 1)$ Qué observa?

c) $x^2 = 4(y - 1)$

d) $x^2 = 4(y + 1)$ Qué observa?

EJERCICIO 5.5.16

Considere las parábolas del ejercicio anterior y para cada una de ellas:

a) Determine el foco F.

b) Determine la directriz d y una ecuación que la represente.

c) Determine un punto A que esté en la parábola.

d) Compruebe que $d(A, F) = d(A, d)$

e) Halle en cada caso para las parábolas del ejercicio anterior, una recta (y sus ecuaciones) que intercepta en un punto, otra en dos puntos y otra que no tenga intercepción.

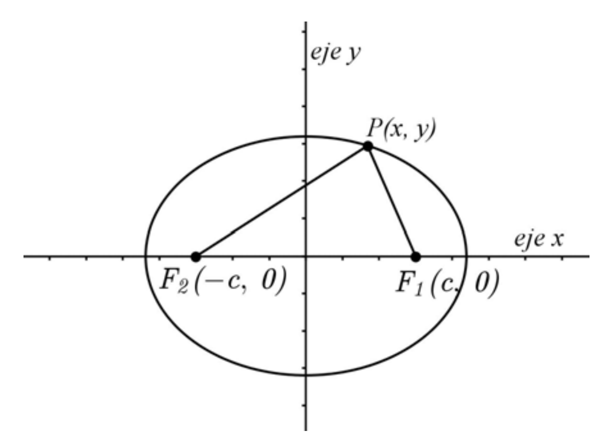
f) Hallar una parábola de eje paralelo al eje x, que intercepte en dos puntos a la parábola dada en c) del ejercicio anterior.

Elipse

Veremos otra cónica tal que la circunferencia es un caso particular.

Una **elipse** es el conjunto de los puntos $P(x, y)$, tales que la suma de las distancias de $P(x, y)$ a un par de puntos fijos distintos (los focos) es una constante fija.

Representaremos a los **focos** como $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$ y a la constante fija como $2a$.



$2a > 0$ (¿por qué?)

Si $P(x, y)$ representa a un punto de la elipse, por la definición de la curva, se cumple

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2.a$$

Por la definición de distancia entre dos puntos, se obtiene la expresión:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2.a$$

Se harán una serie de operaciones convenientes para arribar a una ecuación más amigable.
Pasando una raíz al segundo miembro:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2.a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

elevando al cuadrado ambos miembros y haciendo cuentas (recuerde un “binomio al cuadrado”…):

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a.\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

cancelando y pasando de miembro convenientemente:



$$4a.\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4cx$$

dividiendo ambos miembros por $4a$ (Lo puede hacer, pues : cómo es a?):

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{cx}{a}$$

elevando nuevamente al cuadrado ambos miembros y haciendo cálculos:

$$x^2+2cx+c^2+y^2=a^2+2cx+\frac{c^2x^2}{a^2}$$

Cancelando y agrupando nos queda:

$$\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)x^2+y^2=a^2-c^2 \qquad (1)$$

Analicemos ¿cómo es a^2-c^2?:

El triángulo cuyos vértices están en $(c, 0)$, $(-c, 0)$ y $P(x, y)$, tiene uno de sus lados de longitud $2\,|c|$. La suma de las longitudes de los otros dos lados es $2.a$. Así,

$2a > 2c$

$a > c$

$a^2 > c^2$

$a^2 - c^2 > 0$

Recordatorio:
En cualquier triángulo, la longitud de un lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos…
Si no, no hay triángulo!

Dividiendo ambos miembros de la expresión (1) por a^2-c^2 resulta:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \qquad (2)$$

Como $a^2 - c^2$ es positivo, lo podemos llamar b^2.

Por lo tanto, obtenemos al reemplazar en (2):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ en donde $b^2=a^2-c^2$

Observemos que hemos elevado al cuadrado ambos lados de la ecuación al efectuar dos pasos, y ambos miembros de las igualdades eran no negativos. En consecuencia, no hemos introducido raíces extrañas y esos pasos se pueden invertir.

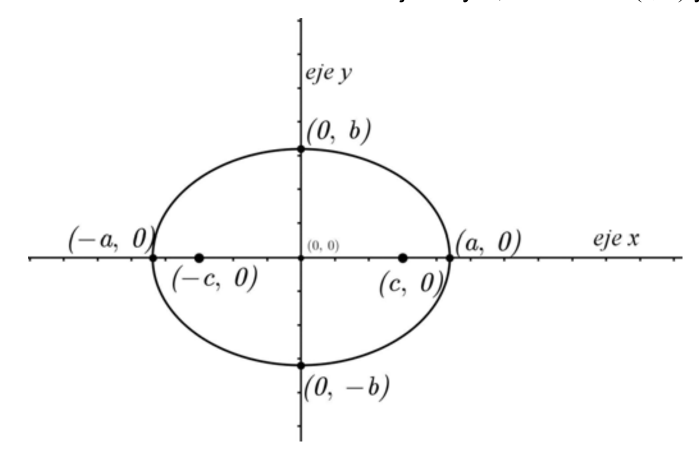
- Algunas propiedades de esta elipse:

Vemos que hay dos ejes de simetría: el eje x y el eje y.

Además $A_1(a, 0)$ y $A_2(-a, 0)$ son los que dan las abscisas al origen de la curva y los puntos $B_1(0, b)$ y $B_2(0, -b)$ son los que dan las ordenadas al origen de la curva. Siendo $a > b$ (porque $b^2 = a^2 - c^2$).

Por ello, al segmento entre los puntos que están sobre el eje x se le llama **eje mayor**, y al segmento entre los puntos que están sobre eje y se le llama **eje menor** de la elipse.

Los puntos, $A_1(a, 0)$ y $A_2(-a, 0)$ en el eje mayor se llaman **vértices** y los puntos $B_1(0, b)$ y $B_2(0, -b)$ en el eje menor se llaman **covértices.** Al punto de intersección de los ejes, $O(0, 0)$ en este caso, se le llama **centro.** Los focos están en el eje mayor, esto es en $(c, 0)$ y $(-c, 0)$.



Un punto $P(x, y)$ está en la elipse con vértices en $A_1(a, 0)$ y $A_2(-a, 0)$ y focos en $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ si y sólo si satisface la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

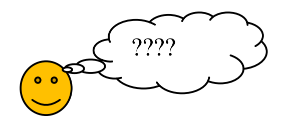
en la cual

$$b^2 = a^2 - c^2$$

Esta forma de la ecuación de la elipse, se llama **forma estándar** o **canónica**.

En algunas oportunidades también **explicita.**

Para pensar : Que ocurre si $a = b$?.



- *También en este caso los papeles de x e y se pueden invertir*

Un punto $P(x, y)$ está en la elipse con vértices en $A_1(0, a)$ y $A_2(0, -a)$ y focos en $(0, c)$ y $(0, -c)$ si y sólo si satisface la ecuación

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

en la cual

$$b^2 = a^2 - c^2$$

¡Dibuje esta situación!

EJEMPLO 5.5.17

Describir la curva determinada por $9x^2 + 25y^2 = 225$ (*)

Solución:

Primero pasaremos esta ecuación a su forma estándar; para ello dividimos ambos miembros por 225:

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ (compruebe que es así)

De inmediato surge la pregunta acerca de cómo podemos saber que estamos manejando, si

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{ó} \qquad \frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

Los números en los denominadores no tienen “etiquetas” que digan cuál es a y cuál es b, de modo que ¿cómo sabemos cuál es a y cuál es b? La respuesta es “el tamaño”.

En ambos casos, $a > b$. Así, el denominador mayor será a^2 y el menor b^2.

Entonces,

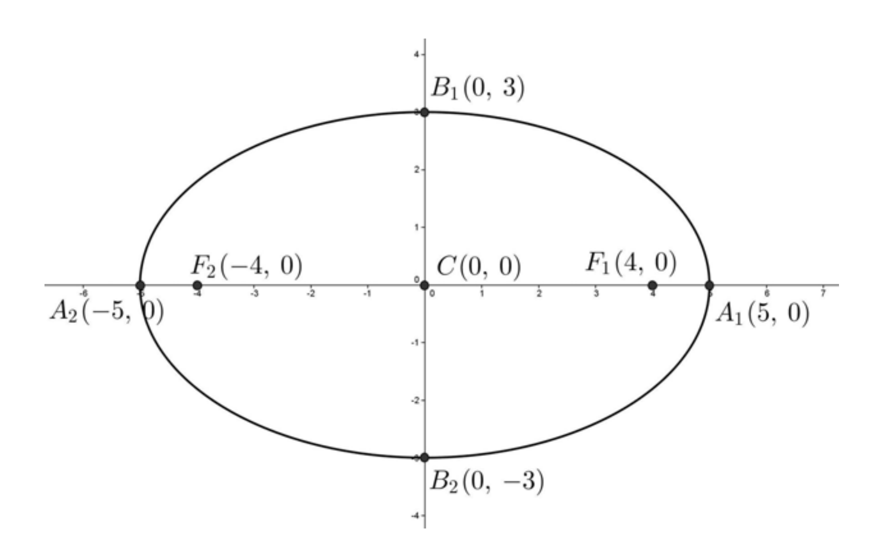
$$a^2 = 25, \qquad b^2 = 9,$$

y

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16.$$

La elipse dada por la ecuación (*) tiene su centro en el punto $(0, 0)$, sus vértices en $A_1(5, 0)$ y $A_2(-5, 0)$, sus covértices $B_1(0, 3)$ y $B_2(0, -3)$, y sus focos en $F_1(4, 0)$ y $F_2(-4, 0)$.

Una representación gráfica de la elipse es la siguiente:



EJEMPLO 5.5.18

Trazar y describir la curva dada por la ecuación $25\,x^2 + 16\,y^2 = 400$.

Solución:

Pasamos esta ecuación a su forma estándar, dividiendo por 400 ambos miembros y simplificando, obtenemos

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$$

Compruebe...

Entonces

$$a^2 = 25 \quad \text{y} \quad b^2 = 16,$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9.$$

Como el denominador de y^2 es mayor que el denominador de x^2:

Esta elipse tiene su centro en $(0, 0)$, sus vértices en $(0, 5)$ y $(0, -5)$, sus covértices en $(4, 0)$ y $(-4, 0)$ y sus focos en $(0, 3)$ y $(0, -3)$. Haga un dibujo de la misma.

Durante dos mil años, se creyó que los planetas se mueven en órbitas circulares, alrededor de la Tierra, según el llamado **modelo aristotélico**. Después de todo, el universo debe ser perfecto y el círculo es la figura perfecta (o lo que ello signifique). Estos argumentos filosóficos se tomaron como demostración suficiente de la hipótesis. Sin embargo, Johannes Kepler, en el siglo XVII, demostró que las órbitas son elípticas y que el Sol está en uno de los focos, por esta razón se abandonó el modelo aristotélico del sistema solar.

No obstante, es posible que haya órbitas circulares, y algunas (entre ellas la Tierra) son casi circulares. De hecho, si redujéramos la órbita de la Tierra de tal modo que el eje mayor tuviera 8 pulgadas de longitud, el eje menor tendría 7,8 pulgadas. Con esa diferencia tan pequeña era difícil reconocer que la órbita es una elipse y no una circunferencia. (Una pulgada es 2,54 cm, ya que Ud. estudia Algebra haga la conversión a cm y cuál es la diferencia entre ambos ejes con esa unidad de medida).

EJERCICIO 5.5.19

Trazar y describir las elipses en los siguientes apartados:

a) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$

b) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{169}=1$

c) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{49}=1$

d) $4x^2 + 25y^2 = 100$

e) Hallar dos puntos que pertenezcan a cada una de las elipses representadas por las ecuaciones anteriores, que no sean ni los vértices o covértices.

EJERCICIO 5.5.20

Deduzca una ecuación de las elipses descriptas en los siguientes casos, para mejor orientación para su trabajo, haga un dibujo de los datos:

a) Centro en (0, 0), vértice en (0, 13), foco en (0, – 5).

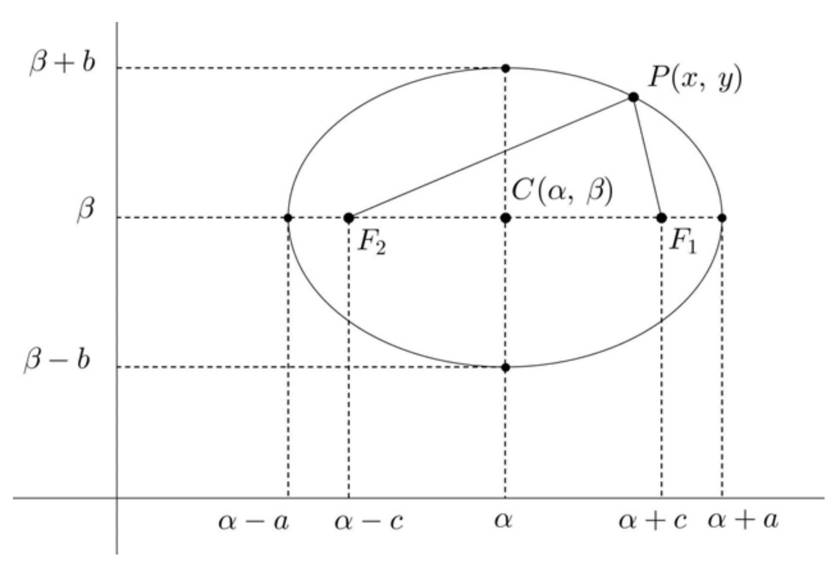
b) Centro en (0, 0), covértice en (0, 5), foco en (– 12, 0).

c) Centro en (0, 0), covértice en (0, 3), vértice en (– 4, 0).

Se va a generalizar la situación de la elipse, cambiando la posición del centro de la misma, dejando los ejes mayores y menores paralelos a los ejes del sistema coordenado, lo que provocará la obtención de otra ecuación forma de la ecuación, pero no muy distinta….

- *Sea una elipse con centro en* $C(\alpha, \beta)$*, de ejes paralelos a los ejes coordenados, con distancia focal* c *y semiejes* a *y* b*.*

Supongamos que el eje mayor de la elipse es paralelo al eje x, tal como se indica en la figura.



Si $P(x, y)$ representa a un punto de la elipse, entonces

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2.a$$

$$\sqrt{\left(x-(\alpha+c)\right)^2+\left(y-\beta\right)^2}+\sqrt{\left(x-(\alpha-c)\right)^2+\left(y-\beta\right)^2}=2.a$$

EJERCICIO 5.5.21

Continuar la demostración planteada, siguiendo las ideas que hemos empleado para la elipse centrada en el origen de coordenadas, para llegar a la expresión:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$

Un punto $P(x, y)$ está en la elipse con centro en $C(\alpha,\beta)$, de ejes paralelos a los ejes coordenados, con distancia focal c y semiejes a y b, con el eje mayor de la elipse paralelo al eje x si y sólo si sus coordenadas satisfacen la ecuación $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ siendo $b^2 = a^2 - c^2$ (ecuación en forma **canónica, estándar** o **explícita**)

EJERCICIO 5.5.22

Deducir una ecuación de la elipse con centro en $C(\alpha,\beta)$, de ejes paralelos a los ejes coordenados, con distancia focal c y semiejes a y b, con el eje mayor de la elipse paralelo al eje y. Representar gráficamente. (Idea: haga un dibujo de la situación y siga pasos similares al ejercicio anterior)

Un punto $P(x, y)$ está en la elipse con centro en $C(\alpha,\beta)$, de ejes paralelos a los ejes coordenados, con distancia focal c y semiejes a y b, con el eje mayor de la elipse paralelo al eje y si y sólo si sus coordenadas satisfacen la ecuación

$$\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$$

siendo $b^2 = a^2 - c^2$ (ecuación en forma canónica , estándar o explícita)

EJERCICIO 5.5.23

Graficar las elipses dadas por las siguientes ecuaciones y sacar conclusiones

a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ b) $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

EJERCICIO 5.5.24

Graficar lo siguiente y sacar conclusiones:

a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ b) $\frac{x^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$

EJERCICIO 5.5.25

Para las elipses determinadas por las ecuaciones de los ejercicios 5.5.23 y 5.5.24

a) Determinar un punto E que esté en la elipse.

b) Considerar los focos F_1 y F_2 .

c) Verificar que $d(E, F_1) + d(E, F_2)=2a$

d) Hallar un punto simétrico de E respecto del eje x, ¿en qué caso está también en la elipse? Justifique!

EJEMPLO 5.5.26

Trazar y describir la curva descripta por: $x^2+9y^2-2x+27y-\frac{59}{4}=0$

Solución:

Para ello completaremos cuadrados, aunque observando que las "y" se verán multiplicadas por 9, es decir, nos quedará algo de la forma: $9.(y-\beta)^2$.

Tenemos entonces:

$$x^2+9y^2-2x+27y-\frac{59}{4}=0$$

que puede reescribirse como :

$$x^2-2x+9y^2+27y=\frac{59}{4}$$

Para completar cuadrados en las "x" agregaremos 1 a ambos miembros ya que la ecuación anterior es equivalente a:

$$x^2-2x.1+1^2+9y^2+27y=\frac{59}{4}+1^2$$

Ahora completaremos las "y", para ello sacamos factor común 9 y...:

$$(x-1)^2+9.\left(y^2+2.y.\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)=\frac{59}{4}+1+9.\frac{9}{4}$$



Siguiendo las cuentas:

$(x-1)^2+9.\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{144}{4}$ lo que equivale a $(x-1)^2+9.\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=36$

Si dividimos miembro a miembro por 36 queda:

$$\frac{(x-1)^2}{36}+\frac{9}{36}\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=1$$

que podemos escribir como:

$$\frac{(x-1)^2}{6^2}+\frac{\left(y+\frac{3}{2}\right)^2}{2^2}=1$$ Está de acuerdo? Compruebe!

Esta es la ecuación canónica de la elipse, con centro en $C(1,-\frac{3}{2})$. Como $6^2>2^2$ resulta que $a=6$ y $b=2$.

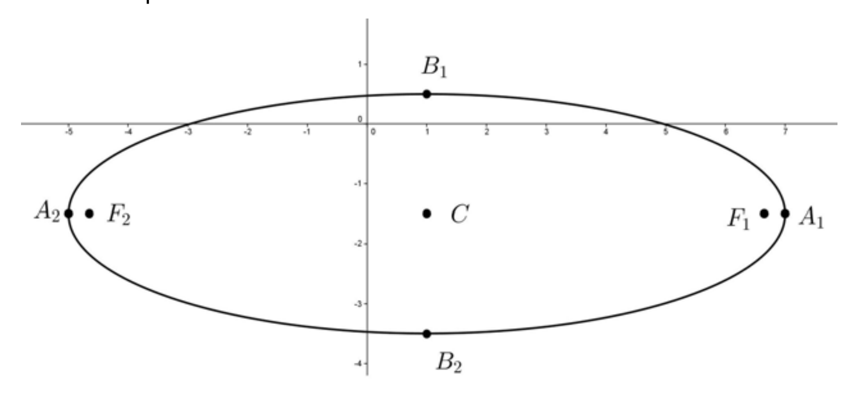
Por lo tanto es una elipse de eje mayor paralelo al eje x, con vértices en $\left(1\pm 6,-\frac{3}{2}\right)$, es decir los vértices son: $A_1\left(7,-\frac{3}{2}\right)$ y $A_2\left(-5,-\frac{3}{2}\right)$.

Los covértices son $\left(1,-\frac{3}{2}\pm 2\right)$, es decir los puntos: $B_1\left(1,\frac{1}{2}\right)$ y $B_2\left(1,-\frac{7}{2}\right)$.

Como $c^2=6^2-2^2=32$, resulta que los focos son $\left(1\pm\sqrt{32},-\frac{3}{2}\right)$, es decir los puntos:

$F_1\left(1+\sqrt{32},-\frac{3}{2}\right)$ y $F_2\left(1-\sqrt{32},-\frac{3}{2}\right)$

La gráfica de esta elipse es:



EJERCICIO 5.5.27

Hallar los elementos de las elipses dadas por las siguientes ecuaciones (si es que corresponde) y representar:

a) $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$

b) $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=4$

c) $x^2+4y^2-2x+y-8=0$

d) $3x^2+2y^2+6x-4y+124=0$

EJERCICIO 5.5.28

La siguiente tabla representa las longitudes de los semiejes mayores (a) y la excentricidad e de las órbitas planetarias. Con esta información, calcula las distancias mínima y máxima (de centro a centro) de Mercurio, Tierra y Plutón al Sol.

La **excentricidad** de la elipse está dada por $e = c/a$

Planeta	**Semieje mayor (millones de km)**	**Excentricidad**
Mercurio	57,9	0,2056
Venus	108,2	0,0068
Tierra	149,6	0,0167
Marte	227,9	0,0934
Júpiter	778,3	0,0484
Saturno	1427,0	0,0560
Urano	2869,0	0,0461
Neptuno	4497,1	0,0100
Plutón	5900	0,2484

Hipérbola

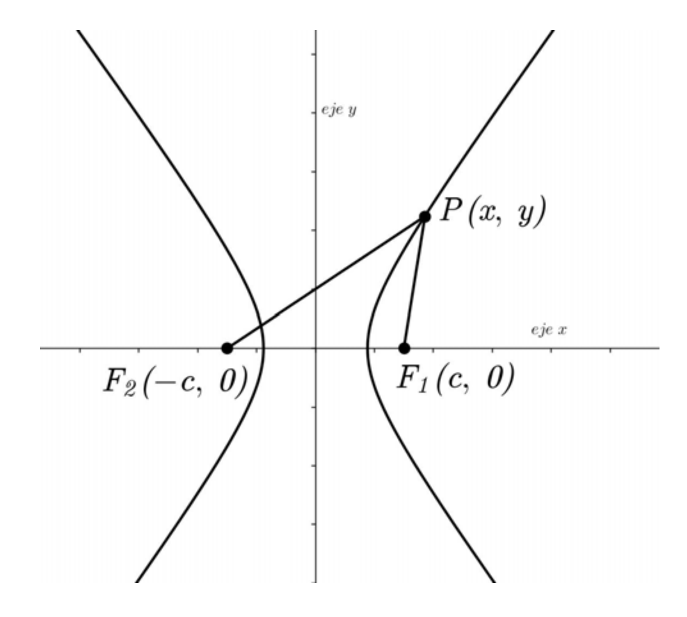
Vemos ahora la última cónica no degenerada que hemos mencionado como intersección de un plano con los dos troncos del cono.

También esta cónica aparece en varias situaciones prácticas.

Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ en el plano, tales que la diferencia positiva entre las distancias de $P(x, y)$ a un par de puntos fijos distintos (los **focos**) es igual a una constante.

Otra vez representaremos a los focos como $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$ y la constante como $2.a$

Si $P(x, y)$ representa un punto de la hipérbola, se cumplirá lo siguiente.



Aplicando la definición y haciendo un proceso similar al de la deducción en el caso de la elipse:

$$d(P,F_1)-d(P,F_2)=\pm 2a$$

El signo $\pm$ es debido a que la expresión correcta sería $\left|d(P,F_1)-d(P,F_2)\right|=2a$, pero para facilitar las cuentas, trabajamos sin valor absoluto. ¿Cómo es a, respecto del 0?

Aplicando la definición de distancia entre dos puntos:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$$

pasando una raíz al otro miembro:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\pm 2a$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y haciendo cuentas (recordar cómo se eleva un binomio al cuadrado):

$$x^2-2cx+c^2+y^2=x^2+2cx+c^2+y^2\pm 4a.\sqrt{(x+c)^2+y^2}+4a^2$$

cancelando y pasando de miembro convenientemente:

$$\pm 4a.\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4acx$$

dividiendo ambos miembros de la igualdad por $4a$ (¿por qué se puede hacer?)

$$\pm\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{cx}{a}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado nuevamente y desarrollando los binomios al cuadrado:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2}$$

Agrupando convenientemente:

$$\frac{c^2 - a^2}{a^2}x^2 - y^2 = c^2 - a^2$$

Dividiendo ambos miembros de la igualdad por $c^2 - a^2$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

Recordatorio:

En todo triángulo la longitud de un lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados

En el triángulo PF_1F_2, se tiene: $\overline{PF_2} < \overline{PF_1} + \overline{F_1F_2}$

$$\left|\overline{PF_2} - \overline{PF_1}\right| < \overline{F_1F_2}$$

$$2a < 2c$$

$a < c$ por lo tanto $0 < c^2 - a^2$

Luego, como $c^2 - a^2$ es positivo podemos llamarlo b^2, entonces:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{en donde } b^2 = c^2 - a^2$$

Ecuación en forma **estándar, canónica** o **explícita** de la hipérbola.

• Otra vez hemos elevado al cuadrado ambos miembros de una ecuación en dos pasos de la deducción. La primera vez los dos miembros eran positivos, y en la segunda podían ser positivos o negativos. Así, no hemos introducido raíces extrañas y los pasos se pueden invertir. Por ello se concluye:

Un punto $P(x, y)$ está en la hipérbola que posee vértices en $A_1(a, 0)$ y $A_2(-a, 0)$ y focos en $F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$ si y sólo si satisface la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{en donde } b^2 = c^2 - a^2.$$

En esta curva tanto a como b son menores que c.

• Algunas propiedades de esta hipérbola.

También, los ejes x e y son ejes de simetría, y una vez más las abscisas al origen están en $A_1(a, 0)$ y $A_2(-a, 0)$.

En este caso no hay ordenadas al origen pues, cuando $x = 0$ se obtiene

$$-\frac{y^2}{b^2} = 1 \ ,$$

y esta ecuación no se cumple con ningún número real y.

El eje x, que contiene dos puntos de la hipérbola, se llama **eje transversal**; y al eje y, **eje conjugado**. El punto de intersección de los ejes de la hipérbola es $O(0, 0)$ y se llama **centro.**

Los puntos $B_1(0, \ b)$ y $B_2(0, -b)$ que no están en esta hipérbola son útiles para lo que sigue.

Para toda hipérbola existen dos líneas rectas a las que la curva se acerca cada vez más.

A esas rectas se les denomina **asíntotas**. Debemos decir las parábolas no tienen asíntotas. Por consiguiente, la hipérbola no es, como podría suponerse al ver diagramas trazados, un par de parábolas.

Si la hipérbola está representada por:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Tiene **asíntotas** representadas por

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

Observar que estas rectas contienen a las diagonales del rectángulo determinado por los puntos:

$A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$, $B_1(0, \ b)$ y $B_2(0, -b)$.

• *También en este caso los papeles de x e y se pueden invertir*

Cambiando x por y, en el razonamiento anterior se puede llegar a la siguiente conclusión:

Un punto $P(x, y)$ está en la hipérbola que posee vértices en $A_1(0, a)$ y $A_2(0, -a)$ y focos en $F_1(0, c)$, y $F_2(0, -c)$, si y sólo si satisface la ecuación

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad \text{siendo } b^2 = c^2 - a^2$$

Las **asíntotas** de la hipérbola de ecuación

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

se representan por

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

Ídem vale que estas rectas contienen a las diagonales del rectángulo determinados por los puntos:

$A_1(0, a)$, $A_2(0, -a)$, $B_1(b, 0)$ y $B_2(-b, 0)$

EJEMPLO 5.5.29

Describir $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

Solución:

Vemos que $a^2 = 9$, $b^2 = 16$ y $c^2 = a^2 + b^2 = 25$. Esta hipérbola tiene su centro en (0, 0), sus vértices en $A_1(3, 0)$ y en $A_2(-3, 0)$, sus focos en $F_1\ (5, 0)$ y en $F_2\ (-5, 0)$. Las asíntotas están dadas por:

$$y=\pm\frac{4}{3}x$$

EJEMPLO 5.5.30

Trazar y describir lo representado por $16x^2-9y^2+144=0$

Solución:

Pasamos esta ecuación a su forma estándar. Para ello podemos transformar la ecuación separando variables del término de número puro:

$$16x^2-9y^2=-144$$

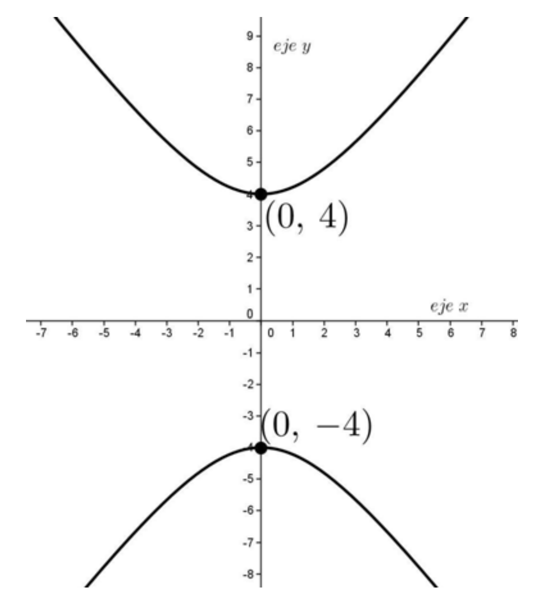
que dividiendo ambos miembros por – 144:

$$\frac{16}{-144}x^2-\frac{9}{-144}y^2=1$$

y simplificando obtenemos

$$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$$

Vemos que $a^2 = 16$, $b^2 = 9$ y $c^2 = a^2 + b^2 = 25$.



Esta hipérbola tiene su centro en $(0, 0)$, sus vértices en $A_1(0, 4)$ y en $A_2(0, -4)$ y sus focos en $F_1(0, 5)$ y en $F_2(0, -5)$. Sus asíntotas se representan mediante $y = \pm\frac{4}{3}x$

EJERCICIO 5.5.31

Trazar y describir lo que representan las ecuaciones de los siguientes apartados:

a). $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ b) $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{9} = 1$ c) $4x^2 - y^2 = 4$

d) $x^2 - y^2 = 0$ e) $16x^2 - 9y^2 = -36$

EJERCICIO 5.5.32

Deducir una ecuación que represente a las hipérbolas descriptas en los siguientes casos:

a) Vértices en (± 2, 0), foco en (– 4, 0)

b) Asíntotas: $y = \pm\frac{2}{3}x$, vértice en (6, 0).

EJERCICIO5.5.33

Para las hipérbolas determinadas por las ecuaciones de los incisos a), b), c) y e) del ejercicio 5.5.31:

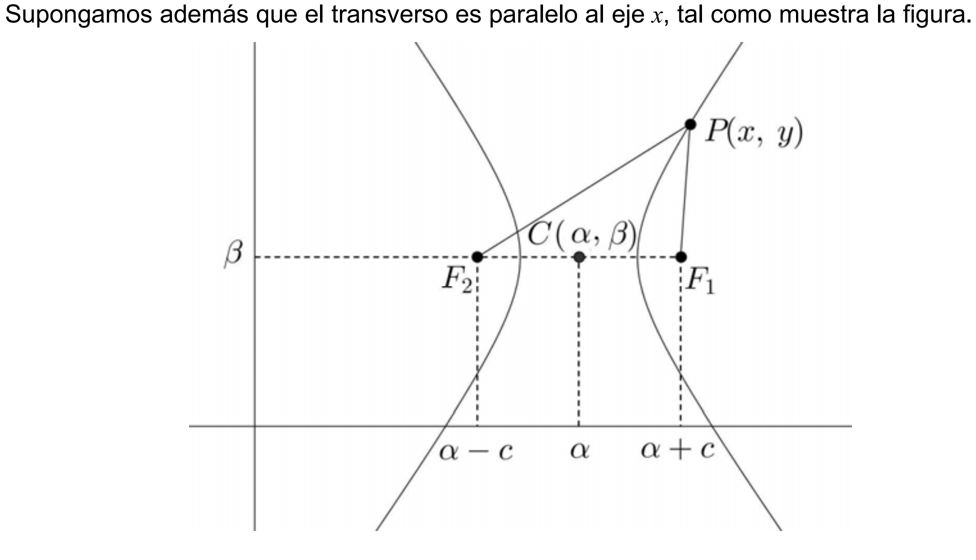
a) Determinar un punto *H* que esté en la hipérbola.

b) Considerar los focos F_1 y F_2.

c) Verificar que $|d(H, F_1) - d(H, F_2)| = 2a$

- *Sea una hipérbola de centro $C(\alpha,\beta)$ y de ejes paralelos a cada uno de los ejes coordenados, con distancia focal c y semiejes a y b.*

  Supongamos además que el transverso es paralelo al eje x, tal como muestra la figura.



Por la definición de hipérbola, sabemos que:

$$d(P,F_1) - d(P,F_2) = \pm 2a$$

$$\sqrt{\left(x-(\alpha+c)\right)^2 + (y-\beta)^2} - \sqrt{\left(x-(\alpha-c)\right)^2 + (y-\beta)^2} = \pm 2a$$

EJERCICIO 5.5.34

Continuar la demostración planteada, siguiendo las ideas que hemos empleado para la hipérbola centrada en el origen de coordenadas, para llegar a la expresión:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

que es la ecuación de una hipérbola de centro $C(\alpha,\beta)$ y de ejes paralelos a cada uno de los ejes coordenados, con distancia focal c y semiejes a y b, siendo su eje transversal paralelo al eje x.

EJERCICIO 5.5.35

Deducir una ecuación de la hipérbola de centro $C(\alpha,\beta)$ y de ejes paralelos a cada uno de los ejes coordenados, con distancia focal c y semiejes a y b, siendo su eje transversal paralelo al eje y. Representar gráficamente.

EJERCICIO 5.5.36

Hallar los elementos de las hipérbolas dadas por las siguientes ecuaciones (si es que corresponde) y representar:

a) $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

b) $\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{9} = 4$

c) $x^2 - 4y^2 - 2x + y - 8 = 0$

d) $3x^2 - 2y^2 + 6x - 4y + 124 = 0$

EJERCICIOS ADICIONALES

1) a) Representar en el plano coordenado los siguientes puntos:
$A(-1, 2)$; $B(0, ½)$; $C(2, -3)$; $D(-4, 0)$
b) Hallar la distancia de *A* a *B*; de *C* a *D* y de *B* a *D*.

2) Dibujar en el plano coordenado los siguientes conjuntos de puntos:
a) $\{(x, y): x > 0\}$ b) $\{(x, y): y < 0\}$

3) Hallar a y b para que los puntos $A(2 - a, 5)$ y $B(-8, b + 5)$ sean coincidentes.

4) Los puntos *A, B, C* son tres vértices de un paralelogramo. Colocar los puntos en un plano coordenado y hallar las coordenadas del cuarto punto *D*.
Siendo $A(1, 2)$, $B(2, 4)$ y $C(7, 4)$. ¿Cuántas soluciones puede dar?

5) Los puntos *A, B, C* son tres vértices de un rectángulo. Colocar los puntos en un plano coordenado y hallar las coordenadas del cuarto punto *D*.
Siendo $A(-4, 2)$, $B(7, 2)$, $C(7, 8)$. ¿Cuántas soluciones hay? Hallar el área del rectángulo.

6) a) Hallar el perímetro del triángulo cuyos vértices son $S(0, 6)$; $T(9, -6)$ y $V(-3, 0)$. Hacer un dibujo en el plano coordenado.
b) Probar analíticamente que es un triángulo rectángulo.
(Idea: usar la recíproca del teorema de Pitágoras: Sean *a, b* y *c* las longitudes de los lados de un triángulo ABC. Si $a^2 = b^2 + c^2$ entonces ABC es un triángulo rectángulo con hipotenusa *a*, y catetos *b* y *c*.)

7) Dados los puntos (0, 0), (6, 0) y (3, 3). Probar analíticamente que el triángulo que determinan es isósceles y rectángulo. Dibujar en el plano coordenado. Además hallar el área.

8) Determinar cuáles pares ordenados satisfacen la ecuación dada:
a) $3x + 2y = 0$ (3, – 2), (0, 0), (– 2, 3)
b) $x - 4y = 6$ (2, – 3), (0, – 3/2), (1, 7)
c) $2x = 6y + 3$ (1, 1), (– 2, 1), (0, 0).
Interpretar geométricamente la situación en cada caso.

9) Para cada ecuación dada a continuación, hallar 3 pares ordenados que la satisfagan y 2 pares que no. Decir cuál es el significado geométrico.

a) $2x + 3y = -1$ b) $\frac{2}{3}\,x - 2 = 1\,y$

c) $x - y = 0$ d) $x + y = 0$

10) Encontrar en los siguientes pares la componente que falta, si éstos son coordenadas de puntos de la recta que verifica la ecuación $2x - 6y = 12$:

a) (0, ?) b) (?, 0) c) (3, ?)

11) Hallar k para que $(3, 2)$ resulte un punto de la recta determinada por la ecuación: $2x - k.y = 6$

12) Para qué valores de b será la recta que une P con Q paralela al eje indicado:

a) $P(-4, 3)$, $Q(b, 1)$, eje y.
b) $P(-5, 2)$, $Q(7, b)$, eje x.
c) $P(3b - 1, 5)$, $Q(8, 4)$, eje y.
d) $P(-6, 2b + 1)$, $Q(2, 7)$, eje x.

13) a) Escribir una ecuación de la recta que pasa por el origen y tiene la misma pendiente que la recta dada por $x - 2y = 5$. Graficar las dos rectas.

b) Ídem para la recta perpendicular a la dada en a).

14) a) Escribir una ecuación de la recta que pasa por el punto (0, 5) y tiene la misma pendiente que la recta dada por $2y - 3x = 5$. Graficar las dos rectas.

b) Ídem para la recta perpendicular a la dada en a).

15) Decidir si las rectas son paralelas y distintas o coincidentes o se cortan en un punto:

$a)\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ $b)\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$ $c)\begin{cases} x + y = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$

$d)\begin{cases} x + 4y = 2 \\ x - 4y = 3 \end{cases}$ $e)\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ 4x + 8y = 2 \end{cases}$ $f)\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

16) Representar los siguientes subconjuntos del plano.

a) $\{(x, y) : y \geq 4x + 1\}$ b) $\{(x, y) : x \leq y \leq 4x\}$

17) Hallar y representar los puntos del plano que verifican:

a) $\{(x, y): x.(y - 1) \geq 0\}$ b) $\{(x, y): x.(y + 2) < 0\}$

18) Dada la ecuación $3x^2 + 3y^2 = 9$.

a) Verificar que representa una circunferencia. Halle sus elementos y represente geométricamente.

b) Verificar que el punto $A(1, \sqrt{2})$ está en la circunferencia.

c) Halle otro punto de la circunferencia que tenga igual abscisa que A.

d) Halle otro punto de la circunferencia que tenga igual ordenada que A.

19) Dada la ecuación $x^2 - 2x + y^2 = 0$.

a) Verificar que representa una circunferencia. Halle sus elementos y represente geométricamente.

b) Verificar que el punto $A(2 + \sqrt{3}, 1)$ está en la circunferencia.

c) ¿Puede hallar otro punto de la circunferencia que tenga igual abscisa que A? ¿y otro que tenga igual ordenada?

20) Hallar, usando valores enteros, soluciones de la ecuación $x = y^2$ donde $-4 \leq y \leq 4$, y graficar.

21) Hallar los elementos de las siguientes cónicas y graficarlas:

a) $x^2 + y^2 = 49$

b) $x^2 + 9y = 0$

c) $x^2 + 2y^2 = 8$

d) $-2y^2 = 8 - x^2$

e) $y = 4 - 2x^2$

f) $3x^2 = 12 - 4y^2$

g) $9x^2 + y^2 = 36$

h) $4x^2 + y^2 = 4$

i) $x^2 + 9y^2 = 4$

j) $x^2 - y^2 = 1$

k) $4y^2 - 9x^2 = 36$

l) $2x^2 + 3y^2 = 24$

m) $4x^2 + 3y = 12$

n) $y^2 - x^2 = 9$

o) $x^2 + y^2 = 49$

p) $x^2 + 9y = 0$

22) Graficar:

a) $y^2 - x^2 = 0$

b) $4x^2 - y^2 = 0$

c) $4x^2 + y^2 = 0$

23) Representar los siguientes subconjuntos del plano.

a) $\{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 25\}$

b) $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq x\}$

24) Determinar si existe algún valor de a, de modo que las rectas dadas en cada apartado sean transversales:

a) $x + a.y = 2$
$x + y = 1$

b) $2x + y = 3$
$a.x + 2y = 1$

c) $3x + y = a$
$3x + y = 4$

25) Resolver los siguientes sistemas e interpretar gráficamente la situación:

a) $(x-1)^2 + y^2 = 4$
$x + y = 1$

b) $2x - y = 4$
$x - 2y = 5$

c) $(x-1)^2 + y^2 = 1$
$x^2 + (y-1)^2 = 1$

d) $x^2 + y^2 = 1$
$y = 2 - x$

e) $x^2 + (y-2)^2 = 4$
$x^2 + y^2 = 4$

26) En los siguientes sistemas, determinar si es posible hallar un valor de a tal que la recta resulte tangente a la circunferencia. Interpretar gráficamente.

a) $x^2 + y^2 = 1/4$
$y = a.x + 1$

b) $x^2 + y^2 = 1$
$x + y = a$

c) $x^2 + (y-1)^2 = a^2$
$y = 3a$

d) $x^2 + y^2 = 4$
$y = a.x$

27) Hallar si es posible un valor de a para que los siguientes sistemas admitan solución única.

a) $y = a.x^2 + x + 2$
$y = a.x + 2$

b) $y^2 = x$
$y = a.(x-1)$

28) Resolver e interpretar geométricamente los siguientes sistemas:

a) $x^2 + y^2 = 49$
$2x - y = 7$

b) $x^2 + 9y = 0$
$x - y = 1$

c) $x^2 + 2y^2 = 8$
$x + 2y = 0$

d) $-2y^2 = 8 - x^2$
$y = 4 - 2x^2$

e) $3x^2 = 12 - 4y^2$
$x + y = 1$

f) $9x^2 + y^2 = 36$
$x^2 - y^2 = 0$

g) $4x^2 + y^2 = 4$

h) $x^2 + 9y^2 = 4$

$y = x^2$ $y = 3x + 1$

29) La orilla interna de una pista de atletismo se describe por la ecuación: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ y el ancho de la pista es d.

Cuando se le pidió a un alumno que dedujera la expresión de la orilla externa de la pista él respondió: $\frac{x^2}{(a+d)^2}+\frac{y^2}{(b+d)^2}=1$. Está bien o mal su respuesta? Justifique la suya.

NOTA:

Otros sistemas de medida de longitud:

Medidas inglesas

1 pulgada = 2,54 cm

1 pie = 12 pulgadas =30,48 cm

1 yarda = 3 pies = 91,44 cm

1 milla (inglesa) = 1.609 m

Medidas marinas

1 milla marina = 1.852 m

1 nudo práctico = 14, 62 m

1 legua = 5.573 m

30) **De lectura**: Las parábolas tienen varias aplicaciones, una de las más importantes es la propiedad de reflexión. Si un espejo es parabólico, un rayo de luz que proceda del foco de la parábola se refleja en él siguiendo una línea recta paralela al eje. Esto también ocurre con los rayos infrarrojos, las ondas de radio y las microondas.

Los reflectores de los faros de un automóvil son parabólicos y su fuente luminosa está en el foco (en realidad son paraboloides, parábolas que giran sobre su eje).

Resolver:

a) Un faro de automóvil tiene un reflector parabólico de 6 pulgadas de diámetro y 3 de profundidad, a qué distancia debe colocarse el bulbo luminoso?

b) Un faro emplea un reflector parabólico de 1 m de diámetro. Qué profundidad debe tener para que la fuente luminosa se coloque a media distancia entre el vértice y el plano del borde.

c) En la línea lateral de un cancha de football se instala un dispositivo para escuchar lo que se dice en el centro de la cancha. Este dispositivo es un plato parabólico con un micrófono en su foco.

El plato tiene 4 pies de diámetro y 16 pulgadas de profundidad (1 pie = 12 pulgadas).

Considerar un sistema de coordenadas con origen en el vértice de la parábola de modo que ésta abra hacia la derecha. Hallar una ecuación de la parábola. En qué punto se debe colocar el micrófono?

31) **De lectura**: Si un cable cuelga bajo su propio peso, no forma un arco de parábola, forma una **catenaria** (de cadena en latín) cuya fórmula es más complicada $\left(y = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2} \right)$; sucede que un cable no tiene uniformemente distribuido su peso en su longitud. Cuando se cuelga un puente de un cable, resulta conveniente que el peso quede uniformemente distribuido en el cable, formando así una parábola. Los arcos de parábola tienen mayor resistencia que otras formas, es así que varias construcciones usan esas formas.

Resolver:

a) Representar $y = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2}$ en el intervalo [– 2, 2].

b) Hacer un gráfico de la siguiente situación: Las torres de un puente colgante están a 500 pies de distancia entre sí y salen a 100 pies de alto respecto de la superficie de la ruta. Los cables principales o *portantes* entre las torres (*pilotes*) llegan a 10 pies de altura de la carretera en el centro del puente. Hay cables verticales de suspensión (*péndolas*) cada 10 pies.

c) Calcular las longitudes de las péndolas distribuidas de a 50 pies.

32) Con los datos del ejercicio 5.5.28, demostrar que hay veces en que Plutón está más cerca del Sol que Neptuno.

33) La Tierra se mueve en órbita elíptica alrededor del Sol y éste está en uno de los focos de esa elipse. La distancia mínima y máxima de la Tierra al Sol son de 91.446.000 millas y 94.560.000 millas respectivamente. ¿Cuál es la excentricidad de la órbita? ¿Cuáles son las longitudes de los semiejes?

34) La órbita del cometa Halley tiene una excentricidad de 0.97 y su semieje mayor mide 2885 millones de km. Deducir una ecuación de su órbita, con centro en el origen y eje mayor contenido en el eje x .

35) Hacer un gráfico de la siguiente situación: Un salón de 10 pies de ancho, tiene el techo semielíptico. Las paredes tienen 10 pies de altura y la bóveda se eleva a 12 pies en su centro.

Determinar una ecuación de la bóveda con el eje x coincidente con la horizontal y el origen con el centro de la elipse.

36) Un cometa tiene una órbita hiperbólica al pasar cerca del Sol y alcanza su *perihelio* (punto más cercano al Sol) en el vértice a 43 millones de millas de él.

Cuando la recta que une al Sol con el cometa es perpendicular al eje transversal de la hipérbola, el cometa está a 137 millones de millas del Sol.

Hacer un gráfico de la situación (en una escala conveniente). Determinar una ecuación de la órbita del cometa, si sitúa el eje *x* conteniendo al transversal y el origen en el centro. Dónde está el Sol?

37) Se ha visto que las partículas alfa apuntadas hacia el núcleo de un átomo son repelidas y siguen una trayectoria hiperbólica.

Se dispara una partícula alfa hacia el núcleo de un átomo, que se considera en el origen de un sistema, desde un punto muy lejano de la recta $y = 2x$. Se desvía siguiendo una trayectoria que tiende a $y = -2x$, y llega hasta 10 angstroms del núcleo.
(1 angstrom = 10^{-10} m)
Hacer un gráfico de la situación (en una escala conveniente)
Deducir una ecuación de la trayectoria de la partícula.

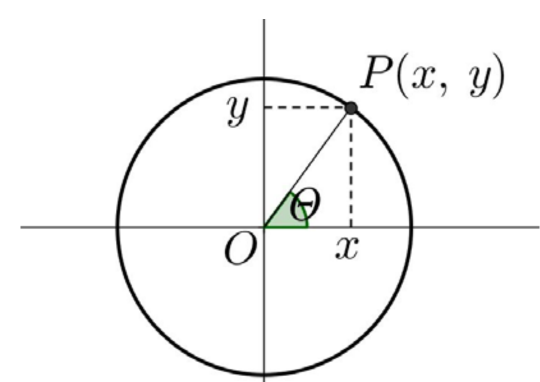
ANEXO: Recordando Trigonometría…

Recordemos que hay definiciones básicas que son una herramienta importante que sirven para medir lados y ángulos de los triángulos. Las fórmulas que relacionan las medidas de los lados y ángulos de un triángulo rectángulo fueron el inicio de esta rama de la Matemática.

Surgieron así las relaciones trigonométricas de **seno, coseno, tangente** entre otras. Luego se extendieron estas relaciones a triángulos en general y luego siguieron definiciones para ángulos de medidas entre 0^0 y 360^0 (que medidos en radianes se corresponden a 0 y 2π , son ángulos cuyas representaciones están dentro de una circunferencia). Posteriormente se extendieron para valores de ángulos cuya medida es un número real cualquiera, dando origen a algunas funciones de dominio contenido en los números reales, que se conocen como funciones trigonométricas y que se estudian y aplican en Análisis Matemático y Física, por ejemplo.

En esta materia usaremos principalmente de las relaciones trigonométricas para ángulos entre 0^0 y 360^0. Se aplicarán en los temas: ecuaciones de rectas, vectores y números complejos.

Consideremos inicialmente un ángulo $\theta,\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, inscripto en una circunferencia, el lado final del ángulo intercepta a la circunferencia en un punto $P(x, y)$:



Se definen entonces:

$$sen\ \theta = \frac{y}{d(O,P)}$$

$$cos\ \theta = \frac{x}{d(O,P)}$$

Estas definiciones están dadas por las relaciones entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo (desde ya que se asume que el triángulo es no degenerado, es decir que existe efectivamente como tal, ninguno de los lados tiene longitud nula). Estas definiciones iniciales se pueden generalizar para cuando x ó y es 0. Si $P(x, y)$ está sobre alguno de los ejes $x = 0$, ó $y = 0$.

Estas relaciones permiten obtener:

$$\begin{cases} x = d(O,P).\cos\theta \\ y = d(O,P).sen\,\theta \end{cases}$$

También se define $\qquad tan\ \theta = \dfrac{y}{x}$.

Para pensar: a) ¿En qué caso NO está definida esta relación?

b) Dibujar un ángulo $\theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ donde $\tan\theta$ no está definida.

c) Explique qué vínculo encuentra entre las tres relaciones definidas.

Si el ángulo θ, $\frac{\pi}{2} \le \theta \le 2\pi$ se definen de igual manera:

$$sen\ \theta = \frac{y}{d(O,P)} \qquad cos\ \theta = \frac{x}{d(O,P)} \qquad \text{y} \qquad tan\ \theta = \frac{y}{x}$$

Desde ya que estos casos de medida de ángulos no permiten la interpretación de los catetos e hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Para pensar: Dibujar un ángulo θ, $\frac{\pi}{2} \le \theta \le 2\pi$ donde $\tan\theta = \frac{y}{x}$ no está definida.

Observaciones importantes:

1) Dado θ, si $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, por propiedades de los triángulos rectángulos es fácil ver que $x \le d(O,P)$ y que $y \le d(O,P)$, por lo cual:

$cos\ \theta = \frac{x}{d(O,P)}$ y $sen\ \theta = \frac{y}{d(O,P)}$ son **números reales menores que 1 y positivos.**

2) Dado θ, si $\frac{\pi}{2} \le \theta \le 2\pi$, por estar el punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia es fácil observar que $|x| \le d(O,P)$ y que $|y| \le d(O,P)$, por lo cual:

$cos\ \theta = \frac{x}{d(O,P)}$ y $sen\ \theta = \frac{y}{d(O,P)}$ son **números reales que poseen valor absoluto menor que 1**

3) Los valores de $tan\ \theta = \frac{y}{x}$ en los ángulos que está definida, es un **número real.** Además para cada número real r, seguro existe un θ tal que $tan\ \theta = r$.

4) **Valores exactos importantes** (que es muy bueno recordar):

$$sen\,0^\circ = 0 \qquad \cos 0^\circ = 1 \qquad sen\ 90^\circ = 1 \qquad \cos 90^\circ = 0$$

$$sen\ 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad sen\ 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

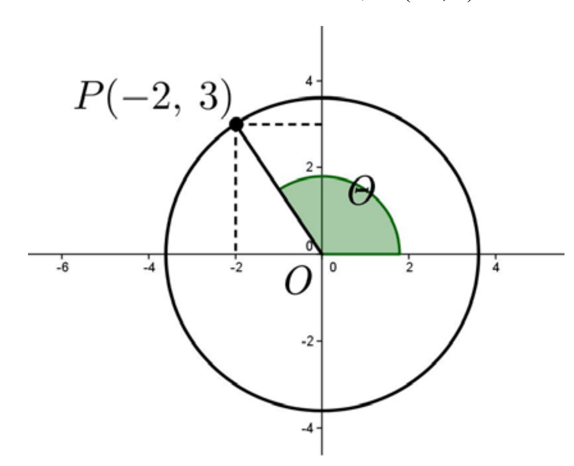
$$sen\ 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Observar que el seno de un ángulo es igual al coseno de su ángulo complementario.
Si $\alpha + \beta = 90^\circ$, α y β se llaman complementarios



EJEMPLO 1:

Dibujar un ángulo θ del segundo cuadrante (es decir que θ, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$) con punto sobre la circunferencia de intersección, $P(-2, 3)$. Veamos cómo son las relaciones trigonométricas:



$$d(O,P) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

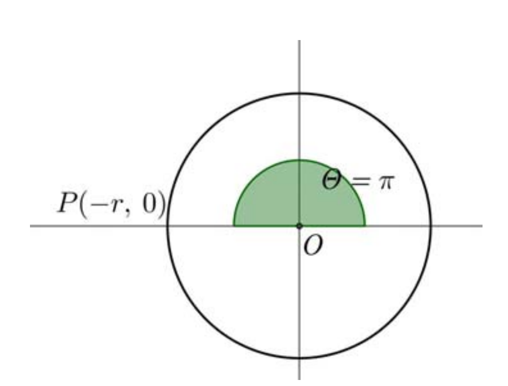
$$sen\ \theta = \frac{y}{d(O,P)} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$cos\ \theta = \frac{x}{d(O,P)} = \frac{-2}{\sqrt{13}} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

y $tan\ \theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$

EJEMPLO 2:

Dibujar un ángulo β de medida π radianes inscripto en una circunferencia de centro en $O(0.0)$ y radio *r.* Y hallar los valores de seno, coseno, tangente.



$$d(O,P) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-r)^2 + 0^2} = \sqrt{r^2} = r$$

$$sen\ \beta = \frac{y}{d(O,P)} = \frac{0}{r} = 0$$

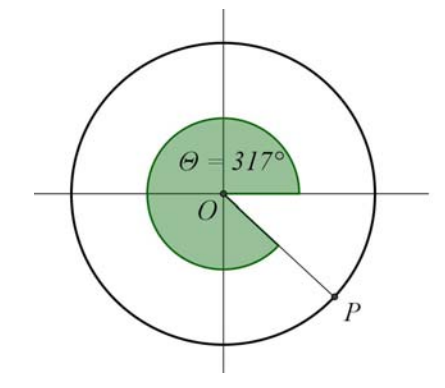
$$cos\ \beta = \frac{x}{d(O,P)} = \frac{-r}{r} = -1$$

y $tan\ \beta = \frac{y}{x} = \frac{0}{-r} = 0$

EJEMPLO 3:

Hallar los valores de seno, coseno, tangente de $\alpha = 317^0$.

Dibujamos aproximadamente un ángulo de 317^0.



El punto en que se corta a la circunferencia es un punto P de abscisa positiva y ordenada negativa.

Como no tenemos esos valores, en este caso para el cálculo se utilizará una calculadora.

Para esta tarea se requiere una **calculadora científica**. Existe esta herramienta también entre las herramientas de Windows.

Sabemos, por la posición del punto P, que el seno es negativo, el coseno es positivo y la tangente es negativa.

$sen\ 317° = -0{,}6819$, $\quad cos\ 317° = 0{,}7313$, $\quad$ y $tan\ 317° = -0{,}9325$

Estos valores son aproximados y en general dependiendo del grado de aproximación que deseemos será el número de cifras decimales a considerar. Por lo general son suficientes cuatro.

EJEMPLO 4:

Hallemos ahora los valores (aproximados) de la abscisa y la ordenada del punto P del ejemplo 3 si se sabe que la distancia desde el origen del sistema de coordenadas *O* a P es 5.

$$\begin{cases} x = d(O,P).cos\ \theta = 5.0,7313 \\ y = d(O,P).\ sen\ \theta = 5.(-0,6819) \end{cases}$$

Por lo tanto: $x = 3{,}6567$ e $y = -3{,}4099$

Con lo cual el punto en cuestión es: $P\left(3,6567;\ -3,4099\right)$

EJERCICIO 5:

a) Hallar las equivalencias entre las medidas de los siguientes ángulos (Se sugiere representar gráficamente...):

45° equivale a .... radianes	π radianes equivale a .... °
60° equivale a .... radianes	$\frac{\pi}{3}$ radianes equivale a ....°
210° equivale a ....radianes	$\frac{3}{5}\pi$ radianes equivale a ....°

b) Hallar los valores de seno, coseno, tangente de los ángulos dados en a).

EJERCICIO 6:

a) Determine el punto $P(-3, -5)$ en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales de origen *O*. Dibuje una circunferencia con centro en *O*. Marque el ángulo α que determina el eje positivo de las abscisas y el segmento $\overline{OP}$.

b) En que cuadrante está el ángulo α?

c) Halle los valores de seno, coseno, tangente de α.

EJERCICIO 7:

En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 134 cm y uno de los ángulos agudos mide 35°. Hallar la medida de los catetos y del otro ángulo.

EJERCICIO 8:

En un triángulo rectángulo, los catetos miden 32,10 cm y 15,30 cm. Hallar la medida de la hipotenusa y el valor de los dos ángulos agudos.

Identidades Fundamentales:

Para todo ángulo α tal que $\cos\ \alpha \neq 0,\ \ tag\ \alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{\cos\ \alpha}$

Para todo ángulo α , $\cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha = 1$

Para todo ángulo α y todo ángulo β , se cumple:

$$\cos\ (\alpha+\beta) = \cos\alpha\,.\cos\beta - sen\,\alpha\,.sen\,\beta$$
$$sen\ (\alpha+\beta) = sen\,\alpha\,.\cos\beta + \cos\alpha\,.sen\,\beta$$

CAPÍTULO 6
Vectores y Aplicaciones a la Geometría

En este Capítulo se generalizará la noción de los vectores o flechas que han usado en la representación de las fuerzas en Física en la escuela secundaria. También de la Física son los ejemplos de velocidad y aceleración, que al igual que las fuerzas involucran dos aspectos: una **intensidad** (la cantidad de fuerza, velocidad o aceleración) y una **dirección**. El otro aspecto para tener en cuenta de estos conceptos físicos es el **sentido**.

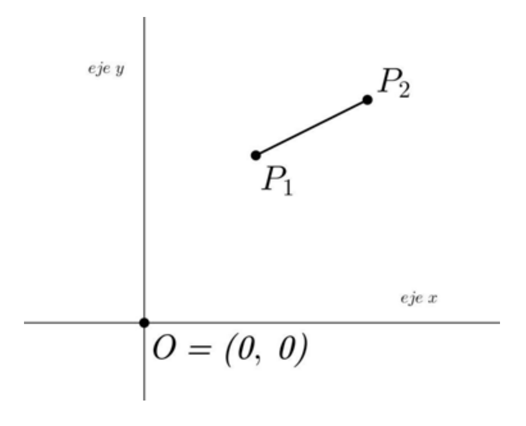
Toda entidad u objeto que involucre esos aspectos (intensidad, dirección y sentido) se llama ***vector***. Cuando representamos un vector por una flecha, la longitud de ella representa su intensidad y la dirección de la flecha la dirección del vector, además al dibujar en la flecha el vértice de la misma indica el sentido en que actúa según esa dirección.

Los números son objetos tales que su magnitud se puede indicar en una escala y es por ello que en este contexto nos referimos a ellos como ***escalares***.

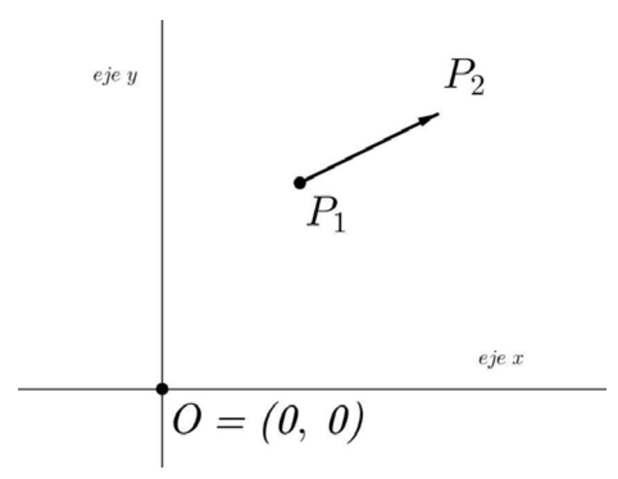
Estudiaremos vectores en el plano y en el espacio. Para ello necesitaremos sistemas de referencia correspondientes a los vectores que tratemos (del plano o del espacio), que son los sistemas de coordenadas cartesianas. Trabajaremos en ambos casos con sistemas de coordenadas ortogonales.

El sistema para el plano es el que ya se vio en el capitulo anterior. Para el espacio (de tres dimensiones) se considerará la intersección de tres planos perpendiculares, lo que originará tres rectas que llamaremos ejes coordenados.

1. Pensando en vectores…



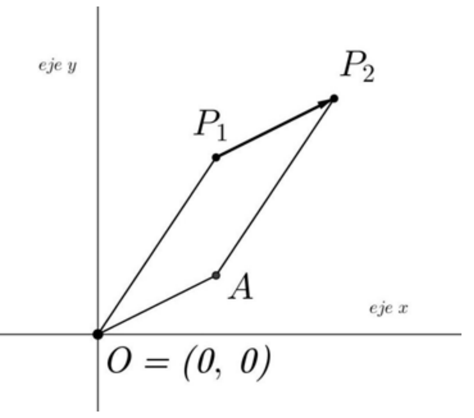
Para dos puntos P_1 y P_2 en el plano, con un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, cuyas respectivas coordenadas son $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, se traza el segmento $\overline{P_1P_2}$ que los une.



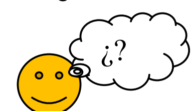
A ese segmento se lo orienta y da un sentido, poniendo **una punta de flecha**, por ejemplo en el punto P_2.

En este caso lo anotaremos $\overrightarrow{P_1P_2}$ y lo llamaremos ***vector con origen en P_1 y extremo final en P_2***.

Sea A otro punto, que Ud. determinará para que $O\,P_1\,P_2\,A$ sea un paralelogramo.

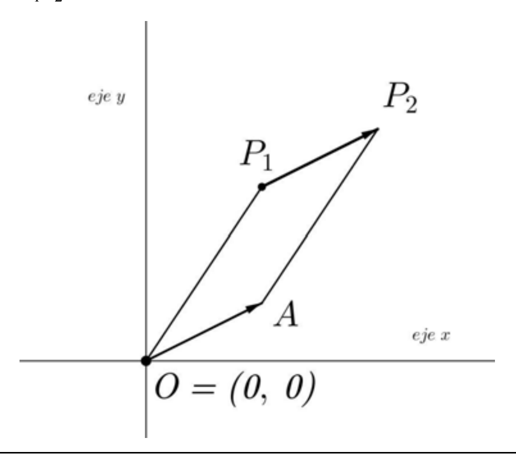


¿Cómo son las longitudes de los segmentos $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{OA}$?



Ya que se ha construido un paralelogramo dichas longitudes son iguales.

Ahora transformemos $\overline{OA}$ en un vector de origen en O. Al vector $\overrightarrow{OA}$ se lo ha construido de igual longitud y sentido que $\overrightarrow{P_1P_2}$.



Llamaremos ***módulo del vector*** $\overrightarrow{P_1P_2}$

y lo anotaremos $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, es decir coincide con la distancia entre los puntos P_1 y P_2.

EJERCICIO 6.1.1

Dibuje al menos 5 flechas con igual sentido que $\overrightarrow{OA}$ y que formen paralelogramos, tal que alguno de sus lados sea $\overrightarrow{OA}$ (como se hizo con $\overrightarrow{P_1P_2}$).

EJERCICIO 6.1.2

a) Dados los puntos P_1 $(1, 3)$ y P_2 $(3, -1)$ repita la construcción anterior. (Es decir siga los pasos hasta la construcción de $\overrightarrow{OA}$).

b) Halle el módulo de $\overrightarrow{P_1P_2}$ y compruebe que coincide con el de $\overrightarrow{OA}$.

c) Dibuje varios vectores con origen distinto de O, que tengan igual sentido y módulo que $\overrightarrow{OA}$.

COMENTARIO: El conjunto de vectores que ha construido en c) se llaman **vectores libres** y son vectores que se llaman ***equivalentes*** entre si.

El concepto de **equivalente** en Matemática se utiliza muy frecuentemente. Su significado es casi igual al cotidiano. Cosas que **no son iguales** pero que pueden **sustituirse entre sí de alguna manera.**

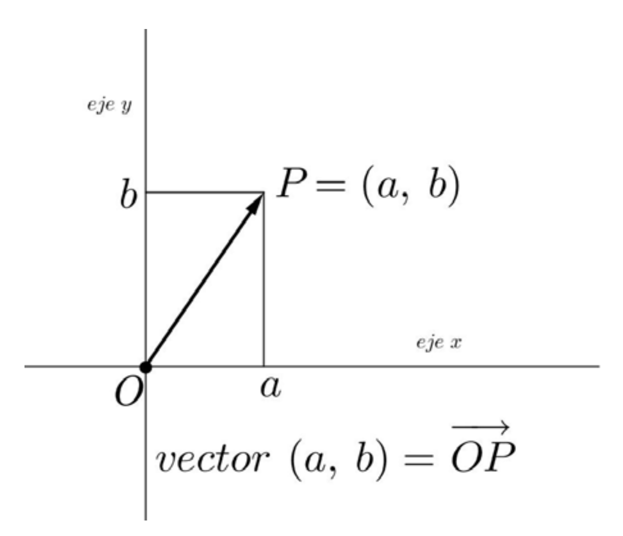
Para profundizar en esta idea puede verse el **Apéndice 2 y el Capítulo 4.**

2. Comencemos por los vectores del plano...

Partimos de la representación de los vectores o flechas en el plano y haremos algunas formalizaciones.

Un plano en el que se ha introducido un sistema de coordenadas se designa por $\mathbb{R}^2$ y en el cual se definirán operaciones como se verá más adelante. Es decir

$$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$$



Este conjunto es el subyacente (que sirve de base o sustento) para la definición de operaciones.

Otra manera de tratar los puntos de $\mathbb{R}^2$ es considerarlos como los extremos de las "fle-

chas" o vectores cuyo origen es el origen del sistema de coordenadas.

Por comodidad o abuso del lenguaje nos referiremos al vector tanto como P, el par (a, b), $\overrightarrow{OP}$ o también por $\vec{v}$.

Además se define para $\vec{v} = (a,b)$ $\vec{u} = (c,d)$ y la **igualdad** se anota

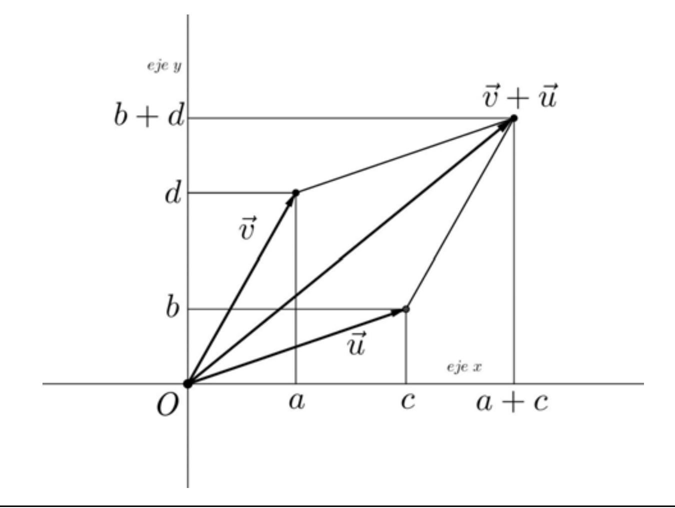
$$\vec{v} = \vec{u} \quad \text{si y sólo si} \quad a = c \ \wedge \ b = d$$

Las operaciones sobre $\mathbb{R}^2$ se definen como sigue:

La ***suma* +** , como:

$\vec{v} = (a,b) \qquad \vec{u} = (c,d)$

$\vec{v} + \vec{u} = (a + c, b + d)$



Así resulta una **operación interna de** $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, es decir dados dos vectores el resultado de sumarlos es un vector.

Y se define el **producto por un escalar .** como:

$$r \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ \vec{v} = (a,b) \in \mathbb{R}^2,$$

$$r \bullet \vec{v} = (r.a \, , r.b)$$

si $r > 0$, *el dibujo nos queda* :

En este dibujo se tomó también $r > 1$

eje y
$r.\vec{v}$
$\vec{v}$
eje x
O
$-r.\vec{v}$

Esta **operación es externa de** $\mathbb{R}$, va de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, es decir: a un número real y a un vector, se le asocia un vector.

EJEMPLO 6.2.1

Si $\vec{v}$ = (2, – 3) y $\vec{u}$ = (7, 9) entonces

$\vec{v}$ + $\vec{u}$ = (2 + 7, – 3 + 9) = (9, 6)

3. $\vec{v}$ + 5. $\vec{u}$ = (3.2 , 3.(– 3)) + (5.7 , 5.9) = (6, – 9) + (35, 45) = (41, 36)

Haga Ud. la representación gráfica.

EJEMPLO 6.2.2

- Si $\vec{v}$ = (2, – 3) y $\vec{o}$ = (0, 0) entonces $\vec{v}$ + $\vec{o}$ = (2 + 0 , – 3 + 0) = (2, – 3),

¿qué opina de $\vec{o}$?

- Si $\vec{v}$ = (2, – 3) y $\vec{u}$ = (– 2, 3) entonces $\vec{v}$ + $\vec{u}$ = (2 + (– 2), – 3 + 3) = (0, 0)

¿Qué relación hay entre $\vec{v}$ y $\vec{u}$? ¿Cómo los puede indicar?

¿Se anima a poner un nombre a $\vec{u}$ respecto de $\vec{v}$?

Efectivamente, el **opuesto**.



- Si $\vec{v}$ = (1, 7) qué ocurre si lo multiplico por 0, por 1 y por – 1?

0. $\vec{v}$ = (0.1, 0.7) = (0, 0)

1. $\vec{v}$ = (1.1, 1.7) = (1, 7)

– 1. $\vec{v}$ = (– 1.1, – 1.7) = (– 1, – 7)

¿Qué puede concluir? ¿Será lo mismo para cualquier vector $\vec{v}$?

Pruebe lo que conjetura a partir de este ejemplo.

EJEMPLO 6.2.3

Para $\vec{v}$ = (2, – 3) y $\vec{u}$ = (– 2, 3), hallar sus módulos:

$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ $\qquad$ $|\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

¿Qué puede concluir?

¿Será lo mismo para cualquier vector $\vec{v}$ y su opuesto $\vec{u}$?

Pruebe lo que conjetura a partir de este ejemplo.

Por la existencia del opuesto se puede definir la resta.
Se anota:

$\vec{v}+(-\vec{u})=\vec{v}-\vec{u}$, es decir la **resta de vectores**

EJERCICIO 6.2.4

a) Demostrar que las propiedades **(A) asociativa, (C) conmutativa, (N) existencia del neutro** y **(O) existencia del opuesto,** valen en la suma definida sobre $\mathbb{R}^2$.

Tome vectores generales y verifique:

(A): $(\vec{v}+\vec{u})+\vec{w}=\vec{v}+(\vec{u}+\vec{w})$

(C): $\vec{v}+\vec{u}=\vec{u}+\vec{v}$

(N): Existe $\vec{O}=(0,0)$ tal que para todo vector $\vec{v}$, $\vec{O}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{O}=\vec{v}$

(O): Para todo vector $\vec{v}$, existe $-\vec{v}$ tal que $-\vec{v}+\vec{v}=\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{O}$

b) Haga la interpretación geométrica de las mismas.

EJERCICIO 6.2.5

a) Demostrar que las propiedades (P1), (P2), (P3) y (P4), valen en el producto por el escalar definido.

(P1): Para todo r y t números reales y todo vector $\vec{v}$, $r.(t.\vec{v})=(r.t).\vec{v}$

(P2): Para todo r número real y todo par de vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$, $r.(\vec{v}+\vec{u})=r.\vec{v}+r.\vec{u}$

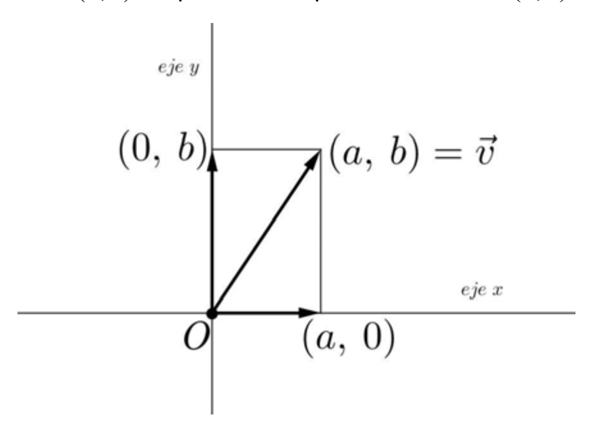
(P3): Para todo vector $\vec{v}$, $1.\ \vec{v}=\vec{v}$

(P4): Para todo r y t números reales y todo vector $\vec{v}$, $(r+t).\vec{v}=r.\vec{v}+t.\vec{v}$

b) Haga la interpretación geométrica de las mismas.
Para ello use vectores de distintos cuadrantes, además reales positivos y reales negativos para tener una idea amplia de la operación.

3. Dos vectores destacados ...

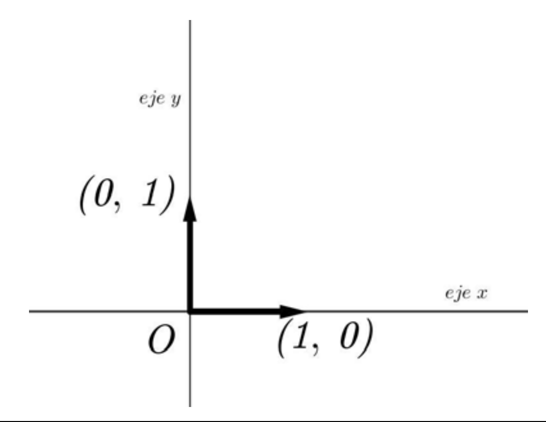
Dado cualquier vector $\vec{v} = (a,b)$, lo podemos expresar como: $\vec{v} = (a,b) = (a,0) + (0,b)$



Además se tiene que

$$(a,0) = a.(1,0)$$
$$(0,b) = b.(0,1)$$

Por lo que resulta que $\vec{v} = (a,b) = a.(1,0) + b.(0,1)$



A estos dos vectores tan especiales, que nos **permiten escribir cualquier vector del plano como combinación de ellos**, los "bautizamos" como:

$$\vec{i} = (1,0) \qquad \vec{j} = (0,1)$$

Decimos que son la **base canónica de** $\mathbb{R}^2$

EJEMPLO 6.3.1

Dado el vector $\vec{v}$ = (2, 5) se puede escribir como $\vec{v} = (2,5) = 2.\vec{i} + 5.\vec{j}$, y para el vector

$\vec{u} = (4,7) = 4.\vec{i} + 7.\vec{j}$.

Es inmediato que para $\vec{v} = (a,b) = a.\vec{i} + b.\vec{j}$ los números a y b que permiten escribir a $\vec{v}$ **son únicos** y se los llama las **coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base** $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

Las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base canónica son 2 y 5, y las de $\vec{u}$ son 4 y 7.

EJERCICIO 6.3.2

Halle los vectores opuestos a $\vec{v}$ y a $\vec{u}$ de 6.3.1 y calcule la suma de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$, y luego sus coordenadas en la base canónica. ¿Qué puede decir? ¿Valdrá en general lo que observa? Justifique.

EJERCICIO 6.3.3

Dados los vectores $\vec{v}$ = (– 1, 0), $\vec{u}$ = (3, – 5), $\vec{w}$ = (0, 4), $\vec{r}$ = (5, – 2)

a) Representarlos y escribirlos como combinación de la base canónica.
b) Hallar los vectores 3. $\vec{v}$, – 5. $\vec{u}$. Representarlos y escribirlos como combinación de la base canónica. ¿Qué observa de las coordenadas?
c) Hallar los vectores 4. $\vec{w}$, – 2. $\vec{r}$. Representarlos y escribirlos como combinación de la base canónica. ¿Qué observa de las coordenadas?
d) Hallar los vectores 2. $\vec{v}$ – 3. $\vec{u}$, 4. $\vec{w}$ + 3. $\vec{r}$. Representarlos y escribirlos como combinación de la base canónica. ¿Cuáles son las coordenadas en $\{\vec{i}, \vec{j}\}$?

EJERCICIO 6.3.4

Dados los vectores $\vec{v}$ = – 1. $\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{w}$ = (0, 4) , $\vec{r}$ = 5. (5, – 2)

a) Representarlos y escribirlos como combinación de la base canónica.
b) Hallar los vectores 3. $\vec{v}$ – $\vec{w}$ + $\vec{r}$. Representarlos y escribirlos como combinación de la base canónica. ¿Qué observa de las coordenadas?
c) Hallar el vector $\vec{x}$ si sabe que 3. $\vec{x}$ + 2. $\vec{v}$ = 4. $\vec{w}$ – $\vec{r}$
d) Hallar el vector opuesto a $\vec{v}$ + $\vec{w}$.
e) Hallar $\vec{x}$ si 2. $\vec{x}$ + 5. $\vec{r}$ = – 15. $\vec{w}$
f) Hallar ½ . $\vec{x}$, si 7. $\vec{x}$ – 9. $\vec{r}$ = 4. ($\vec{v}$ – $\vec{w}$)



EJERCICIO 6.3.5:

a) Hallar los módulos de los vectores del ejercicio 6.3.4.

b) Hallar el módulo del vector $\frac{1}{|\vec{v}|}\cdot\vec{v}$ y $\frac{1}{|\vec{w}|}\cdot\vec{w}$ para $\vec{v}$ y $\vec{w}$ de 6.3.4

c) Lo que resultó en b) ¿será un caso particular o valdrá para cualquier vector del plano?

4. Sigamos con los vectores del espacio...

Ahora se tratarán las "flechas" que se encuentran en el espacio.

Para referirnos a ellas se hará un tratamiento similar al realizado anteriormente para los vectores del plano.

Un sistema de referencia...

Para ubicar y determinar un punto del espacio usual respecto de otro punto se necesitan dar tres valores de referencia: como difiere en "el ancho", en "el largo" y en "el alto". Por ello es que ahora un sistema de referencia debe tener tres ejes coordenados, que se obtienen como la intersección dos a dos de tres planos, llamados **planos coordenados**.

Se verá el caso en que estos planos al cortase forman ángulos rectos. Así se construye el **sistema de coordenadas cartesianas ortogonal**.

Estas intersecciones dividen al espacio en 8 regiones, cada una de las cuales llamada **octante.**

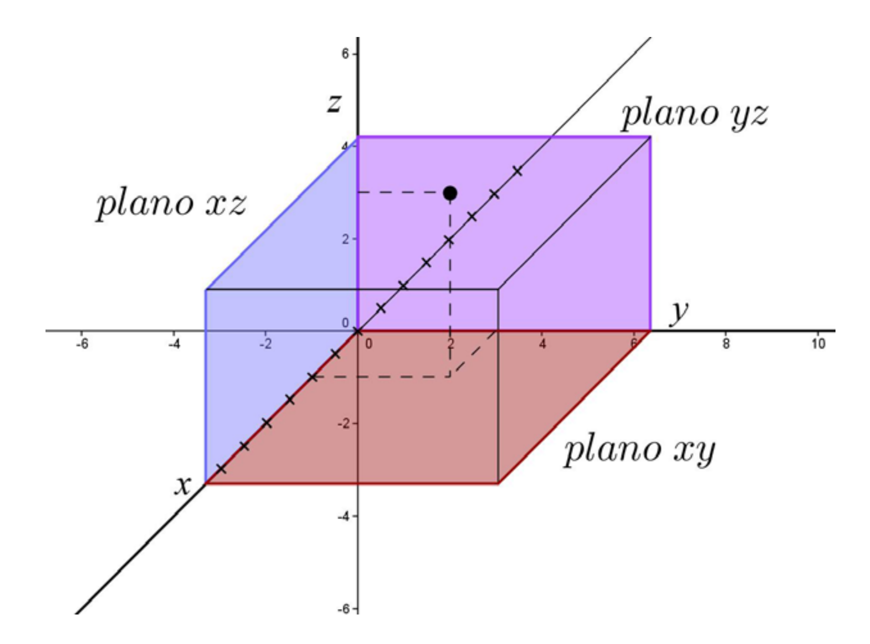
En el caso del plano las coordenadas se llaman habitualmente x e y. En el espacio las coordenadas se llaman x, y y z.

Los planos coordenados se denominan **plano *xy*, plano *xz*** y **plano *yz*.**

Los ejes se obtienen como intersección de cada dos de ellos. Los tres se cortan en un punto: **origen del sistema.**

La recta intersección del plano xy con el plano xz, se llama *eje x,* la recta intersección del plano xz con el plano yz, se llama *eje y,* y la recta intersección del plano yz con el plano xz, se llama *eje z.*

El diagrama siguiente ilustrará lo explicado sobre la intersección de los planos:

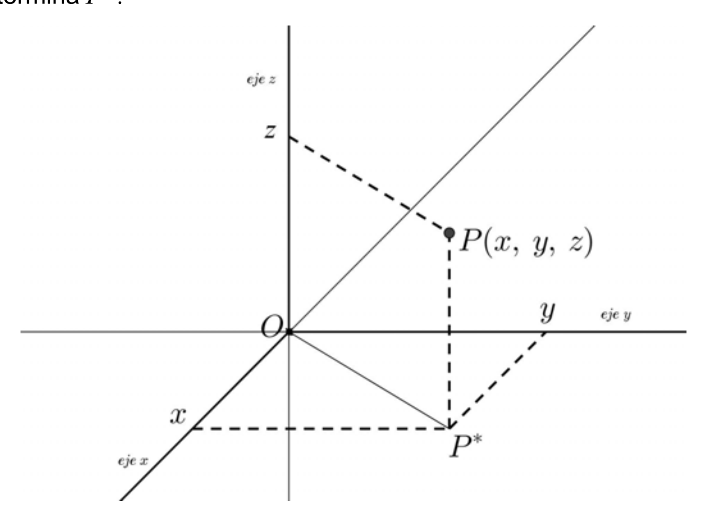


En la figura se puede apreciar una vista del primer octante y de un punto en él. En este caso se ha marcado el punto (2, 3, 3).

En este esquema para dar idea de volumen, se han dibujado planos limitándolo.

Los ejes coordenados son similares a los del plano. Son rectas graduadas.

Una forma de determinar las coordenadas de un punto P, se proyecta el punto sobre el plano xy. Así se determina P^*.

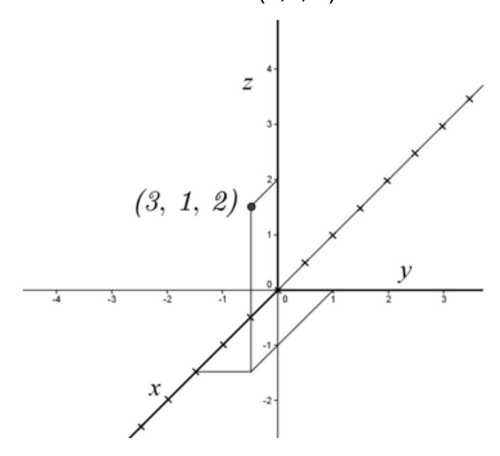


Las proyecciones de P^* sobre los ejes x e y (paralelamente al otro eje) dan los valores de x y de y asociados a P^*.

Para obtener el valor de z, se proyecta P sobre el eje z paralelamente al plano xy, lo que resulta paralelo al segmento OP^*.

EJEMPLO 6.4.1

Dibujar un punto P de coordenadas cartesianas (3,1, 2).



EJERCICIO 6.4.2

Dibujar en un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal para el espacio, los puntos de coordenadas (1,1, 0), (3, – 1, 2), (– 1, 0, 1), (5, 5, 5), (0, 0, 3), (2, 0, 0), (0, – 2, – 3).

Camino a los vectores...

La motivación sigue siendo las "flechas" de la Física, por ejemplo las fuerzas.

El espacio en el que se ha introducido un sistema de coordenadas se designa por $\mathbb{R}^3$, en el cual se definirán operaciones como se verá más adelante. Es decir

$$\mathbb{R}^3 = \{(a,b,c) : a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}\}$$

Este es el conjunto subyacente (que sirve de base o sustento) para la definición de operaciones.

Otra forma de tratar los puntos de $\mathbb{R}^3$ es considerarlos como los extremos de las "flechas" o **vectores** cuyo origen es el origen del sistema de coordenadas.

También por comodidad o abuso de lenguaje nos referiremos al vector tanto como P, la terna (*a* ,*b* ,*c*), $\overrightarrow{OP}$ o también por $\vec{v}$.

Realice usted la interpretación geométrica de lo dicho.

Además se define para $\vec{v} = (a,b,c)$ $\vec{u} = (d,e,f)$ la **igualdad** y se anota

$$\vec{v} = \vec{u} \quad \text{si y sólo si} \quad a = d \ \wedge \ b = e \ \wedge c = f$$

Como en el caso planario se pueden definir para $\mathbb{R}^3$ las operaciones de suma y producto por el escalar como sigue:

La **suma +** por:

$$\vec{v} = (a,b,c) \qquad \vec{u} = (d,e,f)$$
$$\vec{v} + \vec{u} = (a+d, b+e, c+f)$$

Así resulta una **operación interna** de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Dados dos vectores, al sumarlos obtenemos un vector, por la definición de suma.

El **producto por un escalar .** como:

$$r \in \mathbb{R} \text{ y } \vec{v} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ es } \quad r \cdot \vec{v} = (r.a, r.b, r.c)$$

Esta **operación es externa de** $\mathbb{R}$. A un número real y a un vector se le asocia un vector, va de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 6.4.3

Si $\vec{v}$ = (2, – 3, 3) y $\vec{u}$ = (7, 9, 5) entonces

$\vec{v}$ + $\vec{u}$ = (2 + 7, – 3 + 9, 3 + 5) = (9, 6, 8)

3. $\vec{v}$ + 5. $\vec{u}$ = (3.2 , 3.(– 3) , 3.3) + (5.7 , 5.9 , 5.5) = (6, – 9, 9) + (35, 45 , 25) =
= (41, 36, 34)

Haga Ud. la representación gráfica.

EJEMPLO 6.4.4

- Si $\vec{v}$ = (2, – 3, 3) y $\vec{o}$ = (0, 0, 0) entonces $\vec{v}$ + $\vec{o}$ = (2 + 0 , – 3 + 0, 3 + 0) = (2, – 3, 3), ¿qué opina de $\vec{o}$?
- Si $\vec{v}$ = (2, – 3, 3) y $\vec{u}$ = (– 2, 3, – 3)

entonces $\vec{v}$ + $\vec{u}$ = (2 + (– 2), – 3 + 3, 3 + (– 3)) = (0, 0, 0)

¿Qué relación hay entre $\vec{v}$ y $\vec{u}$? Se dirá que $\vec{u}$ es el **opuesto** de $\vec{v}$. ¿Cómo los puede indicar?

¿De acuerdo? Justifique el nombre.

- Si $\vec{v}$ = (1, 8, 7) ¿qué ocurre si lo multiplico por 0, por 1 y por – 1?

0. $\vec{v}$ = (0.1, 0.8, 0.7) = $\vec{o}$; 1. $\vec{v}$ = 1. (1, 8, 7) = $\vec{v}$ y

– 1. $\vec{v}$ = – 1. (1, 8, 7) = (– 1.1, – 1.8, – 1.7) = $-\vec{v}$

También en $\mathbb{R}^3$ generalice los resultados de estos ejemplos...

Por la existencia del opuesto de todo vector, se puede definir la resta.

Anotaremos:

$\vec{v} + (-\vec{u}) = \vec{v} - \vec{u}$, como la ***resta*** de vectores en $\mathbb{R}^3$

EJERCICIO 6.4.5

a) Demostrar que las propiedades **(A), (C), (N)** y **(O)** dadas en el ejercicio 6.2.4**,** ahora valen para la suma definida sobre $\mathbb{R}^3$.

b) Haga la interpretación geométrica de las mismas.

EJERCICIO 6.4.6

a) Demostrar que las propiedades (P1), (P2), (P3) y (P4) dadas en el ejercicio 6.2.5, ahora valen en el producto por el escalar definido para $\mathbb{R}^3$

b) Haga la interpretación geométrica de las mismas.

De manera natural se generalizan los conceptos de ***segmentos dirigidos*** determinados por puntos del espacio y todo lo relacionado con la equivalencia definida sobre ellos. Los puntos tienen en esta situación tres coordenadas.

La ***magnitud*** de un segmento $\overline{PQ}$, o ***magnitud*** o ***módulo*** del segmento dirigido o vector $\overrightarrow{PQ}$

$$\left|\overline{PQ}\right| = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \text{ siendo } P(x_1, y_1, z_1) \text{ y } Q(x_2, y_2, z_2).$$

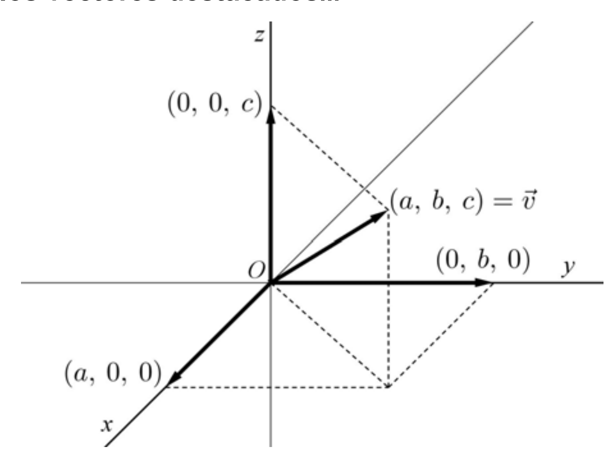
Esto generaliza la noción de distancia entre dos puntos, para puntos de $\mathbb{R}^3$.

Así entonces si el vector es $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$, su módulo es: $\left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Si el módulo de un vector $\vec{v} = (a, b, c)$ del espacio vale 1, se dice que el **vector es unitario.**

De igual manera se dice **unitario** un **vector del plano** cuyo módulo es 1.

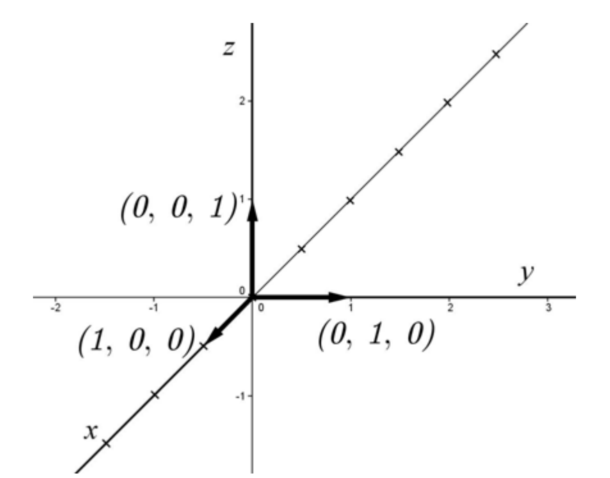
Ahora son tres los vectores destacados...



Dado cualquier vector $\vec{v}=(a,b,c)$, se puede expresar como

$$\vec{v}=(a,b,c)=(a,0,0)+(0,b,0)+(0,0,c)$$

Y se tiene que



$$(a,0,0)=a.(1,0,0)$$
$$(0,b,0)=b.(0,1,0)$$
$$(0,0,c)=c.(0,0,1)$$

Luego resulta:

$$\vec{v}=(a,b,c)=a.(1,0,0)+b.(0,1,0)+c.(0,0,1)$$

A estos tres vectores especiales que nos ***permiten escribir cualquier vector del espacio como combinación de ellos*,** los "bautizamos" con:

$$\vec{i}=(1,0,0) \qquad \vec{j}=(0,1,0) \qquad \vec{k}=(0,0,1)$$

Decimos que son la **base canónica** de $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 6.4.7

Dado el vector $\vec{v}$ = (2, 5, 4) se puede escribir como $\vec{v}=(2,5,4)=2.\vec{i}+5.\vec{j}+4.\vec{k}$, y para el vector $\vec{u}=(4,7,-3)=4.\vec{i}+7.\vec{j}+(-3).\vec{k}$.

Es inmediato que para $\vec{v} = (a, b, c) = a.\vec{i} + b.\vec{j} + c.\vec{k}$ los números a, b y c que permiten escribir a $\vec{v}$ son únicos y se los llama **las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base** $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base canónica son 2, 5 y 4, y las de $\vec{u}$ son 4, 7 y – 3.

Halle los vectores opuestos a $\vec{v}$ y a $\vec{u}$, y calcule la suma de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ y luego dé sus coordenadas en la base canónica. ¿Qué se puede decir? ¿Será en general lo que observa?

EJERCICIO 6.4.8

Dados los vectores $\vec{v}$ = (– 1, 0, 0), $\vec{u}$ = (6, 3, – 5), $\vec{w}$ = (0, 0, 4), $\vec{r}$ = (5, – 2, 2)

a) Representarlos y escribirlos como combinación de la base canónica. Hallar sus módulos
b) Hallar los vectores 3. $\vec{v}$, – 5. $\vec{u}$. Representarlos y escribirlos como combinación de la base canónica. ¿Qué observa de las coordenadas?
c) Hallar los vectores 4. $\vec{w}$, – 2. $\vec{r}$. Representarlos y escribirlos como combinación de la base canónica. ¿Qué observa de las coordenadas?
d) Hallar los vectores 2. $\vec{v}$ – 3. $\vec{u}$, 4. $\vec{w}$+ 3. $\vec{r}$. Representarlos y escribirlos como combinación de la base canónica. ¿Cuáles son las coordenadas en $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$?

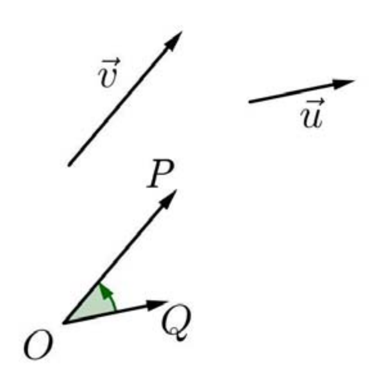
EJERCICIO 6.4.9

a) Represente en $\mathbb{R}^3$ el vector de coordenadas 5, 6 y – 9 en la base canónica.
b) Expresar como terna el vector $\vec{v} = -\vec{i} + 3.\vec{j} + 2.\vec{k}$ y representar.
c) Expresar como terna el vector $\vec{u} = -2.\vec{i} + 3.\vec{j}$ y representar.
d) Expresar como terna el vector $\vec{w} = -.\vec{i} - .\vec{k}$ y representar.
e) Hallar y representar el vector $\vec{r}$ si se verifica que 3. $\vec{r}$ – $2.\vec{i} + 3.\vec{j}$ = $-5.\vec{i} + 3.\vec{j} + \vec{k}$
f) Para cada uno de los vectores dados halle el módulo.

5. Producto escalar de vectores

Vamos a estudiar un producto entre vectores, que dará un número real y permite hacer algunas mediciones entre distintos aspectos de los vectores que intervienen en ese producto.

Dados dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$ no nulos, se considera un punto O y puntos P y Q de modo que $\vec{v}$ y $\overrightarrow{OP}$ son "equivalentes" y $\vec{u}$ y $\overrightarrow{OQ}$ son "equivalentes". Ahora $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ están aplicados ambos a un punto común O.



El ángulo θ determinado por los vectores fijos $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OP}$ no depende de la elección del punto O, sólo depende de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Se denomina **ángulo entre** $\vec{u}$ **y** $\vec{v}$.

Este ángulo queda unívocamente determinado si se considera que debe cumplir $0 \leq \theta \leq \pi$.

Observar que las consideraciones anteriores y la definición de ángulo entre vectores es independiente que los vectores estén en el plano o el espacio.

Se define un concepto vectorial que permite calcular el ángulo entre dos vectores usando las componentes de ellos.

Para cada par de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se asocia un número real llamado **producto escalar** o **producto interior,** indicado por $\vec{u} \, . \, \vec{v}$ que es determinado por

$$\vec{u} \, . \, \vec{v} = \left|\vec{u}\right| . \left|\vec{v}\right| .\cos\theta$$

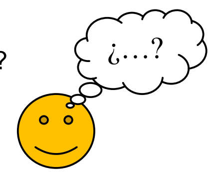
Donde:

$\left|\vec{u}\right|$ es el módulo de $\vec{u}$,

$\left|\vec{v}\right|$ es el modulo de $\vec{v}$

y θ es el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Pensemos: ¿Cuánto vale el producto escalar entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$, si $\vec{u}$ = $\vec{v}$?



Podemos enunciar la propiedad:

♦ PROPIEDAD 6.5.1

Sea $\vec{u}$ un vector, siempre se cumple que: $\vec{u}.\vec{u} = \left|\vec{u}\right|^2$

Demostración:

Por definición $\vec{u}.\vec{u} = \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{u}\right|.\cos\theta$

Como el ángulo $\theta = 0°$, por lo tanto:

$$\vec{u}.\vec{u} = \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{u}\right|.\cos 0° = \left|\vec{u}\right|^2$$

♦

Por convención θ es de 90° si alguno de los vectores es nulo.

Recordar que la longitud o módulo de un vector es igual para todos los segmentos dirigidos equivalentes.

Por lo tanto si se considera O en el origen del sistema de coordenadas, los puntos Q y P de respectivas coordenadas (a, b, c) y (d, e, f) se tiene que:

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

y $$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{d^2 + e^2 + f^2}$$

en el caso de vectores del espacio (haga Ud. la comprobación...)

Para el caso de vectores del plano las coordenadas de los puntos Q y P sean pares ordenados (a, b) y (c, d) respectivamente, así resulta que

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{a^2+b^2} \text{ y } \left|\vec{v}\right| = \sqrt{c^2+d^2}.$$

Claramente el producto interno entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se anula si $\vec{u}=\vec{0}$, $\vec{v}=\vec{0}$ ó $\cos\theta = 0$.

Por esto, dos vectores se dicen **perpendiculares** u **ortogonales** si el producto interno entre ellos es 0.

Probaremos algunos resultados importantes sobre el producto escalar, además de muy práctico.

Pues de acuerdo a la definición para calcularlo, tendríamos que poder determinar el ángulo entre los vectores, cosa que no resulta sencilla y desde ya no exacta en la mayoría de los casos.

♦ TEOREMA 6.5.2

La expresión del producto interno o escalar por medio de las componentes de los vectores es la siguiente:

Para $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del espacio dados por (a, b, c) y (d, e, f)

$$\textbf{(1)} \qquad \vec{u}\,.\,\vec{v} = a.\,d + b.\,e + c.\,f$$

Para $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del plano dados por (a, b) y (c, d)

$$\textbf{(2)} \qquad \vec{u}\,.\,\vec{v} = a.\,c + b.\,d$$

Idea de la demostración: (se hará en el espacio y quedará para el lector hacerla para el plano)

Es claro que si alguno de los vectores es nulo ambos miembros de **(1)** son 0. Supongamos que $\vec{u}$ es nulo, $\vec{u}=(0,0,0)$

Luego

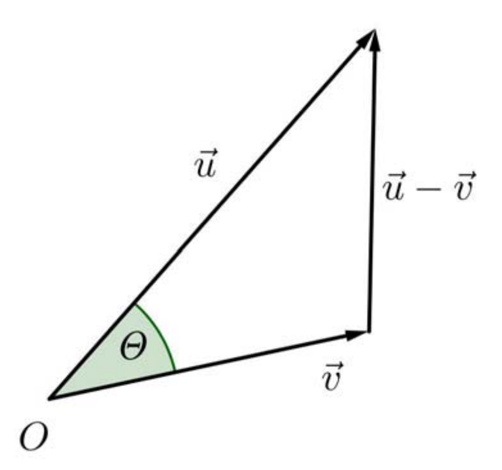
$$\vec{u}.\vec{v} = \left|(0,0,0)\right|.\left|(d,e,f)\right|.\cos\theta = 0.\left|(d,e,f)\right|.\cos\theta = 0$$

Y también:

$$\vec{u}.\vec{v} = 0.d + 0.e + 0.f = 0$$

Consideremos el caso que ambos vectores son no nulos.

Sin pérdida de generalidad, por la "equivalencia" introducida entre los vectores, se puede considerar que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ están fijos en un origen O, y considerar un triángulo como en la figura.



Usando el **teorema del coseno** (es un resultado de trigonometría que generaliza el teorema de Pitágoras) y definición del producto interno resulta:

$$\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2 = \left|\vec{u}\right|^2 + \left|\vec{v}\right|^2 - 2.\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|\cos\theta = \left|\vec{u}\right|^2 + \left|\vec{v}\right|^2 - 2.\vec{u}.\vec{v} \qquad \textbf{(1)}$$

Como estamos trabajando en el espacio, considerando la fórmula de distancia y la definición de módulo de vectores, se tiene:

$$\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2 = \left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = (d-a)^2 + (e-b)^2 + (f-c)^2$$

Haciendo cuentas y conmutando convenientemente, obtenemos:

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 - 2\,a.d - 2\,b.e - 2\,c.f$$

Además $\left|\vec{u}\right|^2 = a^2 + b^2 + c^2$ y $\left|\vec{v}\right|^2 = d^2 + e^2 + f^2$. Por lo que reemplazando nos queda:

$$\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2 = \left|\vec{u}\right|^2 + \left|\vec{v}\right|^2 - 2.(a.d + b.e + c.f) \qquad \textbf{(2)}$$

Igualando las expresiones de **(1)** y **(2)** tenemos que:

$$\left|\vec{u}\right|^2 + \left|\vec{v}\right|^2 - 2.\vec{u}.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|^2 + \left|\vec{v}\right|^2 - 2.(a.d + b.e + c.f)$$

que simplificando:

$$\vec{u}.\vec{v} = a.d + b.e + c.f$$

Quedando demostrada la propiedad.

♦

EJERCICIO 6.5.3

Realice la demostración del teorema 6.5.2 para el caso de vectores del plano.

EJEMPLO 6.5.4

Hallar el producto escalar entre los vectores $\vec{u} = (2, 1, 4)$ y $\vec{v} = (0, 3, 5)$

Por lo demostrado en 6.5.2, $\vec{u} \,.\, \vec{v} = 2.\,0 + 1.\,3 + 4.\,5 = 0 + 3 + 20 = 23$

Como el producto es no nulo los vectores no son ortogonales.

El coseno del ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ está dado por

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|} = \frac{23}{\sqrt{4+1+16}.\sqrt{0+9+25}}$$

y haciendo cuentas $\cos\theta = \dfrac{23}{\sqrt{21}.\sqrt{34}}$.

Para hallar el ángulo θ se calcula el arco coseno de $\dfrac{23}{\sqrt{21}.\sqrt{34}}$.

Es así que θ es aproximadamente igual a *arco coseno* 0,86.

Luego θ es aproximadamente:

30,68° = 30° 41´

Haga la representación gráfica de los vectores y compruebe que el ángulo entre ellos es aproximadamente el hallado.

EJERCICIO 6.5.5

¿Puede decirse que los vectores de la base canónica del plano son perpendiculares dos a dos? ¿Y los de la base del espacio? Puede comprobarlo como aplicación del producto escalar.

EJERCICIO 6.5.6

Hallar el producto escalar entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y el ángulo entre ellos. Realizar la interpretación gráfica, siendo los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

a) $\vec{u} = (-2, 3)$ y $\vec{v} = (3, 2)$

b) $\vec{u} = (0, 3, 1)$ y $\vec{v} = (2, -3, 1)$

c) $\vec{u} = (2, 4)$ y $\vec{v} = (6, 8)$

d) $\vec{u} = (1, -2)$ y $\vec{v} = (0, 2)$

e) $\vec{u} = (-2, 3, 8)$ y $\vec{v} = (3, 2, -1)$

f) $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (-3, -6, -9)$

Aplicaciones geométricas y propiedades

EJERCICIO 6.5.7

Hallar un número a para que los vectores $\vec{u}=3\vec{i}+2\vec{j}-8\vec{k}$ y $\vec{v}=5\vec{i}+a\,\vec{j}-8\vec{k}$ sean perpendiculares.

EJERCICIO 6.5.8

Sean P, Q y R puntos con coordenadas (1, 3, 5), (2, 0, 4) y (2, 1, 0) respectivamente. Representarlos. Hallar los ángulos interiores del triángulo determinado por ellos. (Es posible que por la aproximación de los cálculos la suma de los tres no sea 180°...)

EJERCICIO 6.5.9

Demostrar: En un paralelogramo las diagonales tienen la misma longitud si y sólo si el paralelogramo es un rectángulo.

EJERCICIO 6.5.10

Demostrar las siguientes propiedades del producto escalar.

a) Para todo par de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

b) Para todo par de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y k número real entonces $(k.\vec{u}) \cdot \vec{v} = k.\ \vec{v} \cdot \vec{u}$

Para pensar : ¿ Por qué podemos asegurar que los productos que aparecen en este inciso, señalados ambos con ., no representan el mismo producto? Justifique claramente.

c) Para toda terna de vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

(Idea para la demostración, usar la expresión en coordenadas y además pensar en la interpretación geométrica de la definición.)

Más Propiedades (Importantes)

♦ PROPIEDAD 6.5.11

Desigualdad de Schwarz: Dados vectores cualesquiera $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vale la siguiente desigualdad:

$$\left|\vec{u}\ .\ \vec{v}\right| \le \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$$

Demostración:

Por la definición de producto escalar : $\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\theta$, tenemos que :

$$\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\theta \le \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\left|\cos\theta\right|$$

Como $\cos\theta$ es una función trigonométrica que toma valores reales en el intervalo [– 1, 1], resulta:

$\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\left|\cos\theta\right| \le \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$ luego, tomando valor absoluto:

$$\left|\vec{u}\ .\ \vec{v}\right| \le \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$$

♦

♦ PROPIEDAD 6.5.12

Desigualdad Triangular: Dados vectores cualesquiera $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vale la siguiente desigualdad:

$$\left|\vec{u}+\vec{v}\right| \le \left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|$$

Demostración:

Calcularemos $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2$. Por propiedades demostradas antes (6.5.1 y 6.5.10), tenemos que:

$$\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2 = \left(\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = \vec{u}.\vec{u}+\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v}$$

Luego, podemos escribir: $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2 = \vec{u}.\vec{u}+\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|^2 + 2.\vec{u}.\vec{v} + \left|\vec{v}\right|^2$

$\vec{u}.\vec{v}$ es un número real y por lo tanto cumple que : $\vec{u}.\vec{v} \le \left|\vec{u}.\vec{v}\right|$, es decir :

$$\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2 = \left|\vec{u}\right|^2 + 2.\vec{u}.\vec{v} + \left|\vec{v}\right|^2 \le \left|\vec{u}\right|^2 + 2.\left|\vec{u}.\vec{v}\right| + \left|\vec{v}\right|^2$$

que por la Desigualdad de Schwarz probada antes, se puede reescribir como:

$$\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2 \le \left|\vec{u}\right|^2 + 2.\left|\vec{u}.\vec{v}\right| + \left|\vec{v}\right|^2 \le \left|\vec{u}\right|^2 + 2.\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right| + \left|\vec{v}\right|^2 = \left(\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\right)^2$$

Como en esta última expresión, la desigualdad se da entre cuadrados de módulos, que son números positivos, podemos tomar raíz cuadrada y quedará:

$$\left|\vec{u}+\vec{v}\right| \le \left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|$$

♦

EJERCICIO 6.5.13

Hallar el ángulo entre una arista y la diagonal de un cubo.

(Idea: haga coincidir un vértice con el origen del sistema de coordenadas cartesiano ortogonal)

EJERCICIO 6.5.14

a) Probar que si $\vec{v}=(a, b, c)=a\hat{\imath} + b.\vec{j} + c.\vec{k}$ entonces $a=\vec{v}.\hat{\imath}$ $b=\vec{v}.\vec{j}$ $c=\vec{v}.\vec{k}$

b) Calcular la expresión de los cosenos de los ángulos entre $\vec{v}$ y los vectores de la base canónica. Estos ángulos se llaman **ángulos directores** del vector $\vec{v}$ y los cosenos de ellos **cosenos directores**.

c) Hallar un vector unitario paralelo a $\vec{v}$ y expresarlo usando b) y a).

d) Demostrar que la suma de los cuadrados de los cosenos directores de cualquier vector es 1.

e) Probar lo análogo para vectores del plano.

EJERCICIO 6.5.15

Encontrar un vector $\vec{v}$ de módulo 10 y tal que $\vec{v}.\vec{\imath} = \vec{v}.\vec{j} = \vec{v}.\vec{k}$

6. Producto vectorial (obvio: de vectores)

Este producto está definido para pares de vectores del espacio y asocia otro vector del espacio.

Dados dos vectores del espacio $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con componentes (a, b, c) y (d, e, f) respectivamente, se define el **producto vectorial** de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$ como el vector

$$\vec{u} \times \vec{v} = (b. f - e. c, d. c - a . f, a. e - d. b)$$

Una **manera práctica de encontrar y recordar el producto vectorial** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con componentes (a, b, c) y (d, e, f) respectivamente es fabricar el siguiente cuadro y calcularlo como un determinante 3x3, en el **Anexo 2** se completa esta idea de determinante 3x3, por la primera fila:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}\vec{k}$$

Se dirá como se calcula lo planteado:

Para cada $\begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix}$ se calcula de la siguiente manera $\begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} = x.t - z.y$,

Este procedimiento será más práctico para realizar todos los cálculos de producto vectorial.

EJEMPLO 6.6.1

Hallar los productos vectoriales de los vectores de la base canónica tomados de a dos.

Los vectores son $\vec{i} = (1,0,0)$ $\quad \vec{j} = (0,1,0)$ $\quad \vec{k} = (0,0,1)$

Hay varios productos a realizar:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}.\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}.(0.0 - 1.0) - \vec{j}(1.0 - 0.0) + \vec{k}(1.1 - 0.0) = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}.(0.0 - 0.1) - \vec{j}(0.0 - 1.0) + \vec{k}(0.0 - 1.1) = -\vec{k}$$



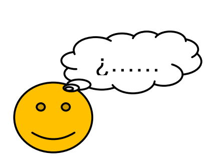
Este ejemplo ya ilustra que el producto vectorial **NO es conmutativo**.

$$\vec{i} \times \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}.\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}.(0.1 - 0.0) - \vec{j}(1.1 - 0.0) + \vec{k}(1.0 - 0.0) = -\vec{j}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}.(0.0 - 0.1) - \vec{j}(0.0 - 1.1) + \vec{k}(0.0 - 1.0) = \vec{j}$$



Observar que el vector producto vectorial resulta perpendicular a cada uno de los factores...

¿Será siempre igual?

EJERCICIO 6.6.2

Resuelva los otros productos que faltan y compruebe que

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

EJERCICIO 6.6.3

Hallar los productos vectoriales de $\vec{u}$ y de $\vec{v}$ para:

a) $\vec{u} = (3, 4, 0)$ y $\vec{v} = (2, -1, 3)$

b) $\vec{u} = (2, 4, -1)$ y $\vec{v} = (1, 6, 0)$

c) Comprobar que $\vec{u}$ x $\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$. (Pista: recordar las propiedades del producto escalar)

En general...

EJERCICIO 6.6.4

Demostrar que para cualquier par de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

a) $\vec{u}$ x $\vec{v}$ = – $\vec{v}$ x $\vec{u}$

b) $\vec{u}$ x $\vec{v}$. $\vec{u}$ = 0 y $\vec{u}$ x $\vec{v}$. $\vec{v}$ = 0 (es decir perpendiculares.....)

c) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son no nulos, $\vec{u}$ x $\vec{v}$ = $\vec{o}$ si y sólo si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos.

Algunas interpretaciones geométricas

EJEMPLO 6.6.5

Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen componentes (a, b, c) y (d, e, f) respectivamente y θ es el ángulo entre ellos, resulta que si se calcula el módulo al cuadrado de $\vec{u}$ x $\vec{v}$, vale:

$$\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|^2 = (b.f - e.c)^2 + (d.c - a.f)^2 + (a.e - d.b)^2$$

Desarrollando los cuadrados, agrupando convenientemente y usando las definiciones de módulo y la expresión del producto escalar en las componentes (queda para usted como ejercicio), se llega a:

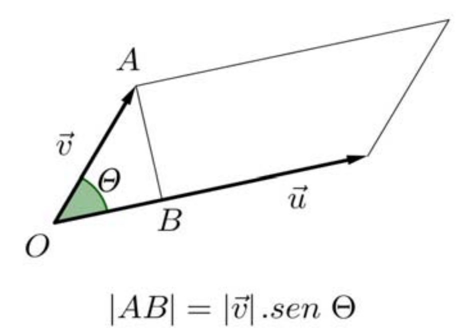
$$\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|^2 = \left|\vec{u}\right|^2 . \left|\vec{v}\right|^2 - \left(\vec{u}.\vec{v}\right)^2$$

Si se reemplaza el producto escalar por su definición y factoreando, y sacando raíz cuadrada (de bases positivas) se obtiene:

$$\left|\vec{u}\times\vec{v}\right| = \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.sen\,\theta \quad (*)$$

Recordatorio:
$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$
para cualquier θ

Observar y pensar la definición del seno:



$$|AB| = |\vec{v}|.sen\ \Theta$$

Es decir que por la última igualdad, (*) es el área de un paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que forman un ángulo θ entre sí.

EJEMPLO 6.6.6

Hallar el área del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}=(3,0,4)$ y $\vec{v}=(1,\ 2,\ 0)$

Verifique que el $\vec{u}$ x $\vec{v}$ = (– 8, 4, 6), por lo tanto el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right| = \sqrt{64+16+36} = \sqrt{116}$

Haga Ud. el dibujo de los vectores y del paralelogramo determinado por ellos.

EJERCICIO 6.6.7

Hallar el área del paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}$ = (3, 2, 2) y $\vec{v}$ = (0, 4, 5).

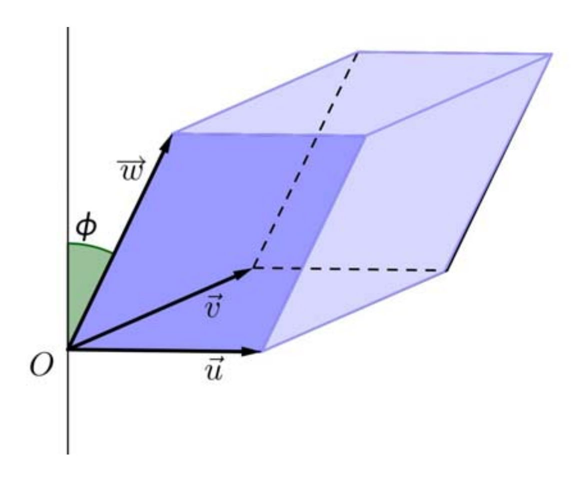
EJERCICIO 6.6.8

¿Cuál es el área del triángulo tal que dos de sus lados son los puntos de coordenadas (0, 2, 3) y (1, – 2, 3)?. Haga el dibujo y use el ejemplo...

EJERCICIO 6.6.9:

Demostrar que el volumen V de un paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ está dado por:

$$V = \left| \vec{u} \times \vec{v} \right| . \left| \vec{w} \right| . \left| \cos \phi \right|$$



Siendo ϕ el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ x $\vec{v}$ y $\vec{w}$. (En el dibujo se señala la recta de dirección del vector $\vec{u}$ x $\vec{v}$)

(Idea de la demostración: el volumen de un paralelepípedo está dado por el producto de la superficie de la base y la altura. Use el ejercicio anterior y que el producto vectorial entre dos vectores es perpendicular a cada uno de los vectores del mismo)

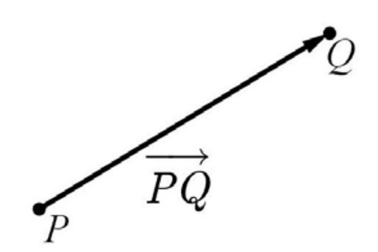
EJERCICIO 6.6.10

Hallar el volumen del paralelepípedo determinado por $(1, 0, 3)$, $(2, 3, 3)$ y $(3, 1, -2)$. Hacer una interpretación gráfica.

ANEXO 1: Qué ocurre si las flechas están sueltas....?

Hemos comenzado nuestro estudio de vectores del plano a partir de flechas que tienen igual origen. Se puede también trabajar con vectores que no estén fijos en un punto. Serán necesarias algunas definiciones.

Sobre estas flechas se precisan algunos conceptos. Estos elementos (las flechas) se llaman ***segmentos dirigidos***.



El punto P es el ***punto inicial*** o ***punto de aplicación*** u ***origen***, el punto Q es el ***punto terminal*** o ***punto final*** de $\overrightarrow{PQ}$

Resultan ser un par ordenado de puntos, por ejemplo P y Q. Se anota $\overrightarrow{PQ}$.

La distancia entre P y Q es la ***magnitud*** o ***módulo*** de $\overrightarrow{PQ}$, que se anotará $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$.

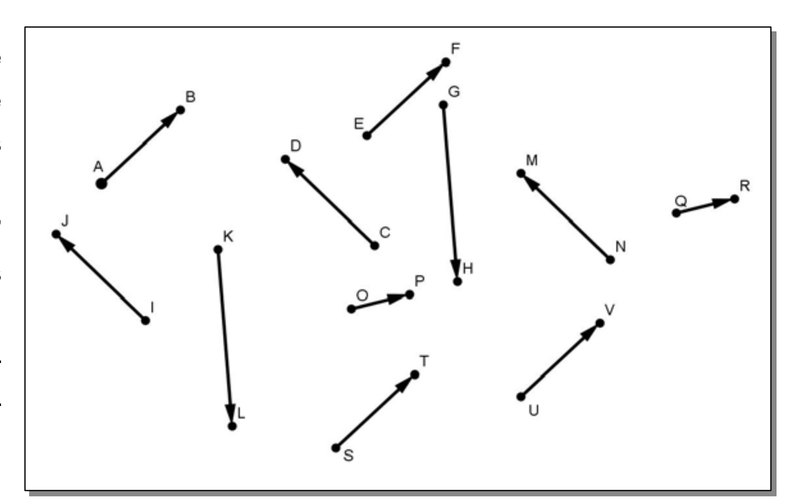
El segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$ es claramente distinto del segmento $\overrightarrow{QP}$.

Para pensar: ¿qué puede decir de esta última afirmación? ¿Qué tienen igual $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$?

La figura adjunta tiene segmentos dirigidos con distintos puntos de aplicación.

Es geométricamente obvio el significado de "algunos segmentos dirigidos tienen igual dirección y magnitud" aunque distintos puntos de aplicación y final.

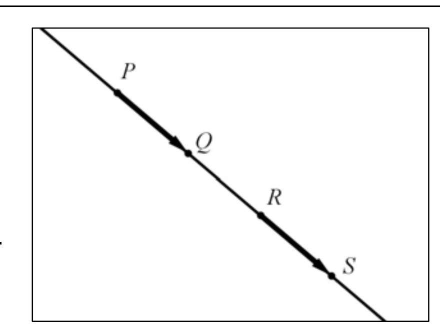
¿Cuáles de ellos seleccionaría en esas condiciones?



Vamos a precisar esta idea:

Dos segmentos dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen la misma magnitud, dirección y sentido si se cumple una de las siguientes condiciones:

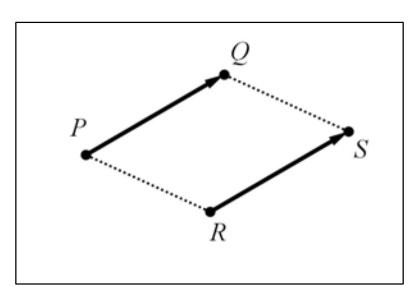
1. $P = R$ y $Q = S$



2. $P \neq Q, R$ y S están en la misma recta, $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\overrightarrow{RS}\right|$

y si Q "está a la derecha de" P, también S "está a la derecha de" R, y si Q "está a la izquierda de" P, también S "está a la izquierda de" R.

3. P, Q, R y S son todos distintos y hay tres que no están alineados, $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\overrightarrow{RS}\right|$ y la recta que pasa por P y por Q es paralela a la recta que pasa por R y por S y la recta que pasa por P y por R es paralela a la recta que pasa por Q y por S.



Si $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen la misma magnitud, dirección y sentido se anota $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{RS}$; y se dice que $\overrightarrow{PQ}$ **y** $\overrightarrow{RS}$ ***son equivalentes*.**

Nota: Para profundizar estos conceptos, ver el **Capítulo 4.**

EJERCICIO 1

Probar que la relación $\sim$ definida entre los segmentos dirigidos del plano verifica las siguientes propiedades:

a) $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{PQ}$ (por eso se dice que $\sim$ es *reflexiva*)

b) Si $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{RS}$ entonces $\overrightarrow{RS} \sim \overrightarrow{PQ}$ (por esto se dice que $\sim$ es *simétrica*)

c) Si $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{RS}$ y $\overrightarrow{RS} \sim \overrightarrow{TU}$ entonces $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{TU}$ (y por esto se dice que $\sim$ es *transitiva*)

OBSERVACION: Como la relación $\sim$ cumple estas tres propiedades se dice que: $\sim$ **es una relación de equivalencia en el conjunto de segmentos dirigidos del plano.**

EJERCICIO 2

En lo que sigue será muy importante que realice una representación gráfica:

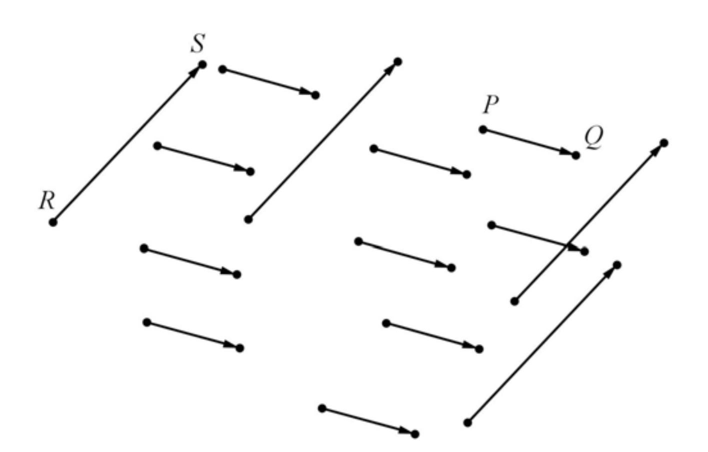
a) Si P tiene coordenadas $(2, 1)$ y Q tiene coordenadas $(3, 1)$, hallar las coordenadas de R para que $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{QR}$

b) Si P tiene coordenadas $(-3, 2)$ y Q tiene coordenadas $(-3, -5)$, hallar las coordenadas de R para que $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{PR}$

c) Si P tiene coordenadas $(2, 2)$ y Q tiene coordenadas $(-3, -5)$, hallar las coordenadas de R para que $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{QR}$

d) Si P tiene coordenadas $\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$, y Q tiene coordenadas $\left(\sqrt{2}+1, \sqrt{3}-2\right)$, y R tiene coordenadas $(3, -1)$ hallar las coordenadas de S para que $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{RS}$

Cómo podemos volver a los vectores fijos......



Dado un segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$ se considera $\vec{v}$ el conjunto de todos los segmentos dirigidos equivalentes con $\overrightarrow{PQ}$.

Es decir:

$$\vec{v} = \left\{ \overrightarrow{RS} : \quad \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{RS} \right\}.$$

Al conjunto $\vec{v}$ se lo llama ***vector libre.***

En esta gráfica se han dibujado algunos elementos.

Algunos de los equivalentes al $\overrightarrow{PQ}$ y algunos de los equivalentes al $\overrightarrow{RS}$.

EJERCICIO 3

En el dibujo anterior ponga nombre a los segmentos dirigidos y colóquelos en conjuntos según corresponda.

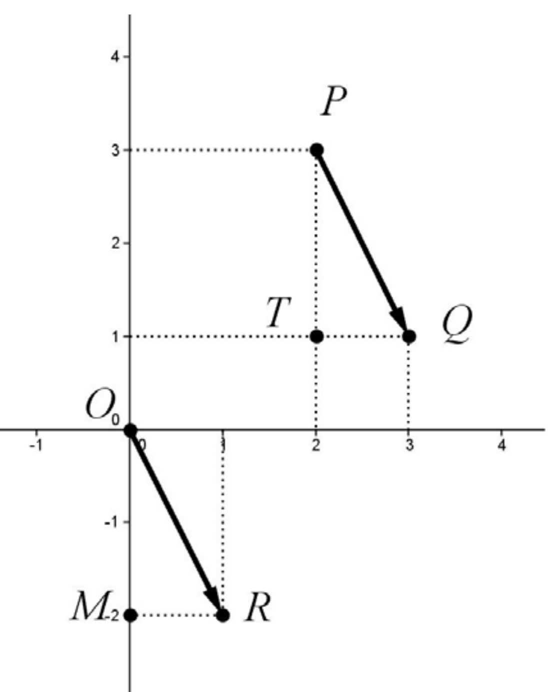
EJEMPLO 4

Sea el segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$, determinado por los puntos P de coordenadas $(2, 3)$ y Q de coordenadas $(3,1)$. Busquemos las coordenadas de R para que $\overrightarrow{PQ}$ sea equivalente a $\overrightarrow{OR}$. Siendo O el origen del sistema de coordenadas.

¿Cuál es el módulo de $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$?

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(3-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

El triángulo rectángulo de hipotenusa $\overline{PQ}$ tiene catetos $\overline{PT}$ y $\overline{TQ}$ de longitudes 2 y 1 respectivamente.



Por definición de la relación y semejanza de triángulos, con el punto O, el R y el eje y se debe formar un triángulo semejante al PTQ.

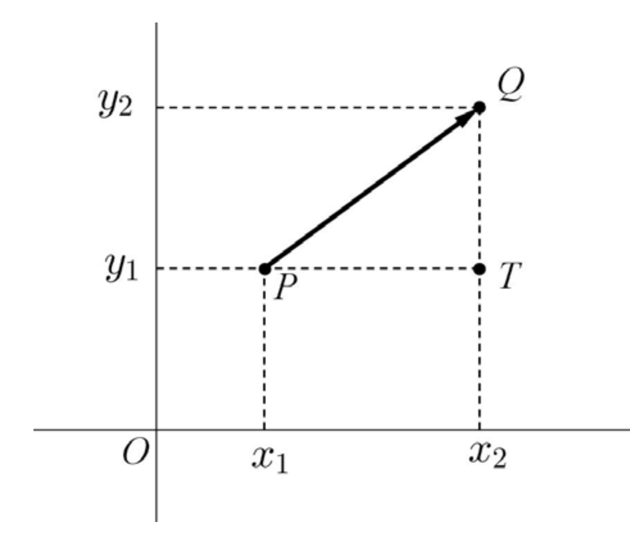
Por lo tanto OMR debe ser tal que $\overline{OM}$ mida 2, el cateto $\overline{MR}$ debe medir 1.

Por lo tanto R es un punto de coordenadas $(1,-2)$

Dibuje el paralelogramo que justifica por definición la equivalencia entre $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{OR}$.

Calcule el módulo de $\overrightarrow{OR}$.

Los resultados del ejemplo anterior se pueden generalizar.



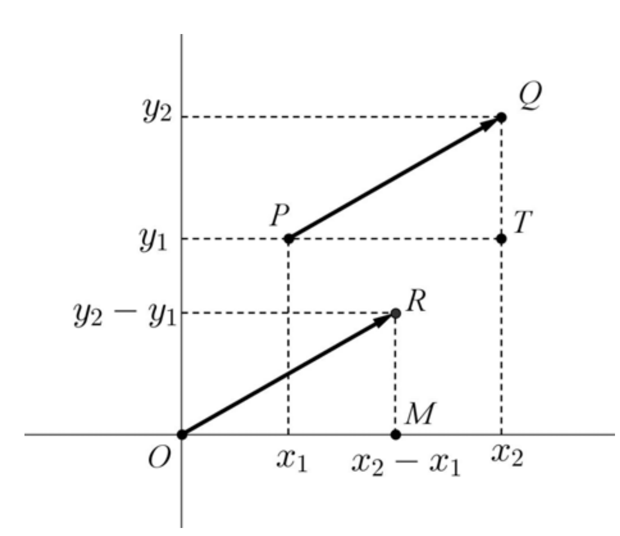
Dado un segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$ se quiere hallar uno equivalente que sea con origen en O, es decir hallar $\overrightarrow{OR}$, para que $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{OR}$

Sean P de coordenadas (x_1, y_1) y Q de coordenadas (x_2, y_2).

Se construye el triángulo PTQ rectángulo en T; los catetos $\overline{PT}$ y $\overline{QT}$ son de longitudes $|x_2 - x_1|$ y $|y_2 - y_1|$ respectivamente.

¿Cuál es la idea para construir un $\overrightarrow{OR}$? Hay que hacer un triángulo semejante con PTQ.

Debe ser rectángulo de hipotenusa $\overline{OR}$. ¿Por qué?



Los catetos $\overline{MR}$ y $\overline{OM}$ deben medir igual que $\overline{QT}$ y $\overline{PT}$ respectivamente. ¿Por qué?

Por lo tanto las coordenadas de R respetando el sentido deben ser $\pm|x_2 - x_1|$ y $\pm|y_2 - y_1|$ para que resulten $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{OR}$

Construya usted el paralelogramo $OPQR$.

En la situación geométrica de la figura como las coordenadas de Q son mayores que las de P, hay que tomar los valores positivos.

Haga usted otras situaciones geométricas en las que haya que considerar los otros signos....

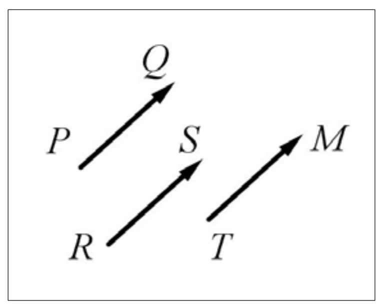
Si $\vec{v}$ es un conjunto de segmentos dirigidos equivalentes se puede considerar como representante de ellos a cualquiera.

$$\vec{v} = \left\{ \overrightarrow{RS} : \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{RS} \right\}$$

Esto es, si $\overrightarrow{PQ} \in \vec{v}$, se puede referir a ese conjunto simplemente por $\overrightarrow{PQ}$, y por abuso de notación se pone $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$.

Considerando un sistema de coordenadas se puede considerar en particular como representante del libre (clase de equivalencia) al segmento dirigido con origen en O.

Este representante existe para cada conjunto o vector libre (clase de equivalencia). **Es así como a cada vector libre se le puede asociar un único vector fijo, es decir aquel con origen en *O*.**



EJERCICIO 5

a) Represente en el plano coordenado el vector dirigido determinado por los puntos P de coordenadas $(-2, 3)$ y Q de coordenadas $(3, 4)$, siendo P el punto inicial.

b) Hallar al menos dos segmentos dirigidos equivalentes a $\overrightarrow{PQ}$, uno de ellos con origen en O.

c) Si considera el segmento $\overrightarrow{QP}$, dibújelo y realice lo pedido en b) para él.

d) Sume los vectores fijos en O que pertenecen obtenidos en b) y en c). ¿Qué observa?

EJERCICIO 6

a) Para los puntos P de coordenadas $(3, 5)$, el punto Q de coordenadas $(1, 0)$, el punto R de coordenadas $(0, -3)$, el S de coordenadas $(-2, 4)$, representarlos en el plano.

b) Hallar los segmentos dirigidos $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{SR}$, $\overrightarrow{SP}$. Hallar en cada caso su longitud. ¿Son equivalentes? Justifique su respuesta.

c) Sume los segmentos dirigidos no equivalentes.

d) Halle tres segmentos que sean equivalentes que cada uno de los dados en b) y otros a los obtenidos en c). En cada caso halle el de punto inicial en O. Siempre dibuje.

e) Sume los vectores fijos obtenidos en d). Compare con los resultados obtenidos en c).

EJERCICIO 7

Represente el segmento dirigido con punto inicial en P de coordenadas $(2, 3)$ y punto final también en P. ¿Qué longitud tiene?

Dibuje otros segmentos dirigidos distinto que sea equivalente..

¿Cuál es el que es equivalente y fijo en O ?

Lo mismo para vectores del espacio

Si $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen la misma magnitud, dirección y sentido se anota $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{RS}$ y se dice que $\overrightarrow{PQ}$ **y** $\overrightarrow{RS}$ ***son equivalentes*.**

Los puntos están determinados por ternas, sus coordenadas.

EJERCICIO 8

En lo que sigue no deje de dibujar:

a) Si P tiene coordenadas $(2, 1, 3)$ y Q tiene coordenadas $(3, 1, 6)$, hallar las coordenadas de R para que $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{QR}$

b) Si P tiene coordenadas $(-3, 2, 1)$ y Q tiene coordenadas $(-3, -5, 2)$, hallar las coordenadas de R para que $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{PR}$

c) Si P tiene coordenadas $(2, 1, 3)$ y Q tiene coordenadas $(3, 1, 6)$, hallar las coordenadas de R para que $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{OR}$

d) Si P tiene coordenadas $(2, 1, 3)$ y Q tiene coordenadas $(3, 1, 6)$, hallar las coordenadas de R para que $\overrightarrow{QP} \sim \overrightarrow{OR}$

e) ¿Cuál es el módulo de $\overrightarrow{OR}$?

ANEXO 2: Determinante 3x3

Para introducir el producto vectorial se sugirió emplear una definición (que por sí sola tiene otras aplicaciones que se verán más adelante), y sobre la que se profundizará en el Capítulo 12 de Determinantes.

Es la del cálculo de **determinante** 3x3.

Dado un cuadro de valores de la forma:

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ donde los elementos de cada fila por lo general son números.

Lo que se hace es, a este cuadro, asociar un número de una manera especial.

Ese valor se llama **determinante**.

Vamos a obtener ese número por el método que se denomina desarrollo por la fila 1 (que puede probarse, y se hará en el capítulo correspondiente) que daría igual resultado si se lo hiciera por cualquiera de las otras filas):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1.\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1.\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1.\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Los cuadros $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ son casos particulares de determinantes 2x2.

Para calcularlos se usa la siguiente regla:

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} = m_1.n_2 - m_2.n_1$$

Es decir que se hace el producto de los elementos de la diagonal que va de la punta superior izquierda a la punta inferior derecha y se le resta el producto de los elementos que están en la otra diagonal.

Por lo cual:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1.\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1.\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1.\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1(b_2.c_3 - b_3.c_2) - b_1(a_2.c_3 - a_3.c_2) + c_1(a_2.b_3 - a_3.b_2)$$

EJEMPLO 1

Calcular $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} =$

$$= 1.(2.2 - 5.5) - 3.(-3.2 - 0.5) + 0.(-3.5 - 0.2)$$

y haciendo las cuentas indicadas se obtiene:

$$1.(4 - 25) - 3.(-6 - 0) + 0.(-15 - 0) = 1.(-19) - 3.(-6) + 0.(-15) = -19 + 18 + 0 = -1$$

EJERCICIO 2

Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

EJERCICIO 3

Observar que para recordar la definición del producto vectorial de dos vectores $\vec{v} = (a,b,c)$ y $\vec{u} = (d,e,f)$, la misma equivale a resolver un determinante simbólico:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

pues la primera fila son vectores (los de la base canónica) y no números. Por eso, si se resuelve desarrollando por la primera fila da por resultado un vector expresado en la base canónica.

En 6.6 se dio la regla práctica para calcular el producto vectorial como:

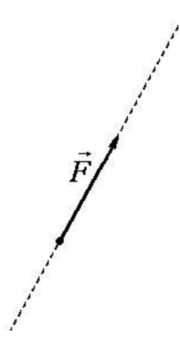
$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

CAPÍTULO 7
Introducción a la geometría analítica en $\mathbb{R}^3$

El estudio de la Matemática como ciencia deductiva, como fue concebida por Euclides en los años 300 antes de Cristo, comienza con nociones primitivas sin definir como punto y recta y un conjunto de axiomas o postulados sobre ellos, y los teoremas y propiedades se deducen a partir de ellos de distintas nociones y figuras geométricas.

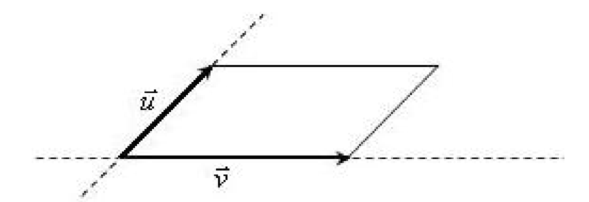
Como se ha dicho en capítulos anteriores, en el siglo XVII el matemático francés Renee Descartes introduce los sistemas de coordenadas en el plano y el espacio y se comienza el estudio de las propiedades geométricas usando la Geometría Analítica.

En el capítulo anterior vimos cómo se pueden estudiar algunos aspectos geométricos usando el cálculo vectorial, por ejemplo:
Hemos visto que puede modelizarse a las fuerzas con los vectores, y asociarse las propiedades y operaciones de unas con las de los otros. En ese sentido podríamos ahora preguntarnos ¿cómo podemos expresar la dirección de la fuerza (la recta a la que pertenece el vector que la representa)?.

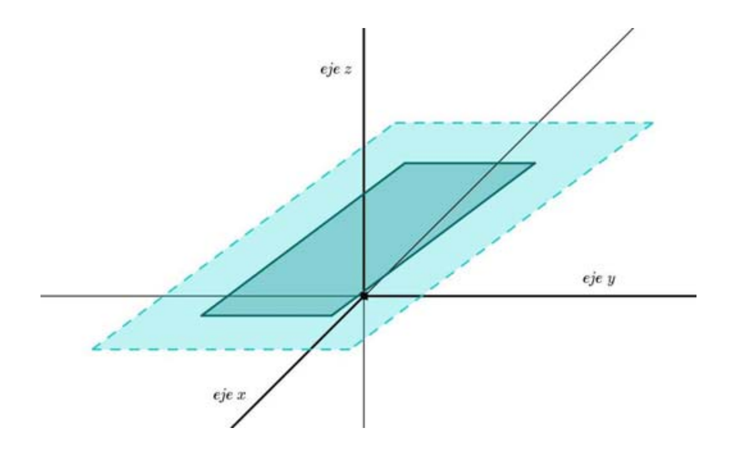


Sabemos también que dados dos vectores no paralelos $\vec{u}$ y $\vec{v}$, determinan un paralelogramo. En el capítulo anterior analizamos como podemos calcular el área de dicho paralelogramo.

Surge la pregunta: ¿podemos conocer las rectas a las que pertenecen los lados del paralelogramo? ¿Qué expresión algebraica podemos asignarle a dichas rectas?



Si este paralelogramo generado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se halla en el espacio; existe un plano en el espacio que lo contiene. Quisiéramos conocer alguna expresión algebraica que represente a ese plano.

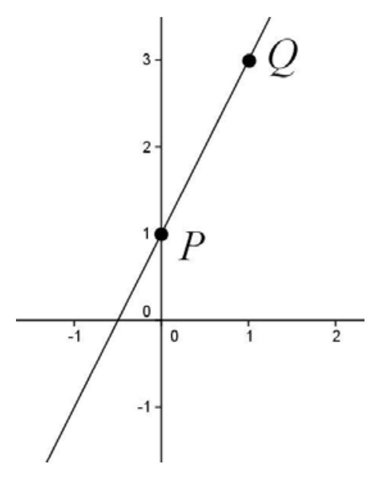


En este Capítulo se seguirán ambas líneas de trabajo: el referido a la Geometría Analítica y el referido al Cálculo Vectorial.

1. Rectas

Comencemos repasando algunas cosas del plano y generalizaremos lo posible.
Representemos en el plano la recta r de ecuación $y = 2x + 1$.

Así es que se escribe, $r : y = 2x + 1$.



Los puntos *P* de coordenadas (0, 1) y *Q* de coordenaas (1,3) son puntos de la recta *r.* Verifíquelo.

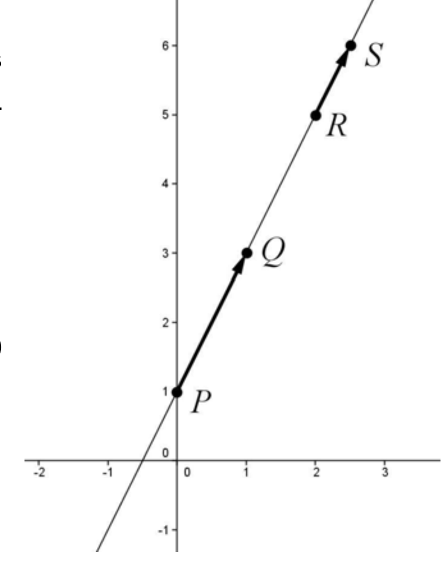
Representando el segmento dirigido *PQ* y cualquier segmento que se forme con un par de puntos *R* y *S* que esté en la recta se pueden escribir como un múltiplo escalar de PQ.

$$\overrightarrow{RS} = \lambda.\overrightarrow{PQ}\text{, para } \lambda \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO 7.1.1:

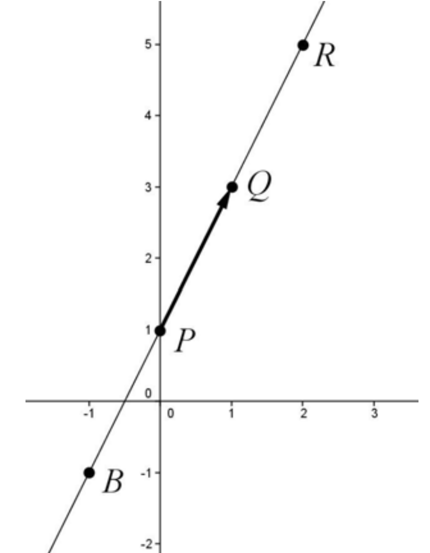
Si *R* tiene coordenadas (2, 5) y *S* tiene coordenadas (5/2, 6), verifique que ambos están en la recta *r* (sugerencia: reemplace sus coordenadas en la ecuación).

Además compruebe que $\lambda = \dfrac{1}{2}$.



Verifique también que los puntos *T*(6,13) y *U*(–1,–1) están en la recta *r* y que además

$$\overrightarrow{TU} = 7.\overrightarrow{PQ}$$



A partir del segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$, fijemos un punto, por ejemplo *R* (2, 5).

Variando el valor de λ obtenemos otro segmento dirigido cuyo extremo final es también un punto de la recta.

P (0, 1)

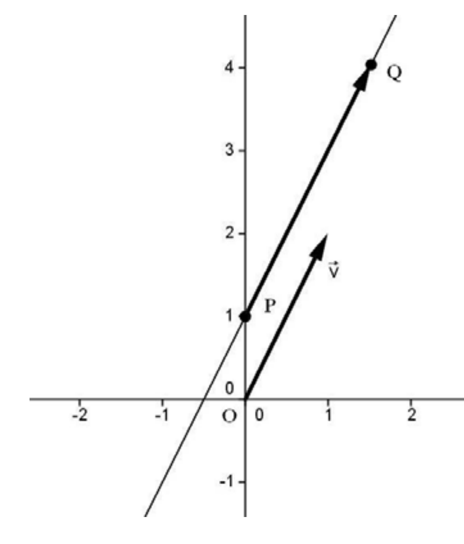
Q (1, 3)

R (2, 5)

Si $\overrightarrow{RB} = \lambda.\overrightarrow{PQ}$ y $\lambda. = -3$, resulta que *B* (–1, –1), que también es un punto de la recta *y* = 2 *x* + 1.

λ un valor real variable (**parámetro**) que permite ir obteniendo cada uno de los puntos que forman la recta.

Además si consideramos inicialmente otro par de puntos que esté en *r* la conclusión sería similar.



Si el vector $\overrightarrow{PQ}$ está sobre la recta *r*, y el vector $\vec{v}$ es fijo en *O* y equivalente a $\overrightarrow{PQ}$ se tiene que:

$\vec{v} = (x_Q - x_P, y_Q - y_P)$.

En el caso que estamos considerando,

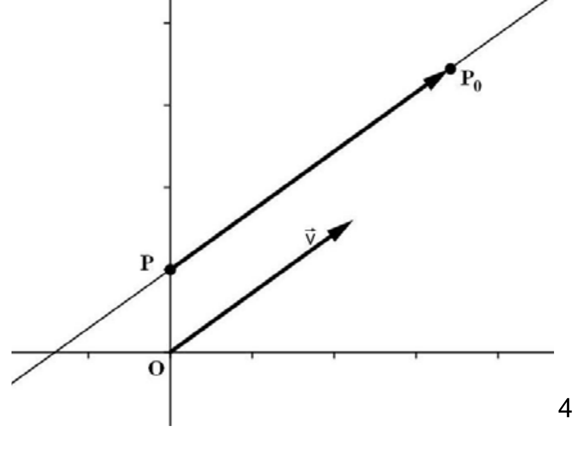
$\vec{v}$ = (1, 2).

Para el segmento dirigido $\overrightarrow{RS}$ se encontrará otro vector fijo $\vec{u}$ en el origen que con respecto a $\vec{v}$ se cumple para ellos que $\vec{v} = \lambda.\vec{u}$ con $\lambda = 2$.

Un vector como $\vec{v}$, que es paralelo a la recta, se dice que $\vec{v}$ **dirige la recta *r*.** ¿Es único el vector? Reflexione al respecto!!!

Generalizando:

Para encontrar una ecuación de la recta que pasa por un punto genérico *P*(*x, y*) y por P_0 y además es paralela a $\vec{v}$ = (*a, b*) podemos usar la observación anterior.



$\overrightarrow{PP_0} = -\lambda.\vec{v}$ para $\lambda \in \mathbb{R}$ **(1)**

Que en coordenadas resulta:

$$(x - x_0, y - y_0) = \lambda.(a,b) \qquad \textbf{(2)}$$

Por igualdad de pares ordenados, de **(2)** resulta el sistema: $\begin{cases} x - x_0 = \lambda.a \\ y - y_0 = \lambda.b \end{cases}$ **(3)**

Si el vector $\vec{v}$ no es paralelo a ninguno de los ejes, tanto *a* como *b* son distintos de 0.
En ese caso podemos "despejar" de ambas ecuaciones del sistema **(3)** el parámetro λ y se tiene:

$$\lambda = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \qquad \textbf{(4)}$$

De la igualdad **(4)** se obtiene $y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$ **(5)**

Y de **(5)** se puede despejar y para obtener : $y = \frac{b}{a}(x - x_0) + y_0$, que haciendo algunas sustituciones convenientes resulta:

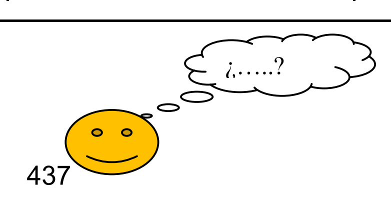
$$y = mx + n \qquad \textbf{(6)}$$

Observar que de **(1)** a **(6)** todas las relaciones son equivalentes si el vector $\vec{v}$ no es paralelo a ningún eje coordenado. Es decir son todas distintas formas de ecuación de una recta. Cualquiera de esas formas sirve para expresar la misma recta.

.

EJERCICIO 7.1.2:
Haga Ud. la comprobación que en el caso de la recta *r* dada en el ejemplo y los puntos elegidos puede arribar a la ecuación dada originalmente, siguiendo los pasos de **(1)** a **(6)**.

Para pensar: En general ¿cuáles son las formas que no se pueden obtener si $\vec{v}$ es paralelo a algún eje coordenado? Justifique su opinión. Lea atentamente los pasos realizados.



Resumiendo, distintas formas de ecuaciones para la recta *r* son:

(1) ***Forma vectorial o vectorial paramétrica,*** P_0 un punto de *r* y es paralela a $\vec{v}$

$$\overrightarrow{PP_0} = -\lambda.\vec{v} \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}$$

(2) ***Forma en coordenadas,*** P_0 un punto de *r* y es paralela a $\vec{v}$ = (*a, b*)

$$(x - x_0, y - y_0) = \lambda.(a, b), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(3) ***Forma cartesiana paramétrica,*** P_0 un punto de *r* y es paralela a $\vec{v}$ = (*a, b*)

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda.a \\ y = y_0 + \lambda.b \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(4) ***Forma simétrica,*** P_0 un punto de *r* y es paralela a $\vec{v}$ = (*a, b*) , con $a.b \neq 0$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

(5) ***Forma de ecuación conocido un punto*** P_0 ***y pendiente b/a ,*** $a \neq 0$

$$y - y_0 = \frac{b}{a} \cdot (x - x_0)$$

(6) ***Forma explícita, con pendiente m y ordenada al origen n.***

$$y = m.x + n$$

(7) ***Forma general,*** con $A.B \neq 0$

$$A\,x + B\,y + C = 0$$

EJERCICIO 7.1.3:

a) Determinar una ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos de coordenadas (– 3, 3) y (2,4). Representar.

b) Hallar dos vectores paralelos a la recta de ecuación 3 *y* – 2 *x* = 5. Representar.

c) Hallar una ecuación de la recta que pasa por el punto (– 2, 5) y es paralela al vector $\vec{v}$ = (3, 0). Representar.

d) Hallar una ecuación de la recta que pasa por (1, – 2) y es perpendicular al vector $\vec{v} = 4.\vec{i} - \vec{j}$. Representar.

Se define como **ángulo entre dos rectas del plano** al ángulo entre los vectores que las dirigen.

EJERCICIO 7.1.4:

Dadas las rectas $r_1 : 3x - y = 0$ y $r_2 : \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+3}{2}$. Representarlas.

Hallar el ángulo entre vectores paralelos a ellas.

EJERCICIO 7.1.5:

Demostrar que las rectas dadas por las ecuaciones *A x* + *B y* = *c* y *A x* + *B y* = *c** son paralelas para cualquier par de valores *c* y *c**.

Sugerencia: Determine la pendientes en cada caso ó las componentes de un vector paralelo a cada recta.

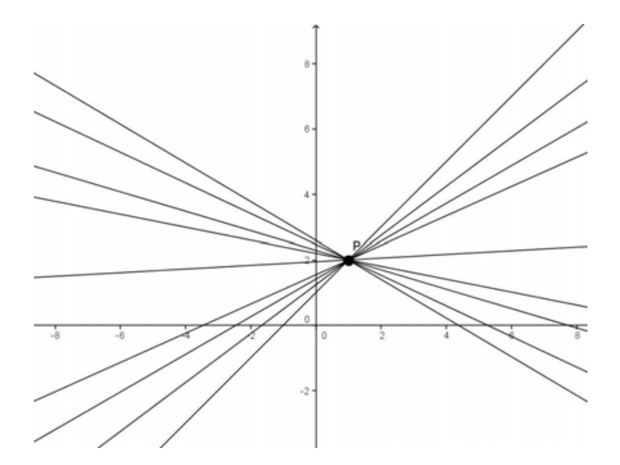
EJERCICIO 7.1.6:

a) Representar y escribir una ecuación vectorial paramétrica de las rectas que pasan por *P*(1, 2) y son respectivamente paralelas a $\vec{v} = 4\,\vec{i} - \vec{j}$ y a $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$.

b) Representar y escribir una ecuación vectorial paramétrica de la recta que pasa por *P*(1, 2) y paralela a $\vec{v} = (a, b)$. ¿Qué relación hay con las ecuaciones halladas en a)?

c) Dibuje las rectas que se obtienen en b) para distintos vectores $\vec{v}$.

Estas son algunas:



Al conjunto de rectas que pasan por *P* se lo llama **haz de rectas que pasa por *P***

EJERCICIO 7.1.7:

Hallar en forma paramétrica ecuaciones para el haz de recta que pasa por P_0. Represente la situación descripta.

EJERCICIO 7.1.8:

Sea la recta *r* de ecuación $3x + 2y = 1$.

a) Hallar las coordenadas de dos puntos *R* y *T* que estén en la recta.

b) Determinar un punto *S* que no pertenezca a *r*.

c) Hallar una ecuación de la recta *h* que pasa por *T* y es dirigida por el vector $\overrightarrow{SR}$

d) Cuál es el coseno del ángulo β entre las rectas *r* y *h* ?

e) Hallar la medida de β.

EJERCICIO 7.1.9:

a) Hallar la ecuación cartesiana paramétrica de la recta que pasa por *A*(1, – 2) y es paralela al vector $\vec{v}$ = (0, 4). Represente.

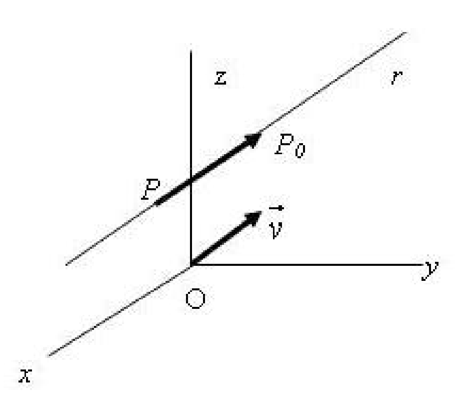
b) Puede en esta caso hallar la forma simétrica? Porqué?

2. Rectas en $\mathbb{R}^3$

Las rectas del plano o del espacio están totalmente determinadas por un punto y una dirección (no se necesita más que eso para que quede totalmente determinada), es un postulado de la geometría elemental de Euclides.

Por lo cual hay formas de ecuaciones de las rectas del espacio $\mathbb{R}^3$ que son similares a las encontradas en el plano con los cambios naturales para las tres componentes.

La recta *r* es paralela al vector $\vec{v}$, y este vector es paralelo a cualquier segmento dirigido formado con un par de puntos que están sobre la recta.



Para determinar las distintas formas de ecuaciones consideremos un vector $\vec{v}$ = (*a, b, c*) paralelo a la recta, el punto genérico *P* de la recta de coordenadas (*x, y, z*) y designamos por P_0 un punto de la recta que tiene coordenadas (x_0, y_0, z_0), se tiene así lo siguiente:

(1) *Forma vectorial o vectorial paramétrica,* P_0 un punto de *r* y es paralela a $\vec{v}$

$$\overrightarrow{PP_0} = -\lambda.\vec{v} \text{ para } \lambda \in \mathbb{R}$$

Reemplazando por las coordenadas se llega a

(2) ***Forma en coordenadas,*** P_0 un punto de r y es paralela a $\vec{v}$ = (a, b, c)

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda.(a, b, c), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Por la igualdad entre vectores se tiene el sistema

(3) ***Forma cartesiana paramétrica,*** P_0 punto de r y es paralela a $\vec{v}$ = (a, b, c)

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda.a \\ y = y_0 + \lambda.b \\ z = z_0 + \lambda.c \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Igualando a λ se obtienen la igualdad (en caso posible):

(4) ***Forma simétrica,*** P_0 punto de r paralela a $\vec{v}$ = (a, b, c), con $a.b.c \neq 0$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

EJEMPLO 7.2.1:

Hallar una ecuación de la recta que pasa por el punto (– 3, 2, 1) y es paralela al vector $\vec{v}$ = (*5, 3, 2*)

De las varias formas elegimos dos.

Por ejemplo, la ecuación vectorial paramétrica resulta:

$$\begin{cases} x = -3 + \lambda.5 \\ y = 2 + \lambda.3 \\ z = 1 + \lambda.2 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Como las componentes del vector director son todas no nulas se puede despejar λ y obtener la forma simétrica:

$$\frac{x+3}{5}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{2}$$

Queda para Ud. hacer el dibujo de la recta hallada.

EJEMPLO 7.2.2:

Determinar una ecuación de la recta que pasa por los puntos *P* y *Q* de coordenadas $(3,2,0)$ y $(-1,4,8)$ respectivamente.

De los datos se desprende que el vector $\vec{v}$ = (3 – (– 1), 2 – 4, 0 – 8) es paralelo a la recta determinada por *P* y *Q*. ¿Está de acuerdo?

Es decir el vector $\vec{v}$ = (4, – 2, – 8) dirige a la recta.

Como punto en la recta se puede considerar tanto *P* como *Q*. ¿Seguimos de acuerdo?....

Luego una ecuación posible es $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-8}{-8}$

¿Puede hallar Ud. alguna otra forma de ecuación de la misma recta? Hágalo!!! 

También le queda la representación de la recta.....

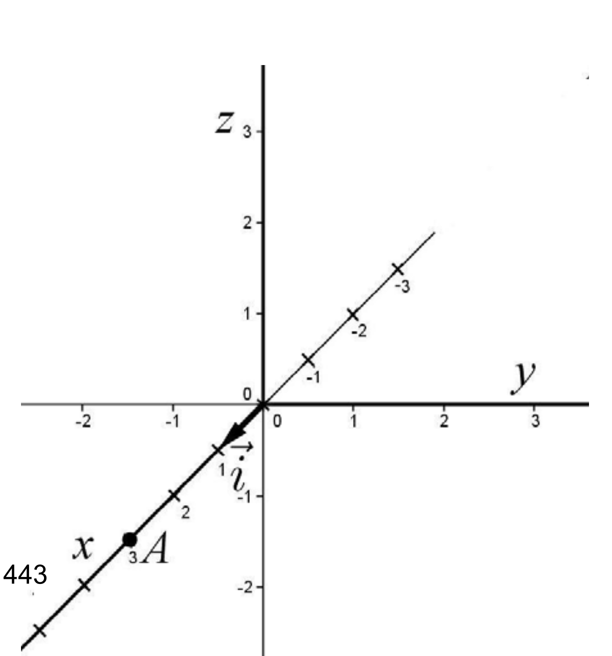
EJEMPLO 7.2.3:

Determinar una ecuación del eje cartesiano *x*.

Para ello debemos obtener un punto sobre el eje y un vector paralelo al mismo.

Un punto puede ser *A* y un vector el $\vec{i}$.

¿De acuerdo?



Consideremos $A(3, 0,0)$ e $\vec{i} = (1,0,0)$. Se va a determinar la ecuación vectorial paramétrica, $\overline{PA} = -\lambda.\vec{v}$ para $\lambda \in \mathbb{R}$.

Reemplazando por las coordenadas:
$(x - 3, y - 0, z - 0) = \lambda\ (1, 0, 0)$

Lo que lleva a: $\begin{cases} x = 3 + \lambda.1 \\ y = 0 + \lambda.0 \\ z = 0 + \lambda.0 \end{cases}$ para $\lambda \in \mathbb{R}$

Por lo cual resulta que ***x* es un número real cualquiera**.
La condición que determina este sistema es $y = 0$ y $z = 0$.

Haga usted la prueba que obtiene la misma solución si considera otro punto que este sobre el eje *x* pero distinto de *A* y cualquier vector paralelo al eje *x* (si está fijo con origen en *O*, será un múltiplo escalar de $\vec{i}$).

EJERCICIO 7.2.4:
a) Hallar una ecuación del eje *y*.
b) Hallar una ecuación del eje *z*.

EJERCICIO 7.2.5:
Dados los puntos $P\ (2, -1, 3)$, $Q\ (2, 3, 1)$ y los vectores $\vec{v} = (5, 3, 2)$ y $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 3.\vec{k}$, hallar ecuaciones para las rectas determinadas por las siguientes condiciones y representar gráficamente:

a) Pasa por *P* y es paralela a $\vec{v}$.
b) Pasa por *P* y es paralela a $3.\vec{v}$. Compare con a). Qué opina? Justifique.
c) Pasa por *P* y por *Q*.
d) Pasa por *Q* y es paralela a $3.\vec{v} - \vec{u}$.

e) Pasa por Q y es dirigida por $\vec{u}$.

EJERCICIO 7.2.6:

Hallar una ecuación de la recta que pasa por P (1, 3, 5) y es paralela al vector $\vec{u} = \vec{j} + \vec{k}$. Representar gráficamente.

EJERCICIO 7.2.7:

Hallar una ecuación de la recta que pasa por P (3, 3, 5) y es paralela a la recta de ecuación

$$\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 3t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$. Represente gráficamente la situación.

EJERCICIO 7.2.8:

Hallar una ecuación de la recta que pasa por P (0, 1, 4) y es paralela a la recta de ecuación

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$. Represente gráficamente la situación.

EJERCICIO 7.2.9:

Hallar una ecuación de la recta que pasa por Q (2, – 1, 1) y es paralela a la recta de ecuación

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{2} = z + 2 .$$

Represente gráficamente la situación.

EJERCICIO 7.2.10:

a) Hallar una ecuación de la recta que pasa por B(– 2, 3, 1) y es paralela al eje y. Represente gráficamente la situación.

b) Hallar una ecuación de la recta que pasa por B(– 2, 3, 1) y es paralela al eje z. Represente gráficamente la situación.

EJERCICIO 7.2.11:

a) Hallar una ecuación de una recta que pasa por $R(1, 2, 2)$ y es perpendicular al eje *x*.

b) Es única la recta determinada en a)? Justifique su respuesta.

No deje de dibujar.

3. Planos

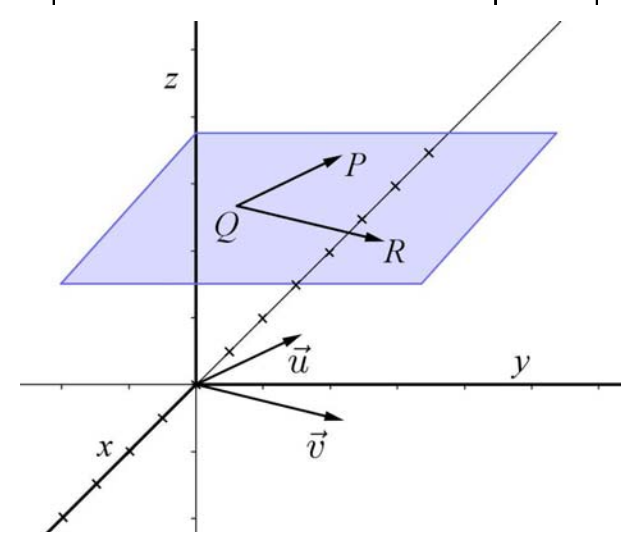
Para empezar, comencemos con tres puntos. Dibujemos tres puntos en el espacio de modo que no estén en una sola recta (esto es **no alineados**).

¿Cuántos planos distintos pueden tener a la vez esos tres puntos como elementos?

Efectivamente, tres puntos no alineados determinan un plano.

Este resultado totalmente intuitivo es uno de los teoremas euclídeos.

Con él nos ayudaremos para buscar una forma de ecuación para un plano.



Con los tres puntos sobre el plano podemos determinar dos segmentos dirigidos contenidos en él.

Como el $\overrightarrow{PQ}$ y el $\overrightarrow{RQ}$, del gráfico que nos sirve para pensar…

Ellos o sus equivalentes con origen en el origen del sistema, se dice que son los **vectores que dirigen al plano.**

Claramente ambos pares de vectores son paralelos al plano.

Por otra parte si consideramos dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, no paralelos entre sí, y un punto *Q* particular del espacio, hay un único plano que es paralelo a ambos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y pasa por *Q*.

Es claro que es posible a partir de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ "fabricar" vectores (segmentos dirigidos con origen en *Q*) "equivalentes" con cada uno de ellos y cuya situación geométrica resulta semejante a la del diagrama anterior, lo que nos permite tener tres puntos especiales del espacio (*Q* y los extremos finales de los vectores dirigidos) por lo cual hay un único plano.

Por propiedades de la suma de vectores, si se considera en un plano α un punto genérico *P* de coordenadas (*x, y, z*), otro punto del plano P_0 que tiene coordenadas (x_0, y_0, z_0) y dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ paralelos al plano α, pero no paralelos entre sí, de coordenadas (*a, b, c*) y (*d, e, f*) respectivamente se cumple que:

$$\overrightarrow{PP_0} = \lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v} \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } \mu \in \mathbb{R} \quad \textbf{(1)}$$

Verifique **(1).**

Se dice que **(1)** es una ecuación del plano en ***forma paramétrica*.**

Reemplazando por las coordenadas de los vectores se tiene:

$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = -\lambda.(a,b,c) - \mu.(d,e,f), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ **(2)** ***Forma paramétrica en coordenadas,*** P_0 un punto de α, paralelo a $\vec{u}$ = (*a, b, c*) y a $\vec{v}$ = (*d, e, f*)

Y se puede escribir equivalentemente como el sistema:

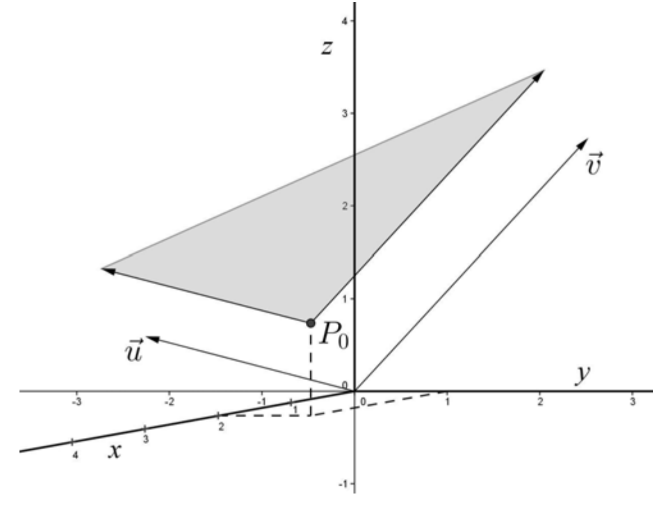
$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda.a + \mu.d \\ y = y_0 + \lambda.b + \mu.e \\ z = z_0 + \lambda.c + \mu.f \end{cases} , \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

(3) ***ecuaciones paramétricas,*** P_0 un punto de α, paralelo a los vectores $\vec{u}$ = (*a, b, c*) y a $\vec{v}$ = (*d, e, f*)

EJEMPLO 7.3.1:

Representar en un sistema coordenado y por ecuaciones paramétricas el plano que pasa por (2, 1, 1) y es dirigido por los vectores $\vec{u}$ = (3, 0,1) y $\vec{v}$ = (2, 4, 3)

El plano queda determinado por esos tres elementos ya que los vectores no son paralelos entre sí.



Es un plano que corta a los planos coordenados y "viene" hacia adelante....

Una ecuación cartesiana paramétrica es
$$\begin{cases} x = 2 + \lambda.3 + \mu.2 \\ y = 1 + \lambda.0 + \mu.4 \\ z = 1 + \lambda.1 + \mu.3 \end{cases} , \ \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } \mu \in \mathbb{R}$$

EJEMPLO 7.3.2 :

Hallar ecuaciones del plano que pasa por $P(-2, 1, 0)$, $Q(2, 3, 3)$ y es paralelo al vector $\vec{u}$ = (1, 0, 3).

Si *P* y *Q* son puntos del plano, el vector dirigido $\overrightarrow{PQ}$ es un vector paralelo al plano y sus coordenadas son (2 + 2, 3 – 1, 3 – 0) es decir (4, 2, 3). El otro vector paralelo es el dado, que no son paralelos entre sí. ¿Por qué?

Como punto en el plano es posible considerar tanto *P* como *Q*.

Luego ya se tiene todo lo necesario para escribir una ecuación, por ejemplo si elegimos a *P* como el P_0 tal fin se obtiene:

$(x-(-2), y-1, z-0) = \lambda.(4,2,3) + \mu.(1,0,3)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mu \in \mathbb{R}$, que podemos escribir como:

$$(x+2, y-1, z) = \lambda.(4,2,3) + \mu.(1,0,3), \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } \mu \in \mathbb{R}$$

Queda para Ud. hacer el dibujo en un sistema coordenado y hallar otras formas de ecuación que se pueden obtener a partir de la obtenida.

EJERCICIO 7.3.3:

Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos $P(1, 0, 3)$, $Q(0, 2, 3)$ y $R(1, 2, 4)$. Represente el plano en un sistema de coordenadas.

EJERCICIO 7.3.4:

Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos $P(1, 0, 3)$, $Q(0, 2, 3)$ y es paralelo al vector

$\vec{v}$ = (2, 4, 3). Represente el plano en un sistema de coordenadas.

☆ Analicemos ahora si es posible obtener una única ecuación cartesiana sin parámetros ☆

Si eliminamos los parámetros, trabajando entre las tres ecuaciones de (3), se logra lo deseado,

obteniéndose:

$$(b.f - c.e).x + (c.d - a.f).y + (a.e - b.d).z - (a.e.z_0 + b.f.x_0 + c.d.y_0 - c.e.x_0 - a.f.y_0 - b.d.z_0) = 0$$

Es decir, una expresión de la forma:

$$A\,x + B\,y + C\,z = D \qquad \textbf{(4)}$$

Donde: $A = b.\,f - c.\,e$

$B = c.\,d - a\,.f$

$C = a.\,e - b.\,d$

$D = a.e.z_0 + b.f.x_0 + c.d.y_0 - c.e.x_0 - a.f.y_0 - b.d.z_0$

Esos valores *A, B, C* le hacen recordar algo? Piense bastante... 

Además fíjese que $D = a.e.z_0 + b.f.x_0 + c.d.y_0 - c.e.x_0 - a.f.y_0 - b.\,d\,z_0$ se puede escribir como:

$$D = A.\,x_0 + B.\,y_0 + C.\,z_0$$

Si hacemos el producto vectorial de $\vec{u}$ = (*a, b, c*) y $\vec{v}$ = (*d, e, f*), obtendremos que $\vec{u} \times \vec{v} = (A, B, C)$.

Una observación importante para recordar es que $\vec{u} \times \vec{v} = (A, B, C)$ es un vector perpendicular tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$, luego $\vec{u} \times \vec{v} = (A, B, C)$ es un vector perpendicular al plano dirigido por ellos.

Además usando este vector se obtiene D = $(\vec{u} \times \vec{v}).\overline{OP} = (A, B, C).(x_0, y_0, z_0)$

EJEMPLO 7.3.5:

Para el plano que se ha encontrado una ecuación en el EJERCICIO 7.3.2
Hallar una ecuación sin parámetros.

La ecuación encontrada fue:

$$(x+2, y-1, z) = \lambda.(4,2,3) + \mu.(1,0,3), \text{ con } \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } \mu \in \mathbb{R}$$

A partir de ella se tiene el sistema

$\begin{cases} x+2 = 4\lambda + 1\mu \\ y-1 = 2\lambda \\ z = 3\lambda + 3\mu \end{cases}$ del cual se logra eliminar $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mu \in \mathbb{R}$ (Hágalo para practicar).

Se usará el resultado de los comentarios anteriores:

$A = b.\ f - c.\ e = 2.3 - 3.0 = 6$

$B = c.\ d - a\ .f = 3.1 - 4.3 = -9$

$C = a.\ e - b.\ d = 4.0 - 2.1 = -2$

$D = A.\ x_0 + B.\ y_0 + C.\ z_0 = 6.(-2) + (-9).1 + (-2).0 = -21$

Y una ecuación sin parámetros es entonces: $6x - 9y - 2z = -21$.

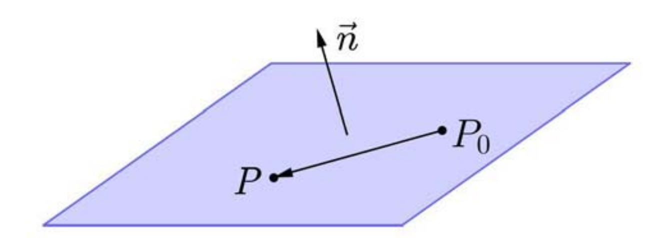
Represente el plano en un sistema coordenado.
¿Cómo es el vector (6, -9, -2) respecto del plano obtenido?

Otra forma de llegar al plano

Dibuje un punto P_0 y un vector no nulo $\vec{n}$ en el espacio.

Analice cuantos planos tienen ese punto P_0 en él y son perpendiculares al vector $\vec{n}$.

Un plano queda unívocamente determinado por un vector no nulo perpendicular al mismo y un punto que le pertenezca.



Todo segmento dirigido que esté sobre el plano (formado por dos puntos sobre él) es perpendicular al vector $\vec{n}$, es así que usando consecuencias del producto escalar:

$$\overrightarrow{P_0P}.\vec{n} = 0$$

Luego, si $\vec{n}$ = (*A*, *B*, *C*), *P* es de coordenadas (*x*, *y*, *z*) y el P_0 tiene coordenadas (x_0, y_0, z_0), se obtiene:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0).(A, B, C) = 0$$

Evaluando el producto escalar en función de las coordenadas:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

distribuyendo se obtiene:

$$Ax + By + Cz = A.x_0 + B.y_0 + C.z_0$$

y si se llama $D = A.\ x_0 + B.\ y_0 + C.\ z_0$
se puede escribir:

$$Ax + By + Cz = D$$

Observar que se obtiene un resultado totalmente similar al seguido cuando analizamos si era posible obtener una única ecuación cartesiana sin parámetros.

$$Ax + By + Cz = D$$

esta forma es la **ecuación cartesiana del plano.**

EJEMPLO 7.3.6:

Sea el plano π que pasa por el punto *P* (0, 2, 0), y que es paralelo a $\vec{u} = (2,-1,0)$ y a $\vec{v} = (0,-2,4)$

Podemos expresar al plano π que determinan los datos por la forma vectorial paramétrica en coordenadas:

$$(x-0, y-2, z-0) = \lambda.(2,-1,0) + \mu.(0,-2,4) \quad \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mu \in \mathbb{R}$$

que equivale, por igualdad de ternas ordenadas, al siguiente sistema de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2.\lambda \\ y = 2 - \lambda - 2.\mu \\ z = 4.\mu \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

Podemos, además hallar un vector normal simultáneamente a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (-4,-8,-4)$$

que emplearemos para obtener la ecuación cartesiana del plano π :

$$(x-0, y-2, z-0).\vec{n} = 0$$

$$(x-0, y-2, z-0).(-4,-8,-4) = 0$$

Si resolvemos el producto escalar de esta última expresión obtenemos:

$$-4x - 8y + 16 - 4z = 0$$

$$-4x - 8y - 4z = -16$$

También equivale a: π: $2x + 4y + 2z = 8$ **(2)**

Hallemos un punto *Q* que pertenezca al plano π.

Por ejemplo, aquel *Q* en el que *x* = 3, *y* = 0.

Luego: 2.3 + 4.0 + 2.z = 8, de donde *z* = 1.

Se tiene entonces, que un punto del plano π es *Q* (3, 0, 1).

Hallemos ahora los parámetros λ y μ que corresponden *Q* usando el sistema **(1)**:

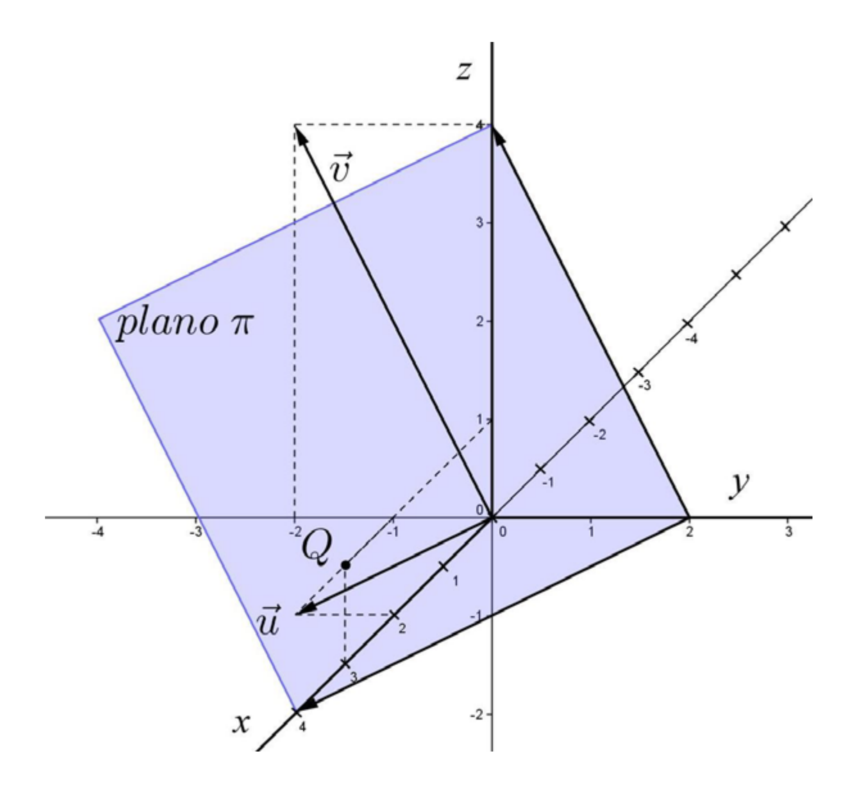
$x = 2.\lambda$ = 3 entonces $\lambda = \frac{3}{2}$

$z = 4.\mu$ = 1 entonces $\mu = \frac{1}{4}$

¿Para completar hay que ver si verifica $y = 2 - \lambda - 2.\mu$ = 0?

$y = 2 - \frac{3}{2} - 2.\frac{1}{4} = 0$ Efectivamente se cumple.

Luego para *Q,* los parámetros son $\lambda = \frac{3}{2}$ y $\mu = \frac{1}{4}$.



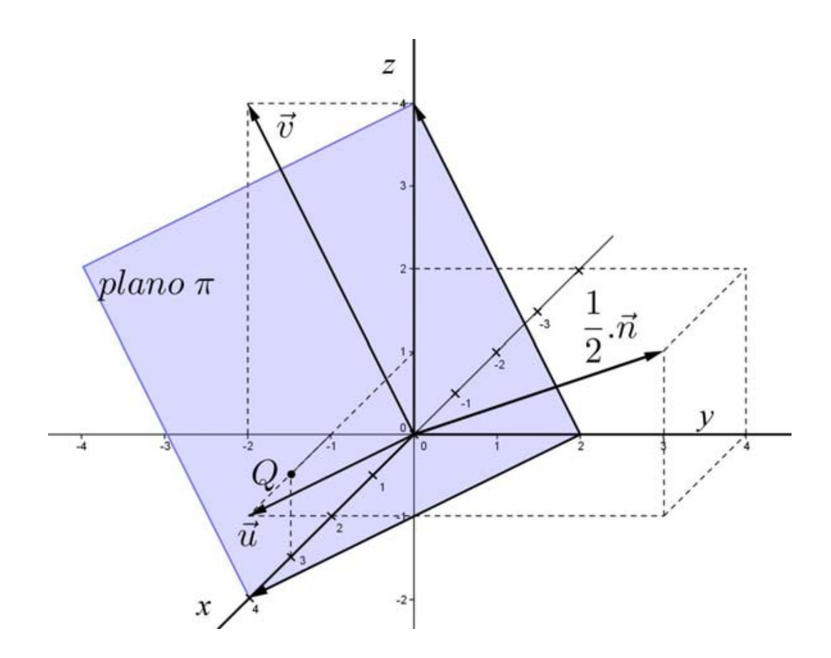
Si se varían λ y μ haciendo que tomen los valores en $\mathbb{R}$ se obtienen todos los puntos del plano π.

Observemos **(2)**, la última expresión cartesiana del plano π : $2x + 4y + 2z = 8$

Por el producto vectorial hallado con los datos se tiene que (2, 4, 2) es $-\frac{1}{2} \cdot \vec{n}$

Por lo cual el vector (2, 4, 2) es un vector normal al plano π.

Gráficamente:



EJERCICIO 7.3.7:

Hallar una ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto de coordenadas (3, –1, 4) y es perpendicular al vector $\vec{n}$ = (2, 3, 5). Represente gráficamente.

EJERCICIO 7.3.8:

Hallar una ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto de coordenadas (1, 1, –4) y es perpendicular al vector $\vec{n}$ = (2, 0, 0). Represente gráficamente.

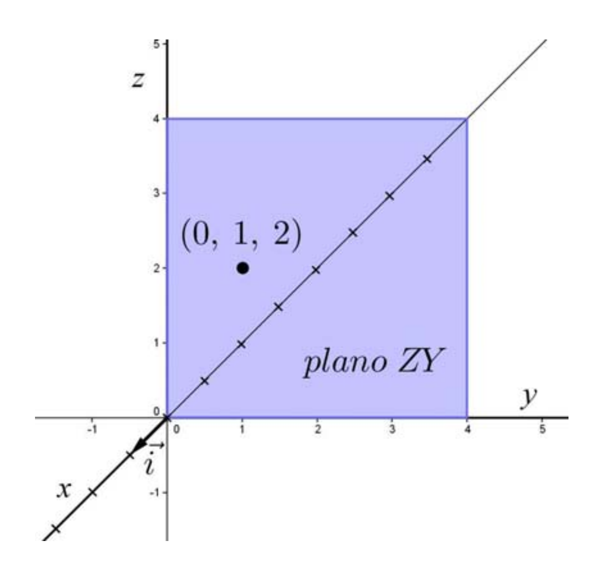
EJERCICIO 7.3.9:

Hallar una ecuación del plano que contiene al punto *T*(1, 1, 0), sabiendo que un vector normal a él es el $\vec{v}$ = (0, 0, 1). Representar gráficamente.

EJEMPLO 7.3.10:

En este apartado se representarán gráficamente algunos planos junto a sus expresiones.

- La ecuación $x = 0$ representa al plano ZY



Un vector normal al plano *ZY* es el $\vec{i} = (1, 0, 0)$.

Un punto que pertenece a dicho plano es, por ejemplo, $P_0(0, 1, 2)$.

Luego, una expresión para el plano está dada por:

$$(x - 0, y - 1, z - 2) \,.\, (1, 0, 0) = 0$$

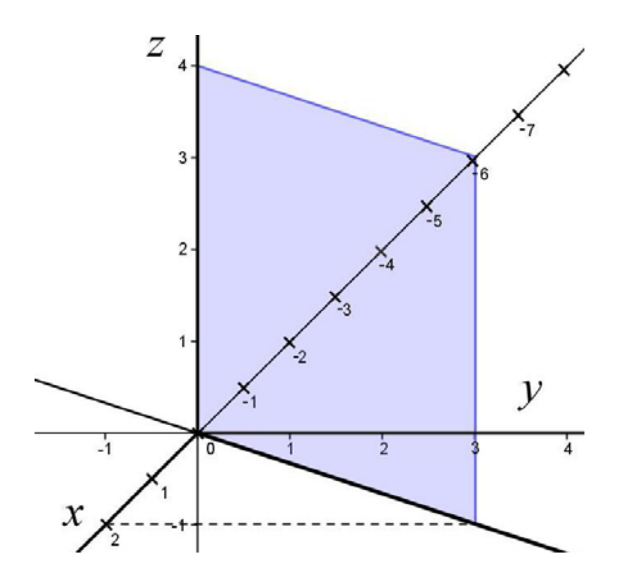
haciendo el producto escalar indicado se obtiene:

$$x.\,1 + (y - 1).0 + (z - 2).0 = 0$$

lo que equivale a: $x = 0$

- La ecuación $2x - y = 0$ describe al plano representado.

z toma cualquier valor real y las variables x e y se relacionan por medio de la expresión $y = 2x$

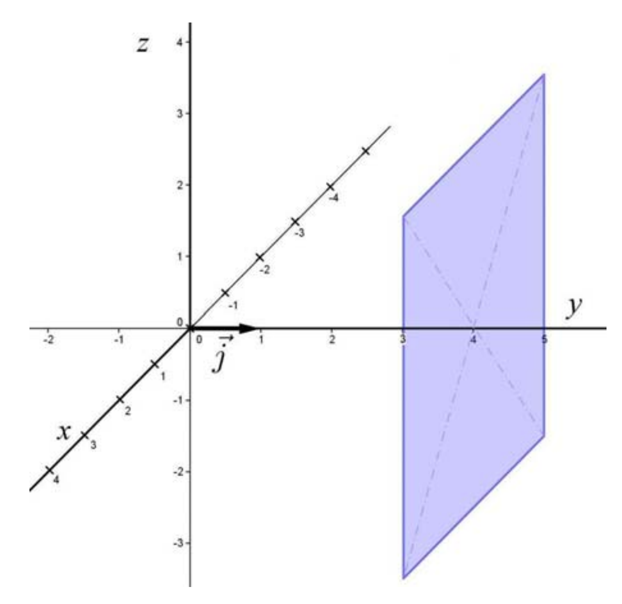


- La ecuación $y = 4$ describe a un plano paralelo al plano XZ.

Comparando la ecuación $y = 4$ con la ecuación cartesiana sin parámetros de un plano:

$A.x + B.\ y + C.\ z = D$, tal que un vector normal a él es $\vec{n} = (A, B, C)$;

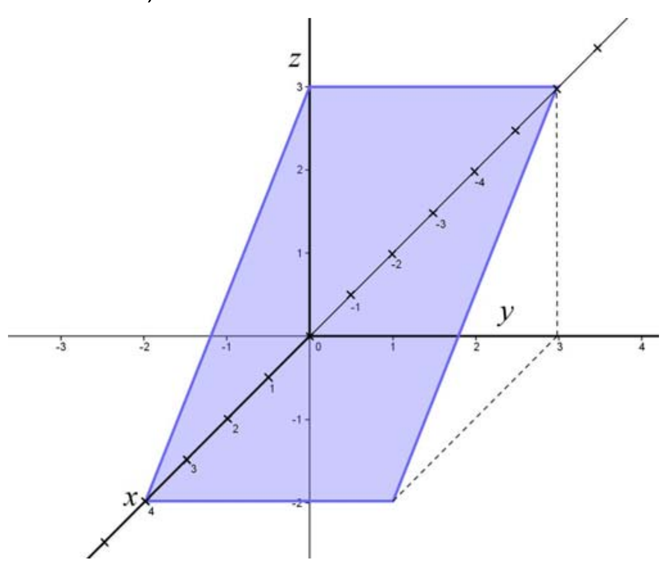
observamos que $\vec{j} = (0, 1, 0)$ es un vector normal al plano determinado por la ecuación dada.



- La ecuación $3x + 4z = 12$ describe el plano representado en el dibujo.

Mientras *y* puede tomar cualquier valor, *x* y *z* están relacionados por la ecuación $z = -\frac{3}{4}x+3$

(en el plano XZ es una recta….)



Intersección con los ejes cartesianos

Una forma muy útil de representar un plano es hallar (si existe) la intersección del mismo con los ejes cartesianos. Estos puntos forman un triángulo que nos da una idea de la ubicación relativa del plano con respecto a los octantes en los que queda dividido el espacio por el sistema coordenado.

Queda claro que el triángulo NO es el plano, forma parte de él.

- Dado el plano π : $2x + 3y + z = 6$ **;** hallemos las intersecciones con los ejes y representemos :

Para la intersección con el eje *z*:

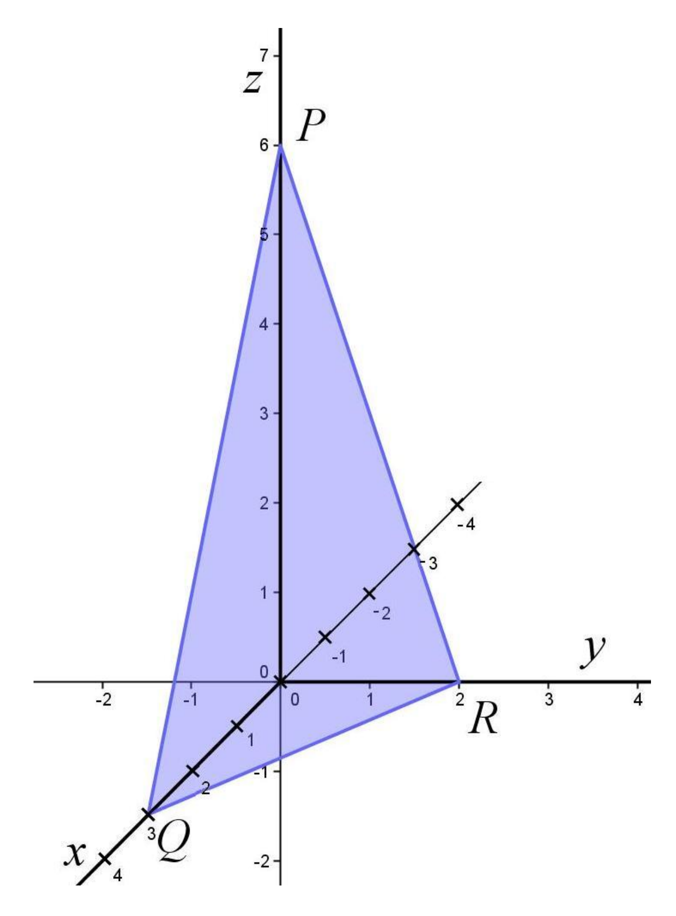
la ecuación del eje *z* está dada por $x = 0$ e $y = 0$ entonces sustituyendo en $2x + 3y + z = 6$ resulta

$z = 6$. La intersección es $P(0, 0, 6)$

Para la intersección con el eje *x*:
la ecuación del eje *x* está dada por
$y = 0$ y $z = 0$ entonces sustituyendo en
$2x + 3y + z = 6$ resulta $x = 3$.
La intersección es $Q(3, 0, 0)$

Para la intersección con el eje *y*:
la ecuación del eje *y* está dada por
$x = 0$ y $z = 0$ entonces sustituyendo en
$2x + 3y + z = 6$ resulta $y = 2$.
La intersección es $R(0, 2, 0)$

Su gráfica es:



- Hallemos las intersecciones con los ejes coordenados y grafiquemos el plano

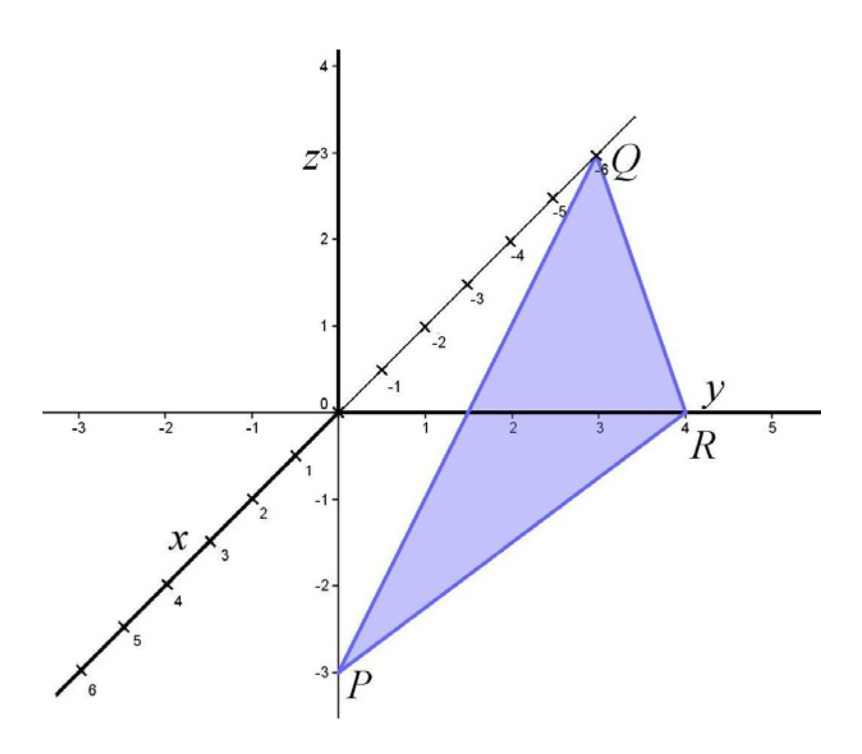
  α: $2x - 3y + 4z = -12$

Para la intersección con el eje *z*:
la ecuación del eje *z* está dada por $x = 0$ e $y = 0$ entonces sustituyendo en $2x - 3y + 4z = -12$ resulta
$z = -3$. La intersección es $P(0, 0, -3)$.

Para la intersección con el eje *x*:
la ecuación del eje *x* está dada por $y = 0$ y $z = 0$ entonces sustituyendo en $2x - 3y + 4z = -12$ resulta $x = -6$. La intersección es $Q(-6, 0, 0)$

Para la intersección con el eje *y*:
la ecuación del eje *y* está dada por $x = 0$ y $z = 0$ entonces sustituyendo en $2x - 3y + 4z = -12$ resulta $y = 4$. La intersección es $R(0, 4, 0)$

Su gráfica es (quedan *P* y *Q* por detrás de los planos….) :



➢ Planos paralelos

Sean los planos π_1 : $2x - y + 2z = 6$

π_2 : $2x - y + 2z = 4$

Obviamente son planos paralelos pues sus **vectores normales son paralelos**. Verifique.

Hallemos la intersección de cada plano con los ejes coordenados.

π_1 : $2x - y + 2z = 6$

Para la intersección con el eje *z*:

la ecuación del eje *z* está dada por $x = 0$ e $y = 0$ entonces sustituyendo en $2x - y + 2z = 6$ resulta

$z = 3$. La intersección es $P(0, 0, 3)$.

Para la intersección con el eje x:
la ecuación del eje x está dada por $y = 0$ y $z = 0$ entonces sustituyendo en $2x - y + 2z = 6$ resulta
$x = 3$. La intersección es $Q(3, 0, 0)$.

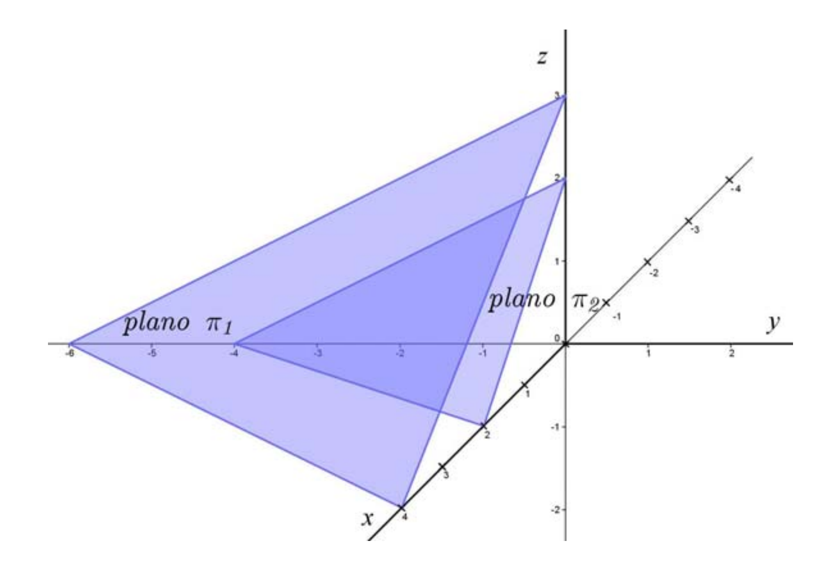
Para la intersección con el eje y:
la ecuación del eje y está dada por $x = 0$ y $z = 0$ entonces sustituyendo en $2x - y + 2z = 6$ resulta
$y = -6$. La intersección es $R(0, -6, 0)$.

Ídem para π_2 : $2x - y + 2z = 4$

Para la intersección con el eje z:
la ecuación del eje z está dada por $x = 0$ e $y = 0$ entonces sustituyendo en $2x - y + 2z = 4$ resulta
$z = 2$. La intersección es $P(0, 0, 2)$.

Para la intersección con el eje x:
la ecuación del eje x está dada por $y = 0$ y $z = 0$ entonces sustituyendo en $2x - y + 2z = 4$ resulta
$x = 2$. La intersección es $Q(2, 0, 0)$.

Para la intersección con el eje y:
la ecuación del eje y está dada por $x = 0$ y $z = 0$ entonces sustituyendo en $2x - y + 2z = 4$ resulta
$y = -4$. La intersección es $R(0, -4, 0)$.



EJERCICIO 7.3.11:

Hallar una ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto de coordenadas (0, 1, 0) y es perpendicular al plano coordenado $x\,y$. Represente gráficamente.

EJERCICIO 7.3.12:

Hallar una ecuación cartesiana del plano que pasa por los puntos R(– 1, 2, 3) y S(3, 2, 1) y es paralelo vector $\vec{v}$ = (2, 0, 0). Represente gráficamente.

EJERCICIO 7.3.13:

Hallar una ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto de coordenadas (–1, 2, 3) y contiene a la recta de ecuación $\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{2} = z+2$. Represente gráficamente.

EJERCICIO 7.3.14:

Hallar una ecuación del plano que es paralelo al dado por $2\,x - y + 2\,z = 6$ y pasa por el punto (2, 1, 0). Represente gráficamente.

EJERCICIO 7.3.15:

Una ecuación de un plano es $2x + 3y - z = 3$. Represente gráficamente.

a) Hallar un vector normal al plano y unitario.

b) Hallar dos vectores paralelos al plano.

c) Determinar una ecuación de un plano que pasa por (2, 2, 1) y es perpendicular al plano dado.

EJERCICIO 7.3.16:

Una ecuación de un plano es $\begin{cases} x = 2 + \lambda.3 + \mu.2 \\ y = 1 + \lambda.0 + \mu.4 \\ z = 1 + \lambda.1 + \mu.3 \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mu \in \mathbb{R}$

Y la de otro es $5x - 3y - z = 5$, ¿estos planos son paralelos?, ¿son perpendiculares? Justifique su respuesta.

EJERCICIO 7.3.17 :

Dados los puntos $A(2, 1, 3)$, $B(-2, 5, 6)$, $C(3, 2, 0)$ y $D(3, 1, 7)$, hallar una ecuación del plano que contiene $\overrightarrow{AB}$ y es paralelo a $\overrightarrow{CD}$. Represente gráficamente.

EJERCICIO 7.3.18:

a) Escribir una ecuación de la recta que pasa por Q (0, 3, 2) y es paralela al plano de ecuación

$3x - y + 2 = 0$ y al plano que pasa por Q, el origen y $P(1, 0, 2)$. Represente gráficamente.

b) Escribir una ecuación para la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano de ecuación $5x - 3y - z = 5$. Represente gráficamente.

EJERCICIO 7.3.19:

Se define como **ángulo entre dos planos** al ángulo entre vectores normales a cada uno de ellos.

a) Hallar el ángulo entre los planos de ecuaciones $3x - y + 2 = 0$ y $5x - 3y - z = 5$

b) Hallar el ángulo entre los planos de ecuaciones $\begin{cases} x = 2 + \lambda.3 + \mu.2 \\ y = 1 + \lambda.0 + \mu.4 \\ z = 1 + \lambda.1 + \mu.3 \end{cases}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mu \in \mathbb{R}$

y $6x - 4y + z = 5$. Represente gráficamente.

EJERCICIO 7.3.20:

a) Idee una manera de encontrar la distancia entre un punto del espacio y un plano. Represente para lograrlo.

b) Halle la distancia entre P(2, 1, 0) y el plano de ecuación $4x - 2y + 2z = 5$

EJERCICIO 7.3.21:

a) Idee una manera de encontrar la distancia entre una recta del espacio y un plano.

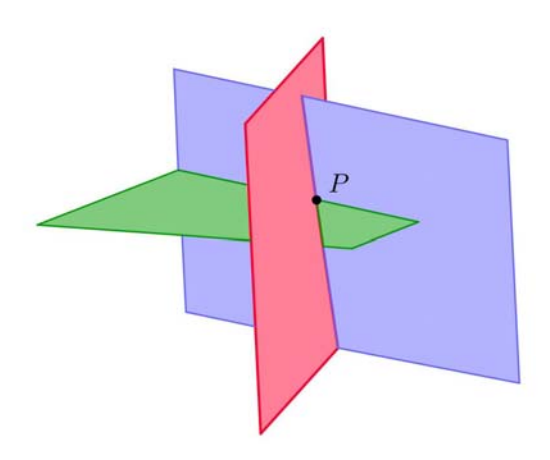
b) Halle la distancia entre el plano $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y}{2} = z+2$; y el plano de ecuación

$4x - 2y + 2z = 5$

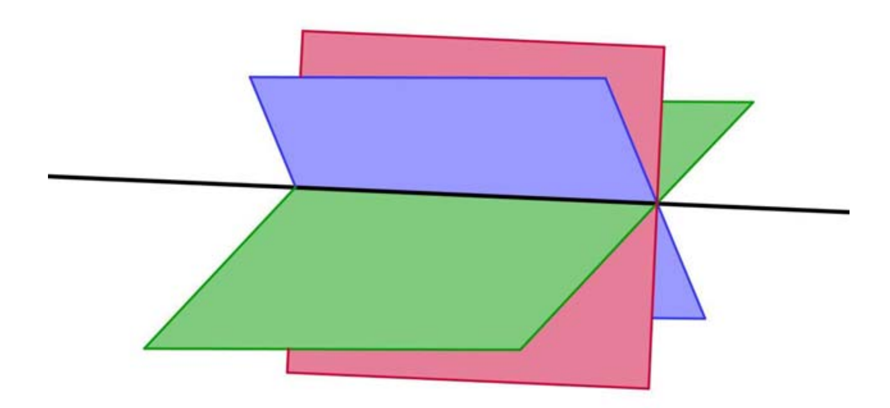
ANEXO 1 – Intersecciones de planos

Veamos **algunas** posibles situaciones al analizar la intersección entre planos.

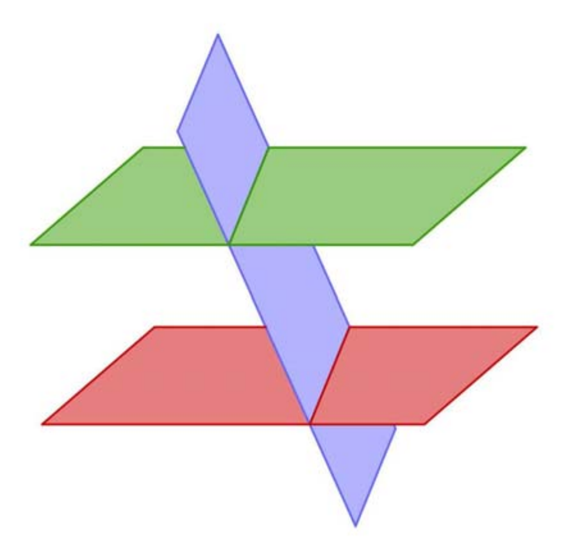
- Tres planos pueden interceptarse en un punto



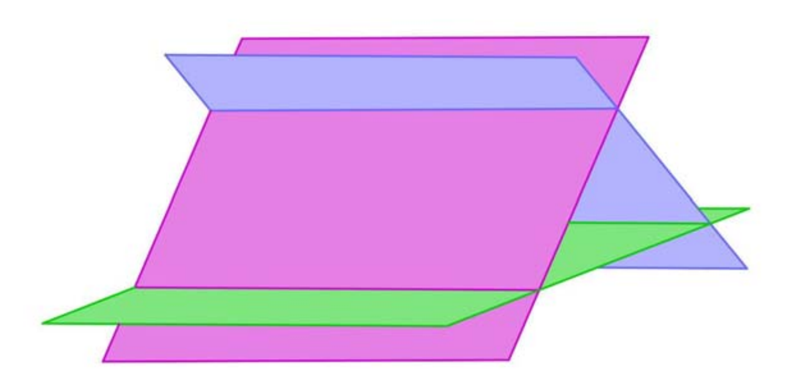
- Dados tres planos, pueden interceptarse en una recta



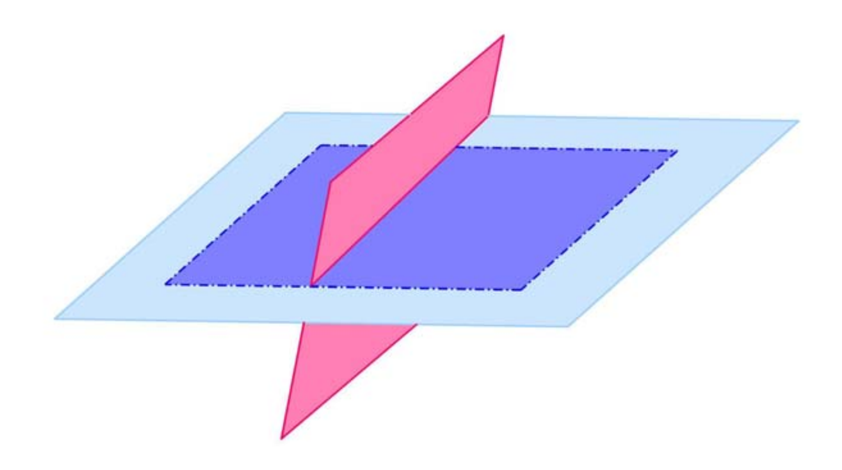
- Dados tres planos, pueden ser dos paralelos y uno secante.



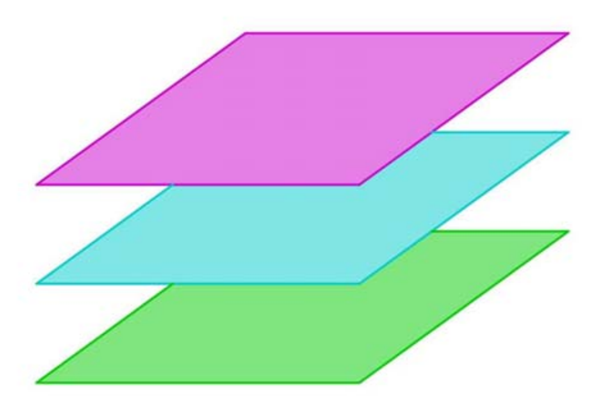
- Planos secantes dos a dos. Los tres planos forman una superficie prismática.



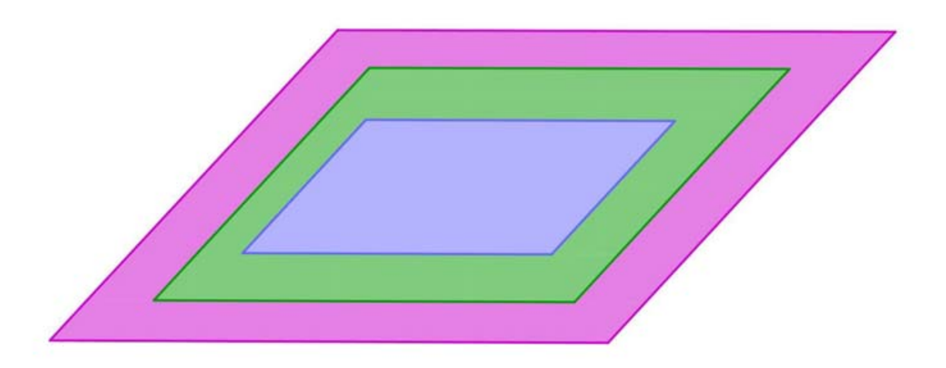
- Dos planos coincidentes y uno secante



- Planos paralelos y distintos dos a dos



- Planos coincidentes



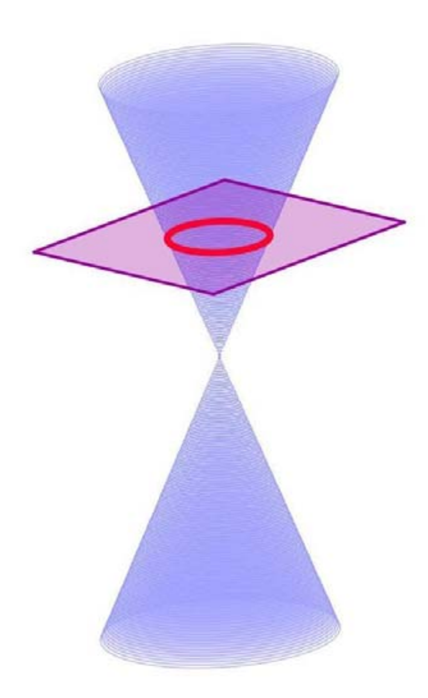
ANEXO 2: Intersecciones analíticas de un cono con un plano.

Las cónicas, estudiadas en el Capítulo 5, se denominan así pues ya desde la antigüedad se las pensaba como intersecciones de un cono con planos de diferente inclinación.
A modo de ilustración de los comentarios vertidos en el capítulo, demostraremos analíticamente las intersecciones que se generan la intersecar un cono de la forma: $x^2 + y^2 = z^2$ con distintos planos. Este es un cono con eje en el eje *z*.

Se hará en forma particular con un ejemplo concreto con la esperanza de no complicar al lector con cuentas generales.
Para profundizar los conceptos acerca de plano y sus ecuaciones, deberá revisar el **Capítulo 7.**

Primer caso:

Cono $x^2 + y^2 = z^2$ cortado con un **plano perpendicular al eje del cono**, es decir un plano de la forma *z* = *k*. Supongamos un plano particular, digamos *z* = 4.



El eje del cono está dirigido por el vector (0, 0, 1) y el plano *z* = 4 tiene como vector normal al vector $\vec{n} = (0,0,1)$, luego el plano y el eje del cono son perpendiculares.

Así se tiene que la intersección es:
$x^2 + y^2 = 4^2$, esto es la ecuación de una **circunferencia**.

Segundo caso:

Cono $x^2+y^2=z^2$ cortado con un **plano oblicuo al eje del cono** (el eje *z*)**, que no sea paralelo a la generatriz y que forme con el eje un ángulo mayor que el que forma el eje con la generatriz.**

En nuestro caso, son generatrices del cono las rectas *x* = *z*, *y* = *z*, etc., y todas ellas forman un ángulo de 45° con el eje, luego precisamos tomar un plano que forme un ángulo mayor a 45°.

Por ejemplo: el plano $\frac{1}{2}y+z=3$

Su vector normal es $\vec{n}=\left(0,\frac{1}{2},1\right)$, y si hacemos cuentas el ángulo que se forma entre el vector director del eje y éste es:

$$(0,0,1).\left(0,\frac{1}{2},1\right)=\left|(0,0,1)\right|.\left|\left(0,\frac{1}{2},1\right)\right|.\cos\theta$$

$$1=1.\sqrt{\frac{5}{4}}.\cos\theta$$

Si despejamos, $\theta=26°33'54''$, por lo que el plano y el eje del cono forman un ángulo de $63°26'6''$.

Resolvamos la intersección:

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ \frac{1}{2}y+z=3 \end{cases}$$

Tenemos, despejando de la segunda ecuación : $z=3-\frac{1}{2}y$, que al ser reemplazada en la primera :

$$x^2+y^2=\left(3-\frac{1}{2}y\right)^2$$

Operando:

$$x^2+y^2=9-3y+\frac{1}{4}y^2$$

$$x^2+\frac{3}{4}y^2+3y=9$$

Completando cuadrados:

$$x^2+\frac{3}{4}.\left(y^2+2.y.2+2^2\right)=9+3$$

$$x^2+\frac{3}{4}.(y+2)^2=12$$

Dividiendo a ambos miembros por 12,
y simplificando :

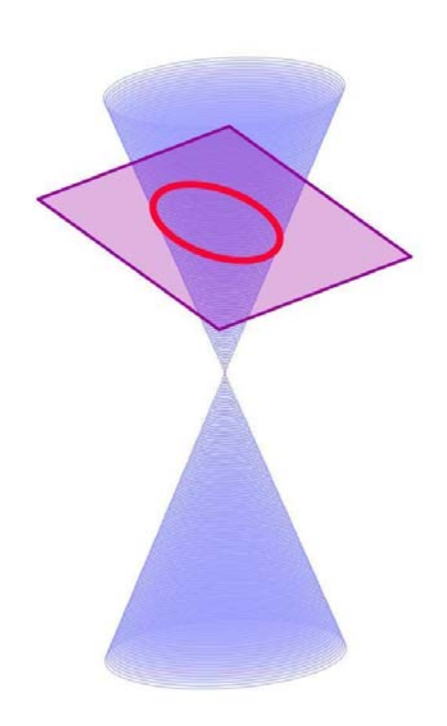
$$\frac{x^2}{12}+\frac{3}{4.12}.(y+2)^2=1$$

$$\frac{x^2}{12}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$$

Obtenemos entonces:

$$\frac{x^2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2}+\frac{(y+2)^2}{4^2}=1$$

que es la ecuación de una elipse



Tercer caso:

Cono $x^2+y^2=z^2$ cortado con un **plano oblicuo al eje del cono, que sea paralelo a la generatriz**.

En nuestro caso, son generatrices del cono las rectas *x* = *z, y* = *z*, etc, y todas ellas forman un ángulo de 45° con el eje, luego precisamos tomar un plano que forme un ángulo de 45°. Por ejemplo: el plano $-y+z=1$

Verifiquémoslo. Su vector normal es $\vec{n}=(0,-1,1)$, y si hacemos cuentas el ángulo que se forma entre el vector director del eje *z* y éste es:

$$(0,0,1).(0,-1,1)=|(0,0,1)|.|(0,-1,1)|.\cos\theta$$

$$1=1.\sqrt{2}.\cos\theta$$

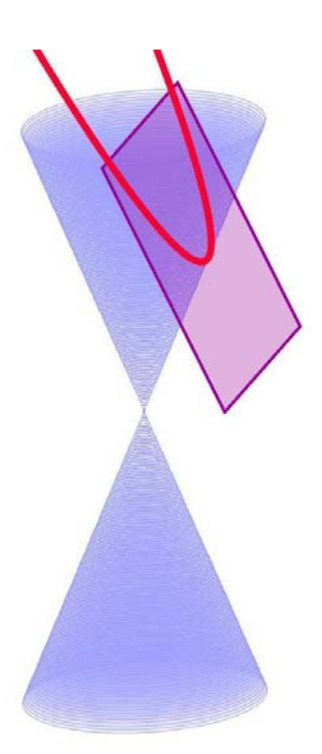
Y despejando $\theta=45°$, por lo que el plano y el eje del cono forman un ángulo de $45°$.

Resolvamos la intersección:

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ -y+z=1 \end{cases}$$

Tenemos, despejando de la segunda ecuación : $z=1+y$, que reemplazando en la primera :

$$x^2+y^2=(1+y)^2$$



Operando:

$$x^2+y^2=1+2y+y^2$$

$$x^2=1+2y$$

Que se puede reescribir como:

$$x^2=4.\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{2}\right)$$

que es la ecuación de una parábola.

Cuarto caso:

Cono $x^2+y^2=z^2$ cortado con un **plano oblicuo al eje del cono, que forma con el eje del cono un ángulo menor al que forman el eje *z* y la generatriz.**

En nuestro caso, son generatrices del cono las rectas *x* = *z, y* = *z*, etc, y todas ellas forman un ángulo de 45° con el eje, luego precisamos tomar un plano que forme un ángulo menor a 45°. Por ejemplo: el plano $2y+z=4$

Su vector normal al plano es $\vec{n}=(0,2,1)$, y si hacemos cuentas el ángulo que se forma entre el vector director del eje *z* y éste es:

$$(0,0,1).(0,2,1)=|(0,0,1)|.|(0,2,1)|.\cos\theta$$

$$1=1.\sqrt{5}.\cos\theta$$

Si despejamos, $\theta=63°26'6''$, por lo que el plano y el eje del cono forman un ángulo de $26°33'54''$

Resolvamos la intersección:

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ 2y+z=4 \end{cases}$$

Tenemos, despejando de la segunda ecuación: $z=4-2y$, que al ser reemplazada en la primera

$$x^2+y^2=(4-2y)^2$$

Operando:

$$x^2+y^2=16-16y+4y^2$$

$$x^2-3y^2+16y=16$$

Completando cuadrados:

$$x^2-3.\left(y^2-2.y.\frac{8}{3}+\frac{64}{9}\right)=16-3.\frac{64}{9}$$

$$x^2 - 3.\left(y - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{144 - 192}{9}$$

Dividiendo a ambos miembros por $-\dfrac{48}{9}$:

$$\frac{9.x^2}{-48} - \frac{27.\left(y - \frac{8}{3}\right)^2}{-48} = 1$$

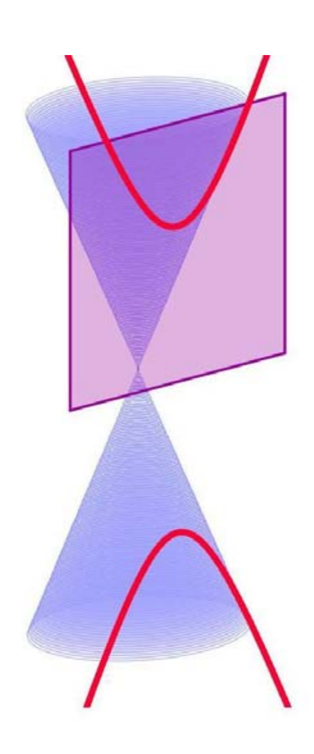
Simplificando y reordenando:

$$\frac{3x^2}{-16} + \frac{9.\left(y - \frac{8}{3}\right)^2}{16} = 1$$

$$\frac{\left(y - \frac{8}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}} - \frac{x^2}{\frac{16}{3}} = 1$$

Obtenemos entonces:

$$\frac{\left(y - \frac{8}{3}\right)^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$



que es la ecuación de una hipérbola.

CAPITULO 8
Números complejos

Introducción

En este capítulo introducimos uno de los conceptos más importantes de la Matemática.

En el Renacimiento los matemáticos pensaban que ya se habían descubierto todos los números. Todos los números estaban ubicados en la recta numérica, una línea recta infinitamente larga cuyo "centro" es el 0. Las fracciones ocupan los espacios entre los enteros y los irracionales se intercalan entre ellos. Todos los números así ubicados responderían a todos los problemas que se pudieran plantear.

Pero en el siglo XVI el italiano Rafaello Bombelli estudiando las raíces cuadradas de distintos números se planteo una pregunta imposible de contestar:*¿ cuál es la* $\sqrt{-1}$? Los candidatos (1 y -1) no respondían al problema ya que al cuadrado dan 1.

Otro italiano, también del siglo XVI, Gerolamo Cardano operó con raíces cuadradas de números negativos, tratando de resolver el problema: "dividir el número 10 en dos partes, de tal forma que una de las partes, multiplicada por la otra, de 40".

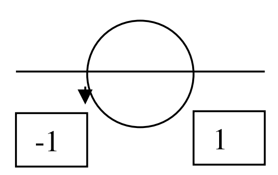
Cardano en su trabajo plantea como solución a los números $5+\sqrt{-15}$ y $5-\sqrt{-15}$ y admite que operando como si esos números fueran números reales solucionaban el problema.

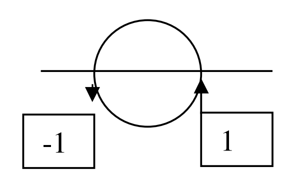
La solución introducida por Bombelli fue crear un número nuevo que indicó con *i* llamado *número imaginario,* que se definía como respuesta a la pregunta *cuál es la raíz cuadrada de -1*? Para otros historiadores es Leonardo Euler (mediados del siglo XVIII) quien introduce a *i* como símbolo para representar a $\sqrt{-1}$.

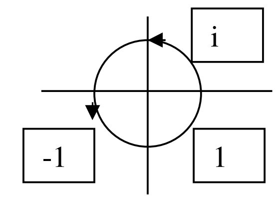
La existencia de los números negativos tenía sustento en la realidad pues se asocian con las deudas. Pero no había nada del mundo real que avalara la existencia del número imaginario.

Pero a fines del siglo XVIII y principios del XIX los matemáticos Caspar Wessel, Jean Argand y Karl Gauss, encontraron de manera independiente una interpretación

geométrica para los números "imaginarios": *los números imaginarios representan rotaciones.*







El operador **-1**
transforma 1 en -1
Una rotación de
180°

El operador -**1**
aplicado dos veces
transforma 1 en
(**-1**) .(**-1**) = 1
Una rotación de 360°

El operador **i** equivale
a una rotación de 90°
aplicado dos veces
transforma 1 en
i .**i** = - 1

Se verá una de las posibles maneras de abordar los números complejos que nos permiten resolver (con ojos del siglo XX o XXI) el problema de las raíces (de cualquier índice) de los números negativos o solucionar la ecuación $x^2 +1 =0$ de inocente apariencia.

1. Definiciones básicas

Designemos por $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales con las operaciones de suma y producto habituales.
Consideremos el conjunto de todos los **pares ordenados** de números reales.

El conjunto de los **números complejos** que notaremos $\mathbb{C}$, es el conjunto de elementos de la forma $z = (a, b)$ con $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$
esta manera de expresar al complejo z, se llama **forma de par ordenado**

Igualdad: Si a, b, c, d son reales $(a,b) = (c,d)$ si y sólo si $\begin{cases} a = c \\ Y \\ b = d \end{cases}$

Por lo tanto si a, b son reales en general $(a,b) \neq (b,a)$. Analice si vale la igualdad en algún caso.

En el conjunto $\mathbb{C}$ se definen dos operaciones: la **suma,** que indicaremos por **+** y la **multiplicación,** que indicaremos por **.** que están dadas por las siguientes igualdades:

(S) $(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$

(M) $(a,b).(c,d) = (a.c - b.d, a.d + b.c)$

En la igualdad **(S)** hay tres apariciones del símbolo +. La primera de ellas es la que estamos definiendo, se da "el como" sumar dos complejos. Las otras apariciones de + está indicando la conocida suma entre números reales.
Para la igualdad **(M)** caben similares consideraciones para **.** y + .

EJEMPLO 8.1.1:
Calculemos:
a) (2,1) + (1,3) = (2+1, 1+3) = (3, 4)
b) (-3, 1) + (3, 0) = (-3 + 3, 1+ 0) = (0, 1)
c) $(2,5) + (\sqrt{3}, -3) = (2 + \sqrt{3}, 5 + (-3)) = (2 + \sqrt{3}, 2)$
d) $(1,2).(3,5) = (1.3 - 2.5, 1.5 + 2.3) = (3 - 10, 5 + 6) = (-7, 11)$
e) $(3,-1).(1,1) = (3.1 - (-1).1, 3.1 + (-1).1) = (3 + 1, 3 - 1) = (4, 2)$
f) (0 ,-2).(1,0) = (0.1 - (-2).0, 0.0 +(-2).1) = (0 + 0, 0 -2) =(0, -2)

Unas definiciones importantes respecto a nomenclatura:

Dado $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ con a y b reales,

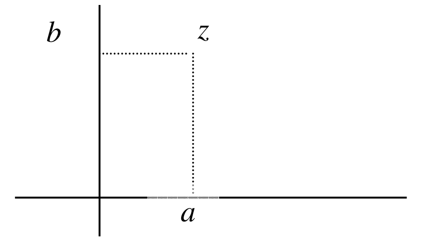
a se llama ***parte real*** del complejo z, $a = Re(z)$

b se llama ***parte imaginaria*** del complejo z, $b = Im(z)$

➢ *Representación gráfica*

Se sabe que la recta está cubierta por los números reales.
Como los complejos son pares ordenados de reales los representaremos sobre un par de rectas perpendiculares (horizontal y vertical). La parte real del complejo se representa sobre la recta horizontal y la parte imaginaria sobre la vertical.

Si $z = (a, b)$



Llamaremos **eje real** al eje horizontal y **eje imaginario** al eje vertical.



Observar que la nomenclatura de “imaginario” o “parte imaginaria” de un complejo no significa que por ellos no se estén aludiendo a números reales.

2. Propiedades de la suma y la multiplicación

La suma de complejos verifica las conocidas propiedades de esta operación en $\mathbb{R}$.
Por eso veremos que estas propiedades se verifican fácilmente.

Para la Suma:

Sean $z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}, z_3 \in \mathbb{C}$

(MS) Si $z_1 = z_2$ entonces cualquiera sea $z \in \mathbb{C}$ $z_1 + z = z_2 + z$ ***Monotonía***

(AS) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ ***Asociativa***

(CS) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ***Conmutativa***

(NS) Existe un único elemento $e \in \mathbb{C}$ tal que para todo $z \in \mathbb{C}$ $e + z = z$, siendo $e = (0,0)$ e es el ***Elemento Neutro de la suma***

(OS) Para todo $z \in \mathbb{C}$ existe un único $z' \in \mathbb{C}$ tal que $z + z' = (0,0)$, siendo $z' = (-a,-b)$
z' es el ***Opuesto de*** z

Notación:

Al $(0,0)$ se lo llama el ***cero complejo***. Puede notarse también como ***0*** ó $0_{\mathbb{C}}$.

Al $z' = (-a, -b)$ se lo anota $-z$ si $z = (a,-b)$.

EJERCICIO 8.2.1

a) Verificar las propiedades antes mencionadas para (-2,3), (1,4) y (3, -5). Representar cada complejo dado y el resultado de las operaciones.
b) Hallar los opuestos de cada uno de esos complejos y representarlos en un mismo gráfico.
c) Ídem a) y b) para (-1,0) , (2, 0) y (0,3).

❖ Demostración de **(MS):**

Consideremos $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$ y $z = (a, b)$

Por definicion $z_1 + z = (a_1 + a, b_1 + b)$
$z_2 + z = (a_2 + a, b_2 + b)$

Por hipotesis $z_1 = z_2$ lo cual equivale a $\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$

como la propiedad de monotonia vale en $\mathbb{R}$ se tiene

$\begin{cases} a_1 + a = a_2 + a \\ b_1 + b = b_2 + b \end{cases}$ lo que equivale a $z_1 + z = z_2 + z$

♦

❖ Demostración de (CS):

Consideremos $z_1 = (a_1, b_1)$ y $z_2 = (a_2, b_2)$

Por definicion $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
y como a_1, a_2, b_1, b_2 son números reales $a_1 + a_2 = a_2 + a_1$ y $b_1 + b_2 = b_2 + b_1$
por propiedad conmutativa de la suma en $\mathbb{R}$.
Por lo tanto $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_2 + a_1, b_2 + b_1) = z_2 + z_1$

♦

EJERCICIO 8.2.2:

Demostrar las propiedades **(AS)**, **(NS)** y **(OS)** antes mencionadas.

EJEMPLO 8.2.3:

Hallar z tal que (2, 3) + z = (6, 1)

Por la existencia del opuesto y monotonía sumando a ambos miembros - (2,3), asociando y propiedad del ***0*** se tiene:

$$-(2, 3) + (2, 3) + z = -(2, 3) + (6, 1)$$

$$(0,0) + z = (-2, -3) + (6, 1)$$

$$z = (-2 + 6, -3 + 1)$$

$$z = (4, -2)$$

Dados los complejos z_1 y z_2 se define la **resta** $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$



También la multiplicación satisface propiedades similares a las que se verifican en $\mathbb{R}$.

Para la Multiplicación:

Sean $z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}, z_3 \in \mathbb{C}$

(M) Si $z_1 = z_2$ entonces cualquiera sea $z \in \mathbb{C}$ $z_1 . z = z_2 . z$ ***Monotonía***

(AM) $z_1 . (z_2 . z_3) = (z_1 . z_2) . z_3$ ***Asociativa***

(CM) $z_1 . z_2 = z_2 . z_1$ ***Conmutativa***

(D) $z_1 .(z_2 + z_3) = z_1 . z_2 + z_1 . z_3$ ***Distributiva de la multiplicación en la suma***

(NM) Existe un único elemento $u \in \mathbb{C}$ tal que para todo $z \in \mathbb{C}$ $u. z = z$

u es el ***Elemento neutro de la multiplicación.*** Se verá que $u = (1,0)$

(IM) Para todo $z \in \mathbb{C}$ y $z \neq (0,0)$, existe un único $z^* \in \mathbb{C}$ tal que $z . z^* = (1,0)$

z^* es ***el Inverso de*** z

EJERCICIO 8.2.4:

Verificar las propiedades antes mencionadas para (-2, 8) , (- 1, 5) y (4,3).

Representar los resultados.

- Demostración de **(D):**

Consideremos $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$ y $z_3 = (a_3, b_3)$

Por definicion de suma $z_2 + z_3 = (a_2 + a_3, b_2 + b_3)$

Por definición de producto $z_1 .(z_2 + z_3) = (a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3), a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3))$

y como $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ son números reales se tiene que:

$a_1(a_2 + a_3) = a_1 a_2 + a_1 a_3$, $b_1(b_2 + b_3) = b_1 b_2 + b_1 b_3$,

$a_1(b_2 + b_3) = a_1 b_2 + a_1 b_3$ y $b_1(a_2 + a_3) = b_1 a_2 + b_1 a_3$

por propiedad distributiva del producto en la suma en $\mathbb{R}$.

Por lo tanto $z_1.(z_2+z_3)=(a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3, a_1b_2+a_1b_3+b_1a_2+b_1a_3)=$
por definición de suma $(a_1a_2-b_1b_2, a_1b_2+b_1a_2)+(a_1a_3-b_1b_3, a_1b_3+b_1a_3)=$
por definición de producto $(a_1,b_1).(a_2,b_2)+(a_1,b_1).(a_3,b_3)=z_1.z_2+z_1.z_3$

En consecuencia $z_1.(z_2+z_3)=z_1.z_2+z_1.z_3$

♦

EJERCICIO 8.2.5:

Demostrar las propiedades **(MM)**, **(AM)**, **(CM)** antes mencionadas.

EJERCICIO 8.2.6:

Demostrar que $u = (1, 0)$ *cumple ser el neutro de la multiplicación* y representar.

Notación:

A $u = (1,0)$ se lo llama **unidad compleja**. Puede notarse como ***1*** ó $1_{\mathbb{C}}$ **.**

Para $z \neq (0,0)$ a z^*, el inverso multiplicativo de z se lo anota z^{-1}.

EJERCICIO 8.2.7:

Demostrar que dado $z = (a, b) \neq (0,0)$, entonces $z^* = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

Le quedó claro ¿por qué $z = (a, b) \neq (0,0)$?

EJEMPLO 8.2.8:

Calcular el inverso de z = (-1, 3), además verificar que el producto de z y su inverso es ***1***

Si $z=(-1,3)$ entonces $z^{-1}=\left(\frac{-1}{(-1)^2+3^2}, \frac{-3}{(-1)^2+3^2}\right)=\left(\frac{-1}{10}, \frac{-3}{10}\right)$ además

$$(-1,3).\left(\frac{-1}{10}, \frac{-3}{10}\right)=\left(-1.\frac{-1}{10}-3.\frac{-3}{10}, -1.\frac{-3}{10}+3.\frac{-1}{10}\right)=\left(\frac{1}{10}+\frac{9}{10}, \frac{3}{10}-\frac{3}{10}\right)=\left(\frac{10}{10}, 0\right)=(1,0)$$

Dados los complejos z_1 y z_2 , con $z_2 \neq (0,0)$ se define la ***división*** $\frac{z_1}{z_2} = z_1 . z_2^{-1}$

EJERCICIO 8.2.9:

Dados z_1= (-2, 0) , z_2 = (3, 5) , z_3 = (4, 1) , z_4 = (0, 3)

a) Calcular sus opuestos. Representar.

b) Calcular $z_1 + z_2$, $z_4 - z_2$, $z_3 + (z_4 - z_2)$

c) Calcular sus inversos. Representar.

d) Calcular $\frac{z_1 - z_4}{z_2} + z_3^{-1}$

EJEMPLO 8.2.10:

Resolver la ecuación (2, 1) + (3, 4) . z = (2, -5)

Por existencia del opuesto de (2, 1), monotonía y asociatividad de la suma y propiedad del ***0*** se tiene:

$$(-2, -1) + (2, 1) + (3, 4) . z = (-2, -1) + (2, 5)$$

$$(0,0) + (3, 4) . z = (-2, -1) + (2, 5)$$

$$(3, 4) . z = (-2 + 2, -1+ 5)$$

$$(3, 4) . z = (0, 4)$$

Por existencia del inverso de (3, 4), monotonía y asociatividad de la multiplicación y propiedad del ***1*** se tiene:

$$(3,4)^{-1}.(3,4).z = (3,4)^{-1}.(0,4)$$

$$\boldsymbol{1}.z = \left(\frac{3}{3^2+4^2}, \frac{-4}{3^2+4^2}\right).(0,4)$$

$$z = \left(\frac{3}{25}, \frac{-4}{25}\right).(0,4)$$

$$z = \left(\frac{3}{25}.0 - \frac{-4}{25}.4, \frac{3}{25}.4 + \frac{-4}{25}.0\right)$$

$$z = \left(\frac{16}{25}, \frac{12}{25}\right)$$

EJERCICIO 8.2.11:

Resolver las siguientes ecuaciones:

a) (-3, 4) . z = (2, -3). (2, 6)

b) (5, 1) + (9, -2) . z = (-10, 2) + (6, -3)

c) (3, 0) - (6, 4) + (2, 1) = (5, -3). z

d) (3, -8). z + (0, 6) = (-3, 2). z - (-2, 0)

e) (4, 3). z + (4, -5) = (4, 3) .z

f) (-2,1). z – (3, 0).(2, 2) = (0, 0)

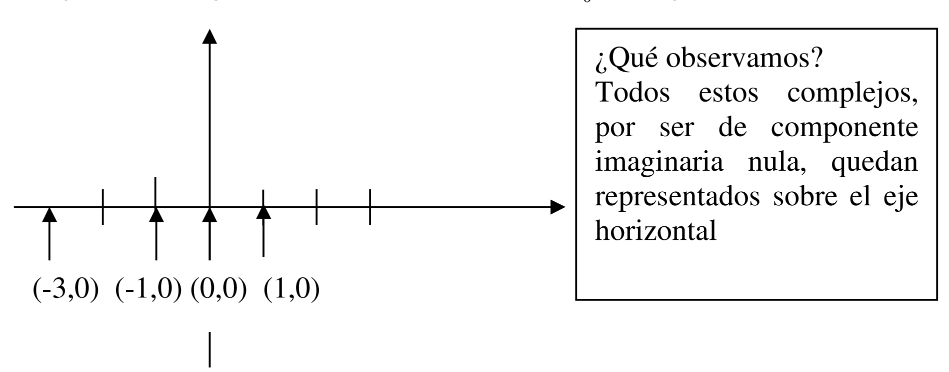
g) Representar cada una de las soluciones y sus opuestos.

3. Identificación

Se verá un subconjunto especial de $\mathbb{C}$, el conjunto $\mathbb{C}_0 = \{(a,b) \in \mathbb{C} : b = 0\}$.

Son elementos de $\mathbb{C}_0$: (1,0), (0,0), (-1,0), (-3,0), etc., todos aquellos complejos de componente imaginaria nula.

Vamos a representar algunos de los elementos de $\mathbb{C}_0$ en el plano:



EJERCICIO 8.3.1:

a) Calcular: (2,0) + (-3,0) =

(-1,0) + (4, 0) =

$(a_1, 0) + (a_2, 0) =$

b) Calcular los opuestos de (17,0) ; (-3,0) ; (1,0)

c) Calcular el opuesto de $(a, 0)$

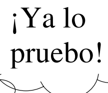
d) Calcular: (3,0) . (6.0) =

(4,0). (-7,0) =

$(a_1, 0) \cdot (a_2, 0) =$

e) Calcular el inverso de $(a,0)$, siendo $a \neq 0$

Entre el conjunto $\mathbb{C}_0$ y $\mathbb{R}$ existe de una función biyectiva que a cada complejo de parte imaginaria nula le asigna su parte real: $(a,0) \quad \rightarrow \quad a$



Además por los resultados del ejercicio anterior se tiene:

$$(a_1,0)+(a_2,0) \quad \rightarrow \quad a_1+a_2$$

$$(a_1,0)\cdot(a_2,0) \quad \rightarrow \quad a_1 \cdot a_2$$

Por lo cual resulta que:

sumar y multiplicar en $\mathbb{C}_0$ y luego aplicar la función con imagen en $\mathbb{R}$, es equivalente a aplicar la función y sumar o multiplicar en $\mathbb{R}$, por lo tanto ***se identifica a*** $\mathbb{C}_0$ ***con*** $\mathbb{R}$.

Esto es:

$(a,0) \quad \approx \quad a$ y qué en la práctica se usa $(a,0) = a$

Esta **identificación** nos da $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ **,** de modo que un número real resulta ser precisamente un número complejo de componente imaginaria nula.
Por las otras identificaciones conocidas resulta que todos los conjuntos numéricos están contenidos en el conjunto de los números complejos.

EJEMPLO 8.3.2:

a) Calcular (3, 0) . (2, 5) = (3. 2 -0.5, 3. 5 + 0. 2) = (3. 2 , 3. 5) = (6, 15)

b) Calculemos en general (*r*, 0) . (*a, b*) = (*r . a - 0.b , r . b + 0. a*) = (*r .a , r. b*)

Según la identificación con $\mathbb{R}$ los números (3, 0) y (r, 0), son los números reales 3 y *r* respectivamente. Luego, por el ejemplo anterior:

✵ ***Multiplicar un complejo*** $z = (a, b)$ ***por un número real r***

resulta multiplicar cada una de las componentes del complejo por ese real

$$r . z = r . (a, b) = (r . a \; , r . b)$$

En la introducción de este capítulo mencionamos que los complejos habían surgido como respuesta de solución para la ecuación $x^2 + 1 = 0$, a ese número lo llamaron *i*.

Si se calcula (0,1) . (0,1) :

$$(0,1) . (0,1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1, 0)$$

Luego por la identificación resulta que (0,1) . (0,1) = -1

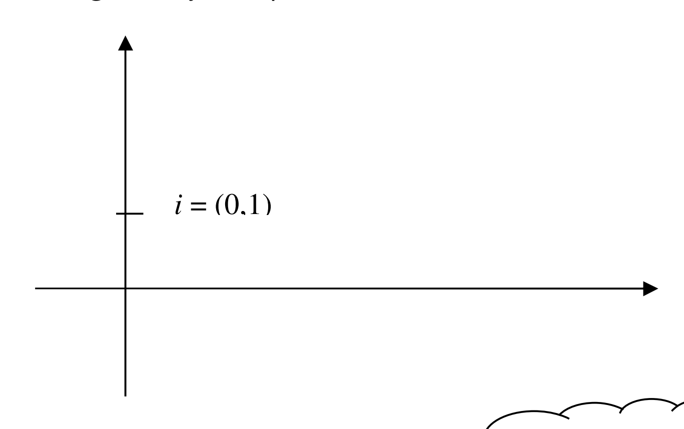
Designando con ***i*** **a** **(0,1)** se tiene que

***i²* = - 1**



(*se hace una abuso de "notación " ya que por ahora no se definió potencia de complejos)*

Al número ***i*** se lo llama ***unidad imaginaria*** y su representación es:



Luego la ecuación

$$x^2 + 1 = 0$$

que no tiene solución en $\mathbb{R}$, **si tiene en** $\mathbb{C}$ **la solución** $z = i$

Compruebe que también **- *i*** satisface esa ecuación!!

¡Sirven para algo!

4. **Otra forma para *z***

Consideremos un complejo cualquiera $z = (a, b)$.

Verifiquemos que $(0, b) = (0,1).(b,0)$:

$$(0,1).(b,0) = (0.b - 1.0\ ,\ 0.0 + 1.b) = (0\ ,\ b)$$

Además: $(a, b) = (a,0) + (0, b)$

Luego por la identificación hecha con $\mathbb{R}$ y por definición de *i*, resulta que todo complejo

$$z = (a, b) = a + i\,b$$

La expresión $z = a + i\,b$ se llama **forma binómica de** z

Por conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{C}$, vale que

$$z = (a, b) = a + i\,b = a + b\,i$$

según el caso usaremos lo más conveniente.

EJEMPLO 8.4.1:

Pasar a la forma binómica los complejos (-2, 1) ; (4, 4) ; (1,0) ; (0, 7) ; (0, 0) ; (0, -10)

Dado z = (-2, 1) , la parte real de z es -2 y la imaginaria de z es 1 luego

$$(-2, 1) = -2 + i.1 = -2 + i$$

Razonando similarmente obtenemos:

$$(4, 4) = 4 + i.\,4$$

$(1, 0) = 1 + i \,.\, 0 = 1$

$(0, 7) = 0 + i \,.\, 7 = 7.\, i$

$(0, 0) = 0 + i \,.\, 0 = 0$

$(0, -10) = 0 + i \,.(-10) = -10 \,.\, i$

El contexto nos indicará si el 1 ó el 0 es en $\mathbb{R}$ ó en $\mathbb{C}$ pero por la identificación ¿cómo son??

EJEMPLO 8.4.2:

Pasar a la forma par ordenado los complejos $3 + 2\, i$; 4 ; $-8\, i$; 0 ; $12.\, i$

Comparando $z = 3 + 2\, i$ con la forma general se tiene que: $Re(z) = 3$ e $Im(z) = 2$ por lo cual escribimos:

$$z = 3 + 2\, i = (3, 2)$$

$$4 = (4, 0)$$

$$-8\, i = (0, -8)$$

$$0 = (0, 0)$$

$$12.\, i = (0, 12)$$

Las operaciones que se han definido en el conjunto de los complejos pueden enunciarse usando la forma binómica de la siguiente manera:

(S') $(a + i\, b) + (c + i\, d) = (a + c) + i\,(b + d)$

(M') $(a + i\, b) \cdot (c + i\, d) = (a.c - b.d) + i\,(a.d + b.c)$

EJERCICIO 8.4.3:

Usando las dos formas de expresar un complejo (binómica y par ordenado), verificar la equivalencia de **(S)** y **(M)** con **(S')** y **(M')** respectivamente.

En la resolución de un cálculo no "mezcle" ambas formas de expresión de los complejos.

En los cálculos en forma binómica la ***i*** opera algebraicamente como si fuera un real pero con la condición que al cuadrado da -1.
Esto nos permite realizar la multiplicación aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación en la suma:

$$(a+i\,.b)\cdot(c+i.\,d)=a.c+a.i.d+i.b.c+i.b.i.d=$$
$$=a.c+i.\,(a.d+b.c)+i^2.b.d=(a.c-b.d)+i.(a.d+b.c)$$

EJERCICIO 8.4.4:

Dados z = (-3, 4) ; *v* = (-5, -5) ; *w* = (0, 2) ; *u* = (3, 3) ; s = (2, 0) ; *t* = (5, -1)

a) Representarlos.
b) Expresarlos en forma binómica.
c) Hallar sus opuestos e inversos en ambas formas.
d) Hallar z. *v* ; 3.*w + s ; s - 2.t ; u + w.t ; w.*z *+ 4. u*

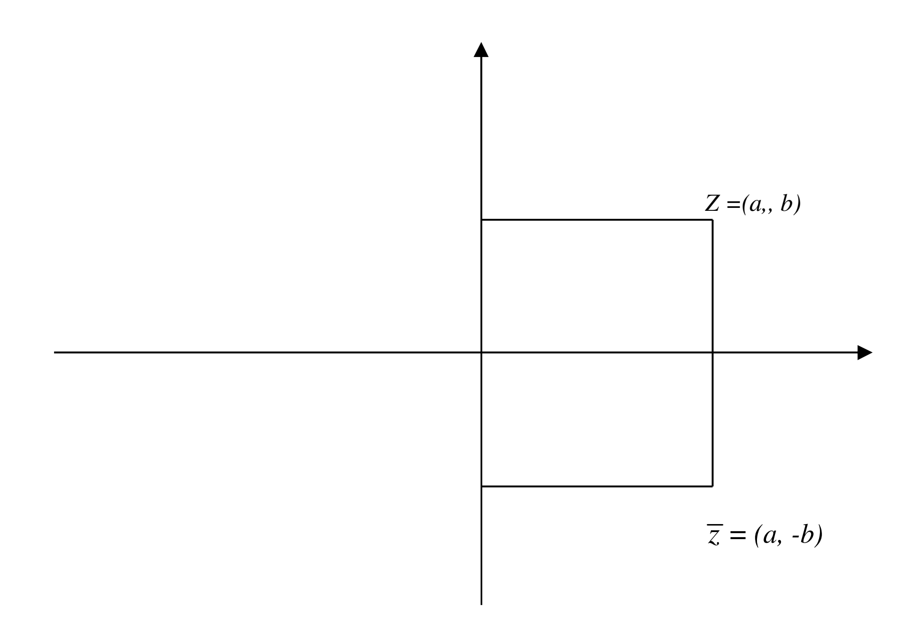
EJERCICIO 8.4.5:

Dado $z = a + i\ b$:

a) Hallar en esa forma su opuesto -z.
b) Si además $z \neq 0$, expresar su inverso z^{-1} en forma binómica.
c) Haga los puntos anteriores para (3, - 2) y para (0 , 8) .
d) Hallar los inversos y opuestos de 3+2*i* y -7-6*i*

➢ *Un dúo de complejos:*

Todo complejo $z = (a, b) = a + i\ b$ tiene asociado el complejo $(a, -b) = a - b\ i$, llamado **el *conjugado de*** z, que se anota $\overline{z}$, y es tal que $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(\overline{z})$ e $\mathrm{Im}(z)=-\mathrm{Im}(\overline{z})$



Observar que un complejo y su conjugado son simétricos respecto del eje horizontal (o real).

Esto permite enunciar la siguiente:

♦ PROPIEDAD 8.4.6:

Un complejo es un número real si y sólo si coincide con su conjugado.

Lo que simbólicamente se expresa:

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$$

Demostración:

Si $z \in \mathbb{R}$ esto significa que $z = (a, b)$ con $b = 0$. Es entonces $z = (a, 0) = a$.

Así: $-b = 0$. Luego $\overline{z} = (a, -b) = (a, 0) = a$. Por tanto $z = \overline{z}$.

Si $z = \overline{z}$, significa que $(a, b) = (a, -b)$ que por igualdad de complejos se tiene que son iguales ambas componentes, entonces $b = -b$ de donde $b = 0$.

Por lo cual resulta $z = \overline{z} = (a, 0) = a$. Es decir $z \in \mathbb{R}$ (por la identificación....)

♦

Las siguientes son otras importantes propiedades de la conjugación:

♦ PROPIEDAD 8.4.7

Dado $z \in \mathbb{C}$:

a) $\overline{\overline{z}} = z$

b) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z) \qquad z - \overline{z} = 2\operatorname{Im}(z)i$

c) $z \cdot \overline{z} = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$

♦ PROPIEDAD 8.4.8:

Dados $z_1 \in \mathbb{C}$ y $z_2 \in \mathbb{C}$

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Demostración de a):

Consideremos $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$

Por definicion $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

Por definición de conjugado $\overline{z_1 + z_2} = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i \quad (1)$

Por otro lado $\overline{z_1} = a_1 - b_1 i$ y $\overline{z_2} = a_2 - b_2 i$ entonces

$\overline{z_1} + \overline{z_2} = a_1 - b_1 i + a_2 - b_2 i = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i \qquad (2)$

como (1) es igual a (2) se tiene que $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

♦

EJERCICIO 8.4.9:

Verificar la propiedad 8.4.7 para los complejos:

z = -2 + i 5 ; z = (7 , 0) ; z = -9 i ; z = (-4 , -3) ; z = (0 , -5) ; z = 1 + i

EJERCICIO 8.4.10:

Verificar la propiedad 8.4.8 para los complejos:

$z_1 = 6 + i\ 7$ y $z_2 = -9 + i\ 2$; $z_1 = (5\ , -3)$ y $z_2 = (0\ , 5)$

EJERCICIO 8.4.11:

Demostrar las propiedades 8.4.7 y 8.4.8 b)

Idea de las demostraciones: considerar $z = a + i\,b$ ó $z = (a\ ,\ b)$ como más le resulte...y haga las cuentas.

Ídem para $z_1 = a_1 + i\ b_1$ y $z_2 = a_2 + i\ b_2$ ó $z_1 = (a_1\ ,\ b_1)$ y $z_2 = (a_2\ ,\ b_2)$ como le resulte mejor.

EJEMPLO 8.4.12:

Comprobar que para $z \neq 0$,

$$z^{-1} = \left(z.\overline{z}\right)^{-1}.\overline{z}$$

Dado $z = (a, b)$ con a o b no nulos, $z^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$

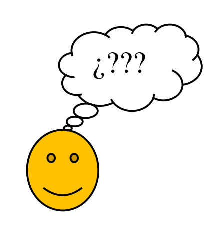
Por propiedad anterior*:*

$$z \cdot \overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = a^2 + b^2$$

es decir un número real **no nulo** (porqué no nulo???)

Luego tiene inverso, que también es real: $(\ z.\overline{z}\ )^{-1} = (\ a^2 + b^2\ )^{-1}$.

Multiplicando el conjugado de z por este real se tiene:



$$(\ z.\overline{z}\ )^{-1}.\overline{z} = (\ a^2+b^2\ )^{-1}.(a,-b) = \left((\ a^2+b^2\ )^{-1}.a, (\ a^2+b^2\ )^{-1}.(-b)\right) =$$

$$= \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

Como queríamos comprobar.

Esto es: el inverso de un complejo z es un número real por el conjugado de z y ese número real es el inverso del producto del complejo por su conjugado, que es siempre positivo. Esto determina que el inverso de z está sobre una recta que pasa por el origen y por el conjugado de z. Analice si más cerca o más lejos del origen que $\overline{z}$. Haga un gráfico de la situación. Considere algunos ejemplos pertinentes.

Una consecuencia importante es el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 8.4.13:

Dados $z_1 = a_1 + i\ b_1$ y $z_2 = a_2 + i\ b_2$, si además $z_2 \neq 0$, calcular $\frac{z_1}{z_2}$ en forma binómica.

Esta manera de dividir se conoce como regla practica de dividir:
multiplicar numerador y denominador por el conjugado del divisor.

EJEMPLO 8.4.14:

Sean $z_1 = 2 + i\ 4$ y $z_2 = 3 + i\ 5$, calcular $\frac{z_1}{z_2}$.

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2+4i).(3-5i)}{(3+5i).(3-5i)} =$ aplicando propiedades anteriores y distributiva de la multiplicación: $= \frac{6-10i+12i+20}{9+25} = \frac{26+2i}{34} = \frac{13}{17} + \frac{1}{17}i$

5. Más definiciones importantes

En el cálculo con los números complejos es importante tener presente cual es la representación gráfica, por ello es útil introducir nuevas definiciones que permitirán dar interpretaciones más geométricas de estos números.

El **módulo** de un complejo $z = (a, b) = a + i\,b$ es el número real positivo determinado por $\sqrt{a^2 + b^2}$ y se anota $|z|$.

Así definido, el módulo es la distancia al origen del punto del plano que representa al complejo z (por el teorema de Pitágoras).
Mirar el gráfico.

b
$|z|$
$z = (a, b)$
0 = (0,0)
a

En el caso que el complejo sea un real (vía la identificación...) esta definición coincide con la de valor absoluto en $\mathbb{R}$ (comprobarlo), es así que se ha usado idéntica notación para este nuevo concepto, ya que extiende lo conocido en $\mathbb{R}$.

Siguen inmediatamente de la definición las siguientes

♦ PROPIEDADES 8.5.1

a) $|z| \geq 0$

b) $|z| = 0$ si y sólo si $z = 0$

c) $i)\, \mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $ii)\, \mathrm{Im}(z) \leq |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$

d) $|\overline{z}| = |-z| = |z|$

e) $|z|^2 = z.\overline{z}$

Demostración de c) *i*)

Consideremos $\mathrm{z} = a + bi$

$\mathrm{Re}(z) = a$ y por ser a un número real $a \leq |a|$

Por lo tanto $\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)|$

Por otro lado $|\mathrm{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y por ser $b^2 \geq 0$

se tiene que $\sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2}$

Además $\sqrt{a^2} = |a|$

Por lo tanto $\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| = |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |\mathrm{z}|$

Entonces se cumple que $\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq |\mathrm{z}|$

♦

EJERCICIO 8.5.2:

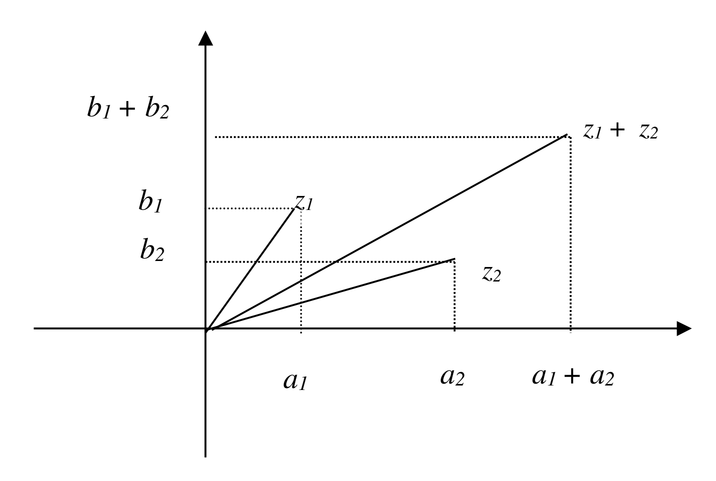
Probar las otras propiedades de 8.5.1

(Idea de demostración: considere $z = (a, b)$ ó $z = a + i\,b$ y aplique las definiciones)

EJERCICIO 8.5.3:

Justificar el siguiente gráfico:

➢ ***Interpretación geométrica de la suma de complejos***



EJERCICIO 8.5.4:

a) Dados dos complejos z_1 y z_2 , ¿ qué representa $|z_1 - z_2|$? Haga una interpretación gráfica.

b) Si los complejos z_1 , z_2 y z_3 son los vértices de un triángulo (represente en el plano...) qué relación se verifica entre la longitud de uno cualquiera de los lados con la suma de las longitudes de los otros lados?

Este ejercicio permite interpretar la desigualdad establecida en:

♦ PROPIEDAD 8.5.5 (**Desigualdad triangular o desigualdad de Minkowski)**

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Demostración:

Teniendo presente lo demostrado en propiedades anteriores para cualquier $z = (a, b)$:

1. $\overline{\overline{z}} = z$; ***2***. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ (*número real*); ***3***. $z \cdot \overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = |z|^2$ (*otro real*)

4. $|z| \geq 0$; ***5***. $a = \mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$; ***6***. $|\overline{z}| = |-z| = |z|$

Y lo demostrado para cualquier par de complejos:

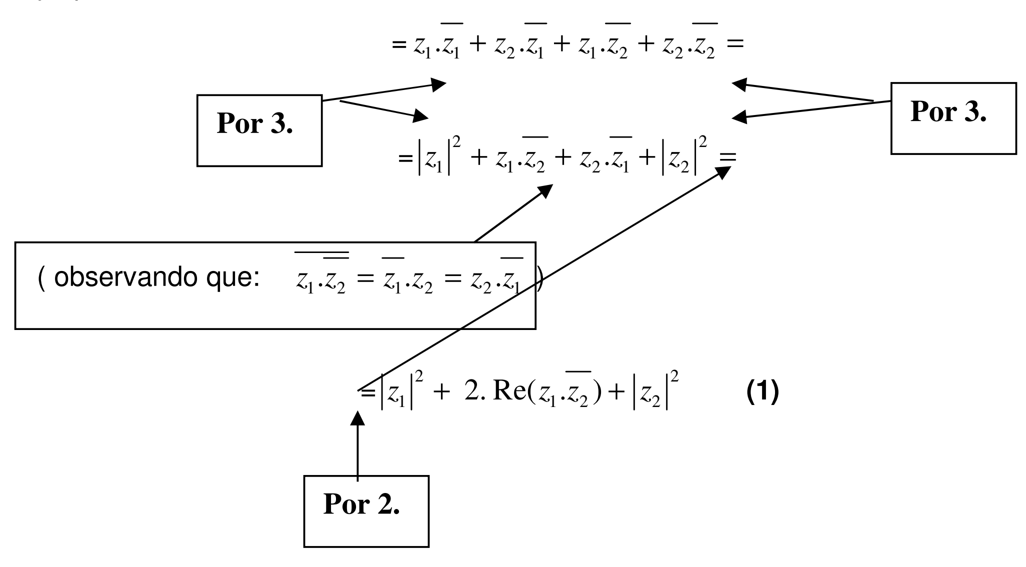
7. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; ***8.*** $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$; ***9***. $|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$

Vamos a comenzar calculando:

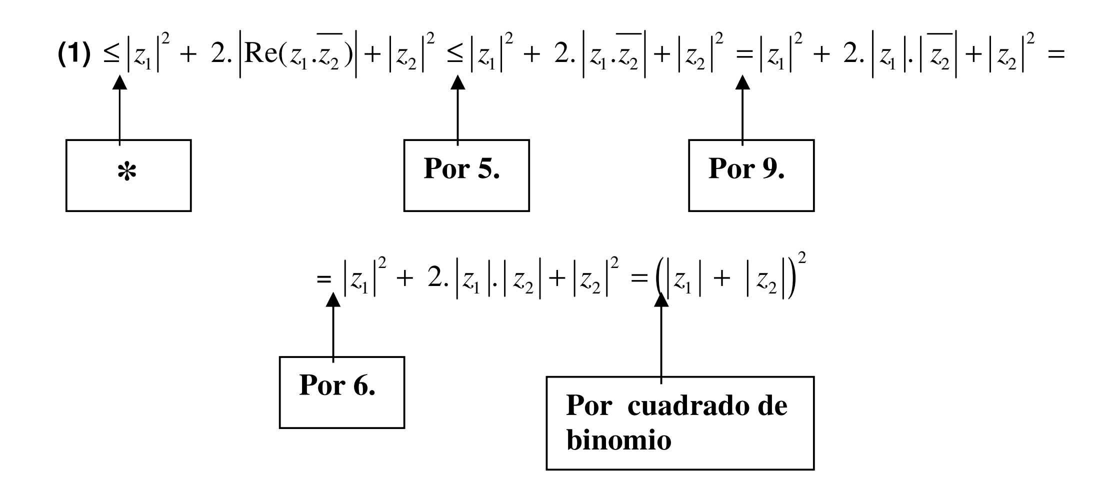
$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) =$$

Por 3. **Por 7.**

y aplicando distributiva



Los sumandos de **(1)** son números reales y aplicando propiedad del valor absoluto al término central (*todo número real es menor o igual que su valor absoluto)* y monotonía de la suma de reales, podemos escribir:



Resumiendo los pasos y teniendo en cuenta * se tiene:

$$|z_1 + z_2|^2 \leq \left(|z_1| + |z_2|\right)^2$$

Esta desigualdad es entre números reales de base no negativa, si tomamos raíz cuadrada a ambos miembros la desigualdad se mantiene en el mismo sentido y así obtendremos la desigualdad triangular que queríamos probar.

♦

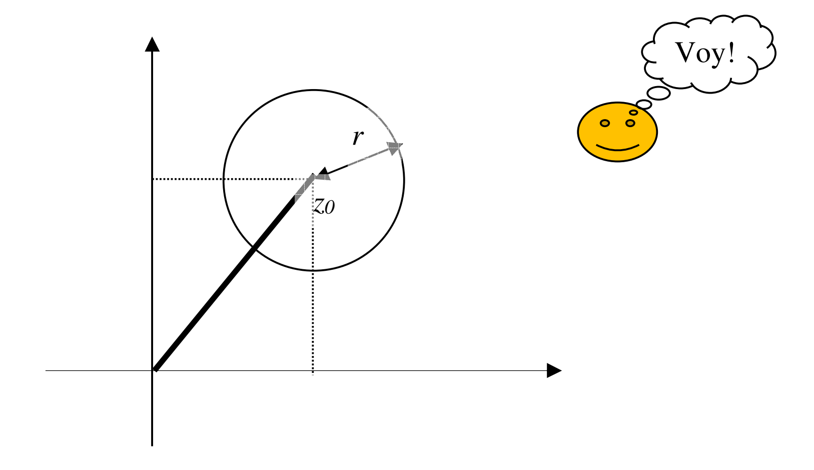
EJERCICIO 8.5.6:

Cómo deben ser los complejos para que se dé la igualdad en la *Desigualdad Triangular*?

✵ *Algo de la geometría en complejos o complejos de geometría...*

Por medio de la noción de módulo se pueden describir muchos conjuntos del plano, entre ellos algunos que se han tratado en nuestros capítulos de Geometría Analítica.

El conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r \wedge r \geq 0\}$ es el conjunto de todos los complejos que están a distancia *r* del complejo z_0 , esto es la circunferencia de centro en z_0 y radio *r.* **Justifique!!!!**



EJEMPLO 8.5.7:

Representar el conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2 + i| \leq 3\}$

Consideramos $z = a + bi$, entonces

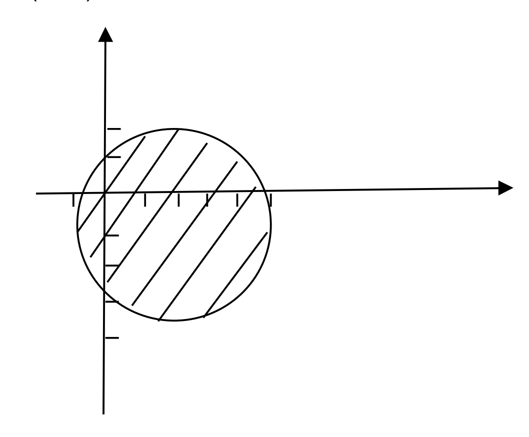
$$|z - 2 + i| = |(a-2) + (b+1)i| = \sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$$

Como se pide $|z-2+i|\leq 3, \quad \sqrt{(a-2)^2+(b+1)^2}\leq 3$

Por lo tanto $(a-2)^2+(b+1)^2\leq 9$

Si consideramos la igualdad, es la ecuación de una circunferencia con centro en (2,-1) y radio 3.

Por lo tanto *A* representa la región del plano formada por todos los puntos que distan 3 unidades o menos del punto (2,-1).



EJERCICIO 8.5.8:

Analizar qué puntos son, hallar una expresión cartesiana y representar los siguientes conjuntos del plano:

a) $B=\{z\in\mathbb{C}: |z-z_0|\leq r \wedge r\geq 0\}$

b) $C=\{z\in\mathbb{C}: |z-z_0|< r \wedge r\geq 0\}$

c) $E=\{z\in\mathbb{C}: |z-(2,4)|\leq 2\}$

d) $D=\{z\in\mathbb{C}: |z-3+2i|\geq 1\}$

e) $F=\{z\in\mathbb{C}: |z|=25\}$

EJERCICIO 8.5.9:

Sean z_1, z_2 y z_3 tres complejos tales que $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ con $z_1+z_2+z_3=0$

Probar que son vértices de un triángulo equilátero inscripto en la circunferencia unidad. (***circunferencia unidad***: la circunferencia con centro en el origen y radio 1)

(Idea de la demostración: Para probar que $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$ haga un trabajo similar al realizado en la demostración de la desigualdad triangular)

EJERCICIO 8.5.10:

Considerando $z = x + i\ y \quad o \quad z = (x, y),$ como le resulte mejor, determinar que representa el conjunto de complejos que satisfacen: $|z+1| \leq 4 - |z-1|$

Haga el gráfico.

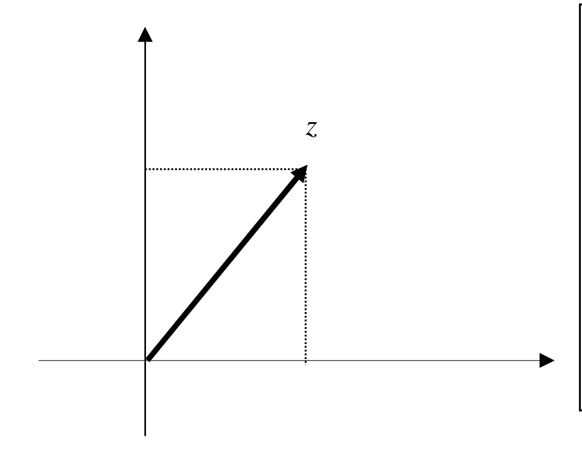
EJERCICIO 8.5.11:

Demostrar $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$

6. Otras formas: *la polar y ...*

Ya hemos visto que hay dos maneras equivalentes de representar un número complejo: la forma de par ordenado y la binómica, pero estas no son las únicas. Veremos otras que revelan más "geometría" que las anteriores.

Hemos definido el módulo de un complejo. Si trazamos una flecha que una el origen del sistema de referencia con el punto del plano que representa al complejo z (como en la siguiente figura), la longitud de esa flecha es precisamente el módulo de z.



Si $z \neq 0$ también lo es su módulo, por lo cual la flecha que une el origen con z, efectivamente forma un ángulo θ con el semieje horizontal positivo.

Este ángulo θ, medido en radianes, queda definido salvo un múltiplo entero de 2π, se llama ***argumento de z***, se anota ***arg(z)***.

Si $z = 0$ *se conviene que el argumento de z es 0.*

Para la medición de θ se considera que el sentido positivo es el antihorario, como en Trigonometría. (Ver gráfico siguiente)

De los infinitos valores congruentes con θ (todos los que difieren con θ en múltiplos enteros de 2π) se llama **argumento principal de** z y se anota ***Arg(z),*** aquel que cumple:

$$0 \leq Arg(z) < 2\pi$$

Los números $|z|$ y *Arg(z)* son las coordenadas polares de z, ellos determinan unívocamente a z y así escribimos:

$z = |z|_{Arg(z)}$ que es la **forma polar de** z

Como es inmediato (mire el gráfico anterior): $\begin{cases} a = |z|.cos\,\theta \\ b = |z|.\,sen\,\theta \end{cases}$

Esto permite escribir

$$z = a + i\,b = |z|.cos\,\theta + i|z|.sen\,\theta = |z|.(cos\,\theta + i\;sen\theta)$$

siendo $\theta = \arg(z) = Arg(z) + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

que es la **forma trigonométrica de** z

Recapitulando:

Dado un complejo en la forma $z = (a, b)$ ó $z = a + i\,b$

para determinar el *argumento de* z consideramos que θ es el tal que $tag\;\theta = \dfrac{b}{a}$

y para determinar el *módulo de* z, se usa que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Así se lo podrá expresar en forma polar o trigonométrica.

Por otra parte, si el complejo está dado en la forma $z = |z|_{Arg(z)}$ ó $z = |z|.(\cos\theta + i\ sen\theta)$

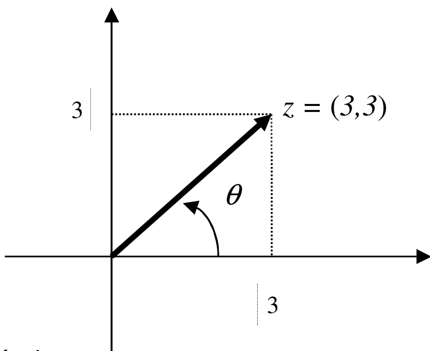
para determinar las *componentes de* z se usa:

$$\begin{cases} a = |z|.cos\ \theta \\ b = |z|.\ sen\ \theta \end{cases}$$

Como es sabido $\frac{b}{a} = \frac{-b}{-a}$ y $\frac{b}{-a} = \frac{-b}{a}$ luego para determinar el argumento de un complejo z, es "altamente recomendable" que realice al menos un esquema de z para determinar su posición en el plano y no confundir el argumento.

EJEMPLO 8.6.1:

Expresar z = (3, 3) en distintas formas.



Luego z = 3 + 3 *i* en forma binómica.

Para determinar el módulo: $|z| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{2.3^2} = 3\sqrt{2}$

Para el argumento: $tag\ \theta = \frac{3}{3} = 1$ y observando que ambas componentes son positivas, además por la representación realizada, se concluye que el lado terminal del ángulo θ es del primer cuadrante, luego el *Arg(z)*= $\frac{\pi}{4}$ y

arg(z)= $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ Luego la forma polar es $z = 3\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$

Y la forma trigonométrica es $z = 3\sqrt{2}\ (cos\frac{\pi}{4} + i\ sen\frac{\pi}{4})$

EJEMPLO 8.6.2:

Hallar módulo y argumento de $v = 5.\, z + w$ sien do $z = (-1, 0)$ y $w = 4 + i\sqrt{3}$

Primeramente debemos calcular $5.\, z + w$, para lo cual tenemos que llevar los complejos z y w a la misma forma (o par ordenado o binómica). Eligiendo binómica:

$$z = -1, \qquad \text{luego } 5.z = -5$$

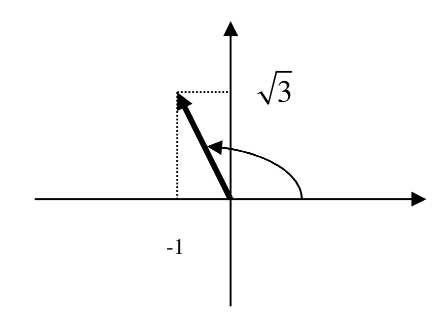
$$v = 5.\, z + w = -5 + 4 + i\sqrt{3} = -1 + i\sqrt{3}$$

Determinemos el módulo de v: $|v| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

Y ahora el argumento principal de v:

$a = -1 \quad b = \sqrt{3}$

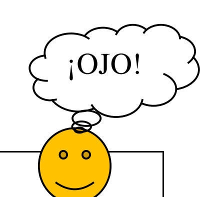
$tag\ \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{-1}$



El punto que representa

a v está en el segundo cuadrante,

entonces el argumento principal de v es $\dfrac{2}{3}\pi$



- Importante:

Para hallar θ, usamos la calculadora y ponemos $arc\ tg\ (\dfrac{\sqrt{3}}{-1})$, obtendremos:

$-\dfrac{\pi}{3}$ radianes o -60º , dependiendo si estamos usando radianes o grados.

Ese resultado nos daría un complejo en el 4to cuadrante, pero el complejo v está en el 2do cuadrante. Esto ocurre porque la calculadora no diferencia entre $arc\ tg\ (\dfrac{\sqrt{3}}{-1})$ y $arc\ tg\ (\dfrac{-\sqrt{3}}{1})$, en ambos casos nos dará el resultado de $arc\ tg\ (-\sqrt{3})$ y toma por defecto ángulos en el 4to. cuadrante.

Lo mismo ocurrirá si queremos calcular el $arc\ tg\ (\frac{-1}{-1})$ para hallar el argumento de un complejo en el 3er. cuadrante, la calculadora nos dará como respuesta $\frac{\pi}{4}$ radianes o 45º . En estos casos la maquina toma por defecto ángulos en el primer cuadrante.

Por lo tanto es importante saber en qué cuadrante se encuentra el complejo para calcular correctamente el ángulo.

Por eso ***se aconseja que cada vez que tiene que calcular el argumento de un complejo***, al menos haga un esquema de ese complejo, para darse cuenta en que cuadrante está ubicado.

En nuestro ejemplo, para obtener θ, debemos sumar π o 180º para obtener el ángulo correcto, entonces: $\theta = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi$ o $\theta = -60º + 180º = 120º$

EJEMPLO 8.6.3:

Expresar z en forma binómica sabiendo que $z = 5_{\frac{5}{4}\pi}$

Sabemos que:

$$a = 5.cos\frac{5}{4}\pi \quad \text{y} \quad b = 5.\,sen\frac{5}{4}\pi$$

$$a = 5.(-\frac{\sqrt{2}}{2}) \quad \text{y} \quad b = 5.\,(-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$a = -5.\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad b = -5.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

el argumento principal es del 3er. cuadrante por eso son negativos *a* y *b* entonces:

$$z = -\frac{5.\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{5.\sqrt{2}}{2}\,i$$

EJERCICIO 8.6.4:

Expresar en forma polar y trigonométrica:

$z = (-1,1)$ $w = 3 - 3i$ $u = (0, -4)$

$v = (-5, 0)$ $t = 2i$ $s = 3 - 7i$

Hay que tener presente que

$$z_1 = |z_1|(cos\,\theta_1 + i\ sen\,\theta_1) = |z_1|_{Arg(z_1)}\ ,\quad z_2 = |z_2|(cos\,\theta_2 + i\ sen\,\theta_2) = |z_2|_{Arg(z_2)}$$

son iguales si y sólo si

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \cos\theta_1 = \cos\theta_2 \wedge sen\,\theta_1 = sen\,\theta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ Arg(z_1) = Arg(z_2) \end{cases}$$

EJEMPLO 8.6.5:

Analicemos si $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = \sqrt{2}(cos\frac{17}{4}\pi + i\ sen\frac{17}{4}\pi)$ son iguales.

Pasemos z_1 a la forma trigonométrica y polar:

$$z_1 = \sqrt{2}(cos\frac{\pi}{4} + i\ sen\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$$

Escribamos ahora z_2 en la forma trigonométrica y polar:

$$z_2 = \sqrt{2}(cos\frac{17}{4}\pi + i\ sen\frac{17}{4}\pi) = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$$

Notemos que z_2 en su forma trigonométrica no está usando el argumento principal, ya que $\frac{17}{4}\pi > 2\pi$, para expresarlo en forma polar hacemos entonces:

$\frac{17}{4}\pi = \frac{16}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi = 4\pi + \frac{1}{4}\pi \simeq \frac{1}{4}\pi$ siendo ahora $\frac{1}{4}\pi$ el argumento principal.

En consecuencia se cumple que:

$|z_1| = |z_2|$ y $\cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{17}{4}\pi \wedge sen\frac{\pi}{4} = sen\frac{17}{4}\pi$

siendo $\frac{17}{4}\pi = \frac{\pi}{4} + 2.2.\pi$, por lo tanto $Arg(z_1) = Arg(z_2)$

Luego los complejos dados son iguales.

EJEMPLO 8.6.6:

Representar en el plano los siguientes conjuntos A, B y $A \cap B$:

$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - 2i| \geq 2\}$ $\quad B = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{4} \leq Arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}\right\}$

Consideramos $z = a + bi$, entonces

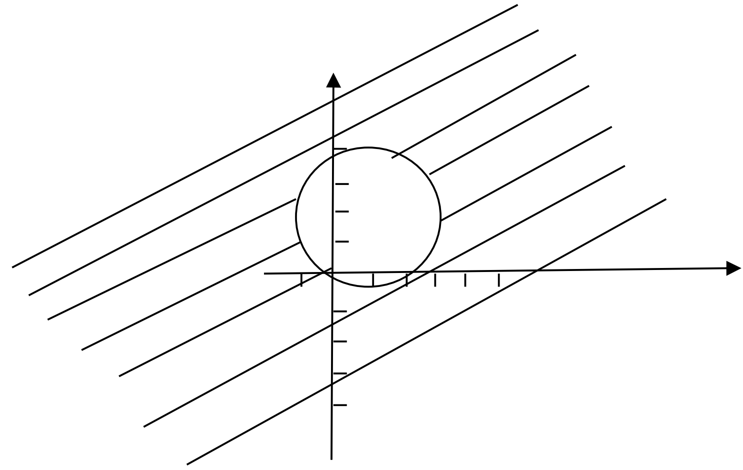
$|z - 1 - 2i| = |(a-1) + (b-2)i| = \sqrt{(a-1)^2 + (b-2)^2}$

Como se pide $|z - 1 - 2i| \geq 2,$ $\sqrt{(a-1)^2 + (b-2)^2} \geq 2$

Por lo tanto $(a-1)^2 + (b-2)^2 \geq 4$

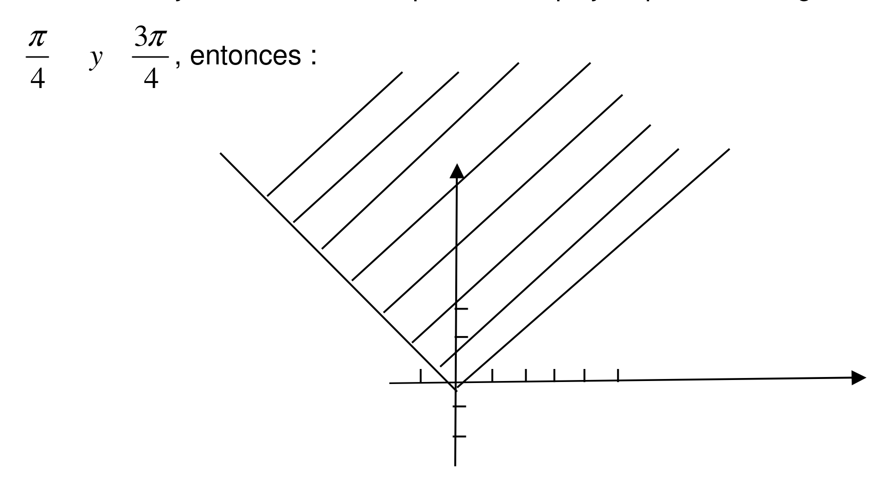
Si miramos la igualdad, es la ecuación de una circunferencia con centro en (1,2) y radio 2.

Por lo tanto *A* representa la región del plano formada por todos los puntos que distan 2 unidades o más del punto (1,2).

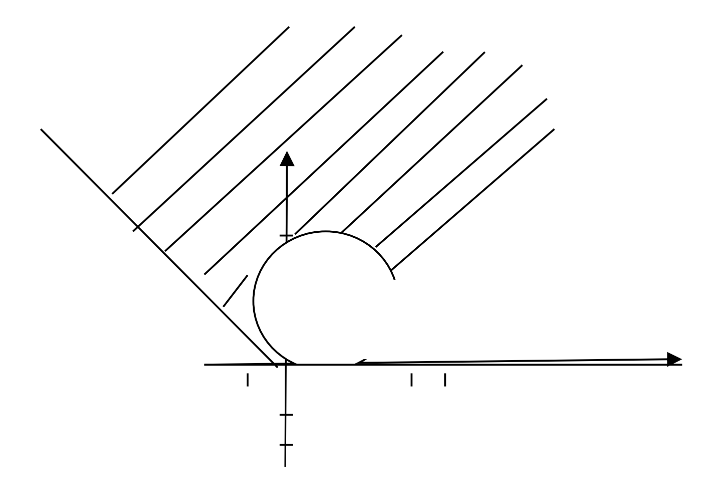


Veamos ahora el conjunto *B*:

Como el conjunto está formado por los complejos que tienen argumento entre $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$, entonces :



Por lo tanto si ahora graficamos $A \cap B$, resulta:



7. Multiplicación en forma polar y trigonométrica

Vamos a definir la potenciación y radicación en los números complejos.

Las formas polar y trigonométrica de un complejo tienen ventajas en los cálculos de estas operaciones y además permiten visualizar el alto contenido geométrico de estos conceptos. Comenzaremos por la multiplicación.

Para entender estos aspectos es imprescindible tener presente resultados de Trigonometría.

Comenzaremos por la multiplicación de dos complejos en forma trigonométrica.

Sean $z_1 = |z_1| (cos\,\theta_1 + i\ sen\,\theta_1)$ $\quad z_2 = |z_2| (cos\,\theta_2 + i\ sen\,\theta_2)$.

Calculemos el producto de los mismos:

$z_1 \cdot z_2 = |z_1| (cos\,\theta_1 + i\ sen\,\theta_1).|z_2| (cos\,\theta_2 + i\ sen\,\theta_2) =$

por conmutatividad de la multiplicación

$= |z_1|.|z_2|\ (cos\,\theta_1 + i\ sen\,\theta_1).(cos\,\theta_2 + i\ sen\,\theta_2) =$

distribuyendo la multiplicación en la suma

$= |z_1|.|z_2|\ (cos\,\theta_1 .cos\,\theta_2 + i\ sen\,\theta_1 .cos\,\theta_2 + cos\,\theta_1 .i\ sen\,\theta_2 + i^2\ sen\,\theta_1\ sen\,\theta_2) =$

conmutando y recordando que $i^2 = -1$

$= |z_1|.|z_2|\ (cos\,\theta_1 .cos\,\theta_2 + i\ sen\,\theta_1 .cos\,\theta_2 + i\ cos\,\theta_1 .\ sen\,\theta_2 - sen\,\theta_1\ sen\,\theta_2) =$

agrupando la parte real y la imaginaria

$= |z_1|.|z_2|\ (\,(cos\,\theta_1 .cos\,\theta_2 - sen\,\theta_1\ sen\,\theta_2) + i\,(sen\,\theta_1 .cos\,\theta_2 + cos\,\theta_1 .\ sen\,\theta_2)\,) =$

recordando seno y coseno de la suma de ángulos:

$= |z_1|.|z_2|\ (\ cos\,(\theta_1 + \theta_2) + i\ sen\,(\theta_1 + \theta_2)\,)$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta$$
$$sen(\alpha+\beta) = \cos\alpha sen\beta + sen\alpha\cos\beta$$

Por lo cual concluimos que:

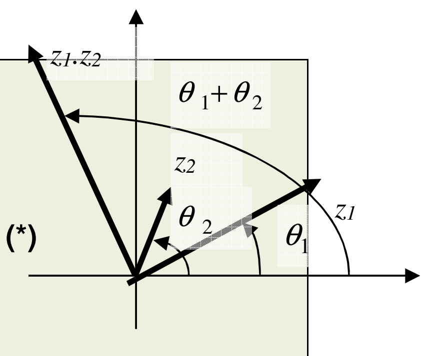
$$z_1.z_2 = |z_1| (cos\,\theta_1 + i\ sen\,\theta_1).|z_2| (cos\,\theta_2 + i\ sen\,\theta_2) =$$
$$= |z_1|.|z_2|\ (\ cos\,(\theta_1 + \theta_2) + i\ sen\,(\theta_1 + \theta_2)\,)$$

El producto de dos complejos tiene

por *módulo* el producto de los módulos de los factores

y

por *argumento* la suma de los argumentos de los factores **(*)**



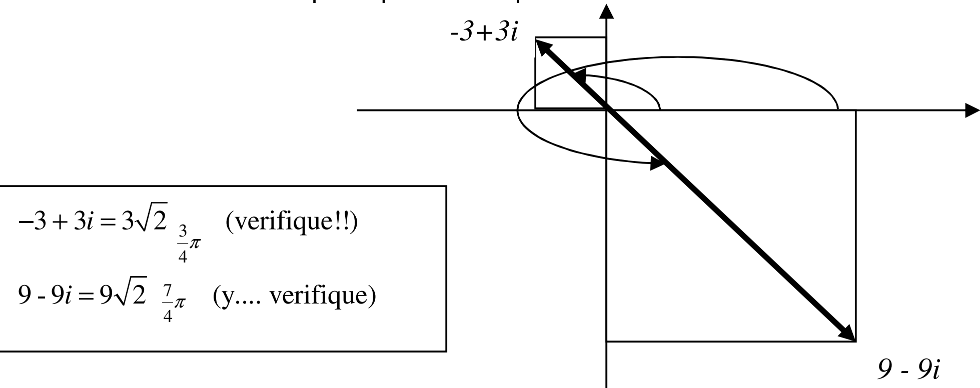
Luego es también: $\quad z_1.z_2 = |z_1|.|z_2|_{\,Arg(z_1.z_2)}$

(*) ver el ejemplo y observación posterior

EJEMPLO 8.7.1:

Calcular *z = (-3 + 3 i).(9 -9 i)*

Lo realizaremos en forma polar por lo cual pasaremos los factores a esa forma.



$-3+3i = 3\sqrt{2}_{\frac{3}{4}\pi}$ (verifique!!)

$9 - 9i = 9\sqrt{2}_{\frac{7}{4}\pi}$ (y.... verifique)

Luego el producto es

$$z = 3\sqrt{2}_{\frac{3}{4}\pi} \,.\, 9\sqrt{2}_{\frac{7}{4}\pi} = 3.\sqrt{2}.9\sqrt{2}_{\frac{3}{4}\pi+\frac{7}{4}\pi} =$$

si sumamos los argumentos de los factores obtenemos $\frac{3}{4}\pi + \frac{7}{4}\pi = \frac{10}{4}\pi = \frac{5}{2}\pi$

que no es argumento principal de z, pues es mayor que 2π.

En este caso particular "sacando una circunferencia", es decir restando 2π, se obtiene el

Arg (z)$=\frac{5}{2}\pi - 2\pi = \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto

$$z = 54_{\frac{\pi}{2}}$$

Por razones de espacio no lo representamos... es un punto que está a 54 unidades de distancia del origen y sobre el eje vertical positivo.

Recordando que en la forma polar de z se debe considerar el *Arg(z)* y que $0 \le Arg(z) < 2\pi$ para cualquier z, es importante practicar como encontrar un ángulo $\alpha, \quad 0 \le \alpha < 2\pi$ congruente con β, para cualquier β.

Es entonces:

$$Arg(z_1.z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2) + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Otro ejemplo fortalecedor de la idea:

$z_1 = -1; z_2 = -3 \quad Arg(z_1) = Arg(z_2) = \pi; \qquad z_1.z_2 = 3 \quad Arg(z_1.z_2) = 0 = \pi + \pi + 2.(-1)\pi$

EJERCICIO 8.7.2:

Calcular

$z = 3.(3,-5) \qquad w = (-7,6).(2,-8) \qquad u = (-2-3i).(-1+i)$

$v = (-4, 4).\ (0, 8)^{-1} \qquad t = (3 - 3i).(5 - 6i)$

EJEMPLO 8.7.3:

Calculemos $z_1.z_2.z_3$, para una terna genérica de complejos.

Como vale la propiedad asociativa haremos $(z_1.z_2).z_3$ y para ello se considera:

$z_1 = |z_1|\,(cos\,\theta_1 + i\ sen\,\theta_1) \qquad z_2 = |z_2|\,(cos\,\theta_2 + i\ sen\,\theta_2) \qquad z_3 = |z_3|\,(cos\,\theta_3 + i\ sen\,\theta_3)$

.

O equivalentemente:

$z_1 = |z_1|_{\theta_1} \qquad z_2 = |z_2|_{\theta_2} \qquad z_3 = |z_3|_{\theta_3}$

considerando $\theta_j = Arg(z_j)$ para $j = 1, 2, 3$

Por resultado anterior tenemos:

$z_1.z_2 = |z_1|.|z_2|_{Arg(z_1.z_2)}$ para cualquier par de complejos

Luego aplicando ese resultado y la asociatividad de la suma y multiplicación de reales:

$$(z_1.z_2).z_3 = (|z_1|.|z_2|_{Arg(z_1.z_2)}).|z_3|_{\theta_3} = (|z_1|.|z_2|).|z_3|_{Arg((z_1.z_2).z_3)} = (|z_1|.|z_2|.|z_3|)_{Arg(z_1.z_2.z_3)}$$

Es decir al multiplicar tres complejos resulta que el producto tiene por módulo el producto de los tres módulos y por argumento....la suma de los tres argumentos más un múltiplo entero de 2π (si pretendemos encontrar el argumento principal).
¿Qué está pensando? ¿Puede generalizar?

♦ PROPIEDAD 8.7.4:

Dados $z_1, z_2, z_3, ...z_n$ complejos se tiene que:

$$z_1.z_2.z_3....z_n = |z_1||z_2||z_3|...|z_n|_{Arg(z_1.z_2.z_3...z_n)}$$ o equivalentemente

$$\prod_{j=1}^{n} z_j = (\prod_{j=1}^{n} |z_j|)_{Arg(\prod_{j=1}^{n} z_j)} \qquad (\forall n)(n \in \mathbb{N} \wedge n > 0)$$

Recordando que:

$$Arg(z_1.z_2.z_3...z_n) = Arg(z_1) + Arg(z_2) + Arg(z_3) + ... + Arg(z_n) + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Demostración:

Como es una propiedad para un número natural *n* de números complejos haremos la demostración por inducción sobre el número de complejos que se multiplican:

P(1): $z_1 = |z_1|_{Arg(z_1)}$ se cumple obviamente.

Veamos que si se cumple *P*(*h*), entonces se cumple *P*(*h*+1):

P(*h*): $z_1.z_2.z_3....z_h = |z_1||z_2||z_3|...|z_h|_{Arg(z_1.z_2.z_3...z_h)}$ es la hipótesis inductiva.

P(*h*+1): $z_1.z_2.z_3....z_{h+1} = |z_1||z_2||z_3|...|z_{h+1}|_{Arg(z_1.z_2.z_3...z_{h+1})}$ es la tesis inductiva.

$$z_1.z_2.z_3....z_{h+1} = \underbrace{(z_1.z_2.z_3...z_h)}_{\text{es igual a * por HI}} .z_{h+1} = (\underbrace{|z_1||z_2||z_3|...|z_h|_{Arg(z_1.z_2.z_3...z_h)}}_{*})|z_{h+1}|_{Arg(z_{h+1})}$$

Ahora consideramos que tenemos el producto de dos complejos en forma polar, uno es $|z_1||z_2||z_3|...|z_h|_{Arg(z_1.z_2.z_3...z_h)}$ y el otro $|z_{h+1}|_{Arg(z_{h+1})}$, por lo tanto, por lo mostrado al principio de este apartado se tiene:

$$z_1.z_2.z_3....z_{h+1} = (|z_1||z_2||z_3|...|z_h|_{Arg(z_1.z_2.z_3...z_h)})|z_{h+1}|_{Arg(z_{h+1})} =$$
$$(|z_1||z_2||z_3|...|z_h|)|z_{h+1}|_{Arg((z_1.z_2.z_3...z_h).z_{h+1})} = |z_1||z_2||z_3|...|z_h||z_{h+1}|_{Arg(z_1.z_2.z_3...z_h.z_{h+1})}$$

Por lo tanto P(h+1) es verdadera y en consecuencia se cumple la proposición para todo n natural mayor que 0.

♦

EJEMPLO 8.7.5:

Calcular $z_1.z_2.z_3$ siendo $z_1 = -1+i \quad z_2 = 4_{\frac{5}{3}\pi} \quad z_3 = 5-5i$.

Comencemos por escribir todos los complejos en forma polar, tenemos entonces

$$z_1 = (\sqrt{2})_{\frac{3}{4}\pi} \quad z_2 = 4_{\frac{5}{3}\pi} \quad z_3 = (\sqrt{50})_{\frac{7}{4}\pi}$$

Veamos ahora que:

$$|z_1|.|z_2|.|z_3| = \sqrt{2}.4.\sqrt{50} = \sqrt{2}.4.5.\sqrt{2} = 40$$

Y $Arg(z_1) + Arg(z_2) + Arg(z_3) = \frac{3}{4}\pi + \frac{5}{3}\pi + \frac{7}{4}\pi = \frac{(9+20+21)}{12}\pi = \frac{50}{12}\pi = \frac{25}{6}\pi$

En forma trigonométrica podríamos escribir que $z_1.z_2.z_3 = 40(\cos\frac{25}{6}\pi + i\, sen\frac{25}{6}\pi)$

Pero como $\frac{25}{6}\pi$ no es argumento principal, para forma polar hacemos

$\frac{25}{6}\pi = \frac{24}{6}\pi + \frac{1}{6}\pi = 4\pi + \frac{1}{6}\pi \simeq \frac{1}{6}\pi$, por lo tanto en forma polar se tiene

$$z_1.z_2.z_3 = 40_{\frac{1}{6}\pi}$$

8. Potenciación en $\mathbb{C}$

Habiendo definido multiplicación, lo natural es que surja el concepto de la potencia. Se verá que si el complejo se da en las formas trigonométrica o polar se tiene una forma muy cómoda y sencilla de realizar esa operación.

Definición (recursiva) de **potenciación natural** para los complejos:

Si $\underline{z \in \mathbb{C} - \{0\}}$:

$$z^n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ z.z^{n-1} & \text{si} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Si $\underline{z = 0}$:

$$z^n = 0 \qquad \text{para} \quad n \geq 1$$

Claramente que para exponente no nulo la potencia es un producto (de factores iguales) luego, por los resultados del parágrafo anterior, será conveniente (sobre todo si el exponente es "grande") realizar las potencias de un complejo cuando éste lo expresamos en forma polar o trigonométrica, es sabido que en la forma binómica se puede abordar usando la fórmula de Newton para las potencias de binomios, pero no es nada practica en este caso.

¿Qué sugieren los resultados y ejemplos anteriores?

EJEMPLO 8.8.1:

Calcular z^2, para cualquier z

Considerando el resultado del apartado 7**.** para dos complejos cualesquiera:

Expresando a z en forma trigonometrica o polar,

$z = |z| \; (cos\, \theta + i \; sen\, \theta) = |z|_\theta$

considerando $z_1 = z_2 = z$ se obtiene:

$$z^2 = |z|.|z| \; (cos\,(\theta + \theta) + i \; sen\,(\theta + \theta)) = |z|^2 \; (cos\,(2\,\theta) + i \; sen\,(2\,\theta)) = |z|^2{}_{Arg(z^2)}$$

Siendo $Arg(z^2) = 2\; Arg(z) + 2k\pi \cong \theta + \theta \quad$ con $k \in \mathbb{Z}$

EJEMPLO 8.8.2:

Calcular z^3, para cualquier z

Se considerarán resultados anteriores para tres complejos cualesquiera.

Se considera z como: $z = |z|\ (\cos\theta + i\ sen\,\theta) = |z|_\theta$

siendo en particular $z_1 = z_2 = z_3 = z$ se obtiene:

$$z^3 = |z|.|z||z|\ (\cos(\theta+\theta+\theta) + i\ sen(\theta+\theta+\theta)) = |z|^3\ (\cos(3\theta) + i\ sen(3\theta)) = |z|^3_{Arg(z^3)}$$

donde $Arg(z^3) = 3\ Arg(z) + 2k\pi \cong 3\theta$ con $k \in \mathbb{Z}$

EJERCICIO 8.8.3:

a) Analizar que conclusión general, esto es para cualquier *n* natural, puede formular.

b) Si *n* = 0 ¿qué precaución debe tomarse?

c) Si z= 0 ¿necesita fórmula para calcular sus potencias? ¿Cuánto valen? ¿Hay alguna indefinida?

Se verá algo muy práctico y súper útil:

♦ **Fórmula de De Moivre para potencia natural de un complejo no nulo:**

Si $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $z = |z|_\theta = |z|(\cos\theta + i\ sen\theta)$

$$z^n = |z|^n\ (\cos(n\theta) + i\ sen(n\theta))$$

En el caso de la forma polar recordar que se debe considerar el argumento principal, luego

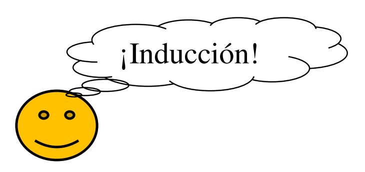
$$z^n = |z|^n_{\ Arg(z^n)}$$

donde $Arg(z^n) = n\ Arg(z) + 2k\pi \ \cong n\theta$ con $k \in \mathbb{Z}$

EJERCICIO 8.8.4:

Demostrar la Fórmula de De Moivre para potencia natural de un complejo no nulo.

(¿por qué método si es para todo natural???)



EJEMPLO 8.8.5:

Calcular z^{15} siendo $z = 3_{\frac{3}{2}\pi}$

Aplicando la fórmula de De Moivre para esta situación tenemos:

$|z| = 3$ entonces $\left|z^{15}\right| = |z|^{15} = 3^{15} = 14348907$ (en general y como en este caso, se dejará indicada la potencia cuando el resultado es "grande" o "muy chico")

$Arg(z) = \frac{3}{2}\pi$ entonces $Arg(z^{15}) = 15.\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$15.\frac{3}{2}\pi = \frac{45}{2}\pi = 22\pi + \frac{\pi}{2} = 2.11.\pi + \frac{\pi}{2} \cong \frac{\pi}{2}$

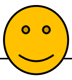
entonces $Arg(z^{15}) = \frac{\pi}{2}$

Por lo tanto: $z^{15} = 3^{15}_{\ \frac{\pi}{2}}$

EJERCICIO 8.8.6:

Calcular z^{43} ; z^5; z^{13} . Representar (al menos los argumentos)

a) $z = 2\text{-}2\,i$ b) $z = (0, 7)$ c) $z = -9 + 9\,i$ d) $z = (-5, 0)$ e) $z = -1 - i$



EJEMPLO 8.8.7:

Busquemos la forma trigonométrica y polar del inverso de un complejo no nulo.

$z = |z|(cos\theta + i\, sen\theta) = |z|_{Arg(z)} \neq 0$

entonces $|z| \neq 0$

Supongamos que $z^{-1} = |z^{-1}|(cos\,\alpha + i\, sen\,\alpha) = |z^{-1}|_{Arg(z^{-1})}$

Por propiedad del producto de un complejo por su inverso:

$$z.z^{-1} = |z||z^{-1}|(\cos(\theta+\alpha) + i\; sen(\theta+\alpha)\,) = 1 = 1_0$$

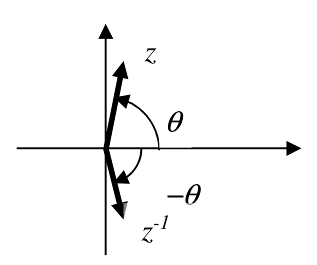
Entonces por igualdad de complejos:

$$\underbrace{|z||z^{-1}| = 1 \quad \text{y} \quad \theta + \alpha = 0 + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}}$$

$$\Downarrow$$

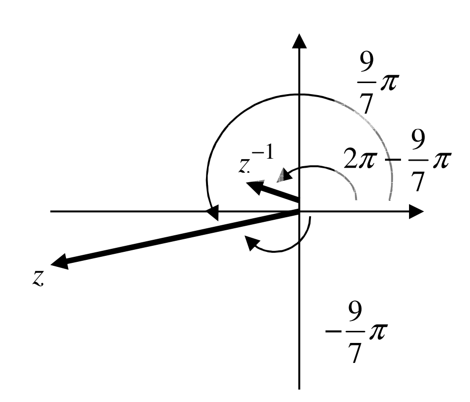
$$|z^{-1}| = |z|^{-1} \quad \text{y} \quad \alpha = -\theta + 2k\pi \;\; \text{con} \;\; k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto $z^{-1} = |z|^{-1}{}_{Arg(z^{-1})}$ siendo $Arg(z^{-1}) = -Arg(z) + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$



EJEMPLO 8.8.8:

Calcular el inverso de $z = 4_{\frac{9}{7}\pi}$



Como $|z| = 4$ entonces $|z^{-1}| = 4^{-1} = \frac{1}{4}$

Para hallar el argumento principal:

$$Arg(z^{-1}) = -\frac{9}{7}\pi + 2.1.\pi = \frac{5}{7}\pi$$

Así resulta: $z^{-1} = \frac{1}{4}_{\frac{5}{7}\pi}$

EJERCICIO 8.8.9:

Calcular en forma polar y trigonométrica los inversos de:

a) z = *2-2 i* b) z = (0, 7) c) z = - 9 + 9 *i* d) z = (-5 , 0) e) z = -1 - *i*

Representar en un mismo gráfico cada complejo con su inverso.

Se generaliza la definición de **potencia** de exponente natural, al caso de **exponente entero *m* para un complejo** arbitrario, observar que por la identificación de los reales dentro de los complejos, esta definición no tiene que entrar en contradicción con la de los números reales. Al igual de la definición hecha para potencia natural.

Para exponente entero como sigue:

Si $\underline{z \in \mathbb{C} - \{0\}}$:

$$z^m = \begin{cases} z^m & \text{si} \quad m \geq 0 \\ (z^{-1})^{-m} & \text{si} \quad m < 0 \end{cases}$$

Si $\underline{z = 0}$:

$$z^m = 0 \qquad \text{para} \quad m \geq 1$$

Para $z = 0$ NO existe la potencia de exponente negativo (como en reales...)

EJEMPLO 8.8.10:

Calcular z^{-5} siendo $z = 2_{\frac{3}{2}\pi}$

Calculemos el inverso de z y elevemos a la 5:

$$\left|z^{-1}\right| = \frac{1}{2}; \quad Arg(z^{-1}) = -\frac{3}{2}\pi + 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

$$\left(z^{-1}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5_{Arg(\left(z^{-1}\right)^5)}$$

$$\text{con } Arg(\left(z^{-1}\right)^5) = 5.\frac{\pi}{2} + 2.(-1).\pi = \frac{\pi}{2}$$

♦ **Fórmula de De Moivre para potencia entera m de un complejo no nulo:**

$$\text{Si} \quad z \in \mathbb{C} - \{0\} \quad \text{y} \quad z = |z|_{\theta} = |z|(cos\,\theta + i\ sen\,\theta)$$

$$z^m = |z|^m\,(cos(m\theta) + i\ sen(m\theta))$$

En el caso de la forma polar recordar que se debe considerar el argumento principal, luego

$$z^m = |z|^m_{\ Arg(z^m)}$$

$$\text{donde } Arg(z^m) = m\ Arg(z) + 2k\pi \ \cong m.\theta \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Demostración:

Como $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $z = |z|_{\theta} = |z|(cos\,\theta + i\ sen\,\theta)$,

$z^m = |z|^m\,(cos(m\theta) + i\ sen(m\theta)) \quad (\forall m)(m \in \mathbb{N})$

Resta probar la propiedad para los enteros negativos.

Sea $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ y $z = |z|_{\theta} = |z|(cos\,\theta + i\ sen\,\theta)$, tenemos que probar:

$$z^m = |z|^m\,(cos(m\theta) + i\ sen(m\theta)) \quad (\forall m)(m \in \mathbb{Z} \wedge m < 0)$$

Como *m < 0*, *- m > 0,* además *m=(-1)(-m),* llamando *n = -m,* se tiene

$$z^m = (z^{-1})^{-m} = (z^{-1})^n \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}$$

Se sabe que $z^{-1} = |z|^{-1}\,(cos(-\theta) + i\ sen(-\theta))$, por lo tanto vale para $(z^{-1})^n$, la Formula de De Moivre para potencia natural, y entonces

$$z^m = (z^{-1})^{-m} = (z^{-1})^n = (|z|^{-1})^n\,(\cos(n\,(-\theta)) + i\ sen(n\,(-\theta)) =$$

$$(|z|^{-1})^{-m}\,(\cos(-m\,(-\theta)) + i\ sen(-m\,(-\theta)) = |z|^m\,(\cos(m\theta) + i\ sen(m\theta))$$

Con lo que queda probada la fórmula para este caso.

♦

EJERCICIO 8.8.12:

Calcular z^{-3} ; z^{-14} ; z^{-83} y representar (al menos los argumentos...)

a) $z = 2\text{-}2\,i$ b) z = (0, 7) c) z = - 9 + 9 i d) z = (-5 , 0) e) z = -1 - i

♦ PROPIEDAD 8.8.13:

Si $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ a) $(z^n)^m = z^{n.m}$

b) $z^n . z^m = z^{n+m}$

Para *n* y *m* enteros.

EJERCICIO 8.8.14:

Probar las propiedades anteriores. Puede aplicar la formula de De Moivre.

➤ *Un caso particular…las potencias de i*

Veamos que cuando el complejo es $z = i$, las potencias tienen un comportamiento especial.

Usando la definición de potencia

$i^0 = 1$

$i^1 = i.i^0 = i$

$i^2 = i.i^1 = i.i = -1$

$i^3 = i.i^2 = i.(-1) = -i$

$i^4 = i.i^3 = i.(-i) = -i^2 = 1$

$i^5 = i.i^4 = i.1 = i$

$i^6 = i.i^5 = i.i = i^2 = -1$

$i^7 = i.i^6 = i.(-1) = -i$

$i^8 = i.i^7 = i.(-i) = -i^2 = 1$

Las potencias se repiten cíclicamente de a 4, lo que nos permite enunciar:

♦ PROPIEDAD 8.8.13:

Dado $m \in \mathbb{Z}$, $i^m = i^r$, siendo $m = 4q + r \quad 0 \le r < 4$.

Elevar *i* a una potencia *m,* es igual a elevar *i* al resto de esa potencia en la división por 4

Demostración:

Dado *m*, por el Teorema Algoritmo de la División existen y son únicos *q* y *r* tales que $m = 4q + r \quad 0 \le r < 4$, *q* es el cociente y *r* es el resto.

Se tiene entonces que $i^m = i^{4.q+r} = i^{4.q}.i^r = (i^4)^q.i^r = 1^q.i^r = i^r$, como queríamos probar.

♦

9. Radicación en $\mathbb{C}$

Consecuencia elemental de haber definido la potencia de un complejo es analizar si existe su operación inversa…

Iniciemos con una aplicación de la fórmula de De Moivre calculando las raíces de la ecuación

$$z^n = 1.$$

Que ya se vio que es muy práctico expresar en este caso a z en forma trigonométrica o polar.

Para algunos *n* naturales y mayores o iguales que 2.

Esto es hallar los complejos z, tales que elevados a la *n* dan 1.

Considerando como es usual $z = |z|\,(cos\,\theta + i\ sen\,\theta) = |z|_{Arg(z)}$

$z^n = |z|^n\,(cos\,n\theta + i\ sen\,n\theta) = |z|^n_{Arg(z^n)}$ donde $Arg(z^n) = n\,\theta + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$

por otra parte $1 = 1(cos\,0 + i\ sen\,0) = 1_0$

e imponiendo la igualdad propuesta $z^n = 1$ por igualdad de complejos se tiene:

$$\underbrace{|z|^n\,(cos\,n\theta + i\ sen\,n\theta) = 1(cos\,0 + i\ sen\,0)}_{entonces}$$

$$|z|^n = |1| \quad \wedge \quad n\theta = 0 + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto el módulo de z es 1 y el argumento de *z* es:

$$arg(z) = \theta = \frac{0 + 2k\pi}{n} = \frac{2k\pi}{n} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

y recordar que $Arg(z)$ es de la forma:

$$Arg(z) = \frac{2k\pi}{n} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \ \text{ y tal que } 0 \le Arg(z) < 2\pi$$

¿Serán necesarios todos los valores enteros *k?*

Es decir: ¿ hay infinitas soluciones distintas de la ecuación????

Por el Teorema Algoritmo de la División, para todo entero *k* vale

$k = c.n + r$ siendo únicos el cociente c y el resto r. Ademas $0 \le r < n$

Reemplazando entonces en la expresión del argumento principal:

$$Arg(z)=\frac{2k\pi}{n}=\frac{2(c.n\ +\ r)\pi}{n}=\frac{2cn\pi}{n}+\frac{2r\pi}{n}$$ cumpliendo las condiciones

$$0\leq r<n \quad \wedge \ 0\leq Arg(z)<2\pi$$

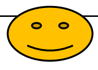
Resulta así que los valores de *r* posibles son *n,* de 0 a *n -1* .

Además:

$$\frac{2cn\pi}{n}=2c\pi \ \text{ con } c\in\mathbb{Z} \ \text{ (un multiplo de circunferencia)}$$

Considerando las limitaciones para el argumento principal: $Arg(z)=\dfrac{2r\pi}{n}$ con $r=0,...,n-1$

Por lo cual la ecuación $z^n = 1$ tiene ***n* raíces complejas.**



Todas las raíces son de módulo 1 (es decir que son *n* puntos sobre la circunferencia unidad) y los argumentos de esos complejos son $0, \ \dfrac{2\pi}{n}, \ \dfrac{2.2\pi}{n}, \cdots , \ \dfrac{2.(n-1)\pi}{n}$

Para cualquier *n*, una de las raíces es real (cuando *r* toma el valor 0). ¿Habrá otra?

Observar que los argumentos están en progresión aritmética de diferencia $\dfrac{2\pi}{n}$, es decir son *n* puntos de la circunferencia unidad de modo que el arco que separa uno de otro se corresponde con un ángulo central de abertura $\dfrac{2\pi}{n}$.

Si $z^n = 1$, z toma *n* valores distintos y escribimos esos valores como:

$$z_0=(\cos 0+i\ sen0)$$
$$z_1=(\cos\frac{2\pi}{n}+i\ sen\frac{2\pi}{n})$$
$$z_2=(\cos\frac{2.2\pi}{n}+i\ sen\frac{2.2\pi}{n}) \ \ .....$$
$$z_{n-1}=(\cos\frac{2.(n-1)\pi}{n}+i\ sen\frac{2.(n-1)\pi}{n})$$

EJERCICIO 8.9.1:
Haga un esquema de la representación de las raíces de la ecuación $z^n = 1$

EJERCICIO 8.9.2:

a) Resuelva y represente las soluciones de $z^3 = 1$. Si une las raíces ¿qué obtiene?

b) Resuelva y represente las soluciones de $z^4 = 1$. Uniendo las raíces...

Se hará con mayor generalidad el trabajo anterior.

Para lo cual definimos:

Dado $z \in \mathbb{C}$ se llama **raíz *n*-ésima** de z con $n \in \mathbb{N} \;\wedge\; n \geq 1$, y se anota $\sqrt[n]{z}$ a los complejos *w* tales que $w^n = z$.

¿Qué ocurre si $n = 1$? Poco interesante!!!

También como aplicación de la fórmula de De Moivre se puede deducir que para cualquier $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ existen n raíces *n*-ésimas de z dadas por:

$$w_k = |w_k|(\cos\theta_k + i\,sen\,\theta_k) = |w_k|_{Arg(w_k)}$$

$$\text{con } |w_k| = \sqrt[n]{|z|} \qquad \text{y} \qquad Arg(w_k) = \frac{Arg(z) + 2.k\pi}{n} \quad \text{para } k = 0, \cdots, n-1$$

Todas las raíces tienen igual módulo, son n puntos de la circunferencia centrada en el origen y radio $\sqrt[n]{|z|}$ y la diferencia entre los argumentos de raíces consecutivas es $\frac{2\pi}{n}$.

EJERCICIO 8.9.3:

a) Probar la fórmula de las raíces *n*-ésimas de un complejo no nulo. Haga un esquema de la representación. Analice que obtiene si une las raíces.

b) Si $z = 0$ tiene raíz *n*-ésima, ¿Cuántas distintas?

c) Calcule $\sqrt[3]{z}$; $\sqrt[4]{z}$; $\sqrt[7]{z}$ y reprente cada caso en un mismo sistema , para los complejos:

1) $z = (-4,0)$; 2) $z = 3 - 6i$ 3) $z = -1 + i\sqrt{3}$ 4) $z = -\sqrt{3} - i$ 5) $z = (0,-8)$

EJEMPLO 8.9.4:
Hallar las raíces quintas de 1.

Para hallar las raíces quintas de 1, tenemos que hallar los complejos que cumplen $z^5 = 1$ Sabemos que $|1| = 1$ y $Arg(1) = 0$, tenemos entonces que:

$$z_k = \cos\frac{0+2k\pi}{5} + i\ sen\frac{0+2k\pi}{5} \qquad 0 \le k \le 4$$

Por lo tanto:

$$z_0 = cos\frac{0+2.0\pi}{5} + i\ sen\frac{0+2.0k\pi}{5} = cos\,0 + i\ sen0 = 1$$

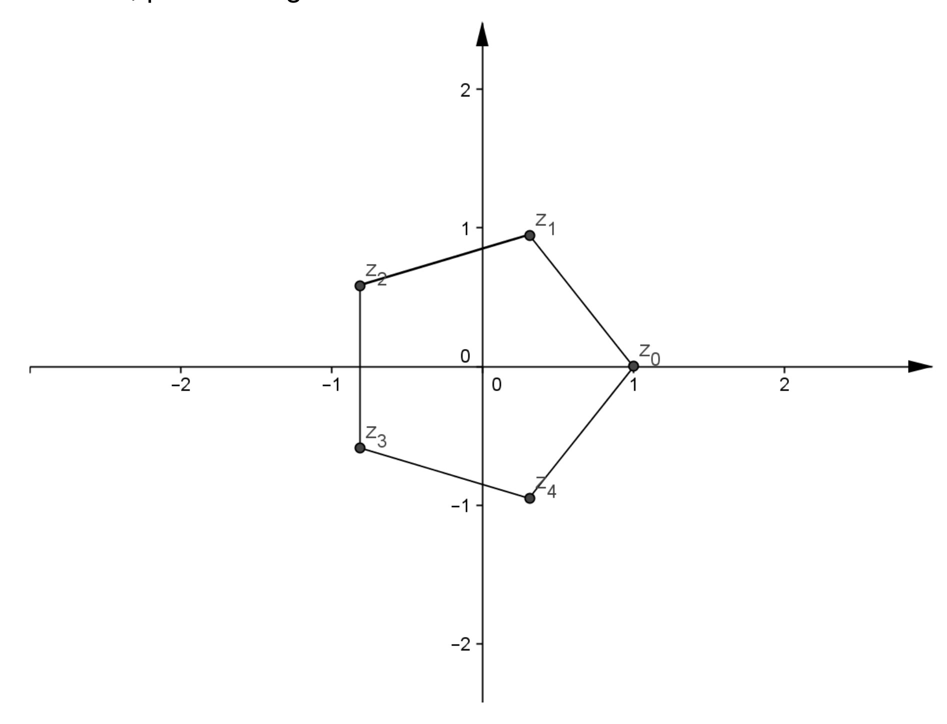
$$z_1 = cos\frac{2.1\pi}{5} + i\ sen\frac{2.1\pi}{5} = cos\frac{2\pi}{5} + i\ sen\frac{2\pi}{5}$$

$$z_2 = cos\frac{2.2\pi}{5} + i\ sen\frac{2.2\pi}{5} = cos\frac{4\pi}{5} + i\ sen\frac{4\pi}{5}$$

$$z_3 = cos\frac{2.3\pi}{5} + i\ sen\frac{2.3\pi}{5} = cos\frac{6\pi}{5} + i\ sen\frac{6\pi}{5}$$

$$z_4 = cos\frac{2.4\pi}{5} + i\ sen\frac{2.4\pi}{5} = cos\frac{8\pi}{5} + i\ sen\frac{8\pi}{5}$$

Graficamos las raíces quintas y observamos que al trazar los segmentos entre ellas queda formado un pentágono regular, ya que las raíces son equidistantes entre sí, pues el ángulo



que central que las separa es igual….

EJEMPLO 8.9.5:

Resolver la ecuación $4.z^4 + 2i = -2$

Por las propiedades de la suma y la multiplicación se llega a (¿está seguro???, hágalo!)

$$z^4 = \frac{-2-2i}{4}$$

$$z^4 = \frac{\sqrt{2}}{2}_{\frac{5}{4}\pi}$$

Luego, para hallar las soluciones de la ecuación se calculan las raíces cuartas de $\frac{\sqrt{2}}{2}_{\frac{5}{4}\pi}$

Aplicando la fórmula, hallamos las soluciones que son los cuatro complejos:

$$z_0 = \sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{\frac{\frac{5}{4}\pi}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{\frac{5}{16}\pi}$$

$$z_1 = \sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{\frac{\frac{5}{4}\pi+2.1.\pi}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{\frac{13}{16}\pi}$$

$$z_2 = \sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{\frac{\frac{5}{4}\pi+2.2.\pi}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{\frac{21}{16}\pi}$$

$$z_3 = \sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{\frac{\frac{5}{4}\pi+2.3.\pi}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{\frac{29}{16}\pi}$$

Verifique y esquematice las soluciones. ¿Qué obtiene si une los puntos?

EJEMPLO 8.9.6:

Sabiendo que una de las raíces cúbicas de un complejo z, es $w = 3(cos\frac{\pi}{6} + i\ sen\frac{\pi}{6})$, hallar las restantes raíces y el complejo z.

Como sabemos que todas las raíces *n*-ésimas de un complejo tienen el mismo módulo y sus argumentos difieren en $\frac{2\pi}{n}$, en esta situación $n = 3$, por ello las otras raíces deben ser:

$w_1 = 3(cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}) + i\ sen(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})) = 3(cos\frac{5\pi}{6} + i\,sen\frac{5\pi}{6})$ y

$w_2 = 3(cos(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}) + i\ sen(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})) = 3(cos\frac{9\pi}{6} + i\,sen\frac{9\pi}{6})$.

Además por ser raíces cúbicas, todas ellas elevadas al cubo deben dar como resultado el complejo z, entonces:

$$w^3 = 3(\,cos\,3\frac{\pi}{6} + i\,sen\,3\frac{\pi}{6}) = 3(\,cos\frac{\pi}{2} + i\,sen\frac{\pi}{2})$$

Por lo tanto $z = 3(\cos\frac{\pi}{2} + i\,sen\frac{\pi}{2}) = 0 + 3i$ = $3i$

EJERCICIO 8.9.7:

Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $(3-3i).z^3 - (2+i) = 0$

b) $z^{35} - (7 + i\,7\sqrt{3}) = 5 + i\ 5\sqrt{3}$

c) $(4,0).(-8,-8).z^6 + (-1,1).(2,2) = (-2,2)$

10. Raíces primitivas de la unidad

En este apartado *n* es mayor o igual que 2.

- Comencemos calculando las raíces cuadradas de 1:

$$w^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad w = \sqrt{1}$$
$$1 = cos\,0 + i\,sen\,0$$

Ya que $|1| = 1$ y $Arg(1) = 0$, tenemos entonces que:

$$w_0 = cos\,(\frac{0 + 2.0\pi}{2}) + i\,sen\,(\frac{0 + 2.0\pi}{2}) = 1 + 0i = 1$$

$$w_1 = cos\,(\frac{0 + 2.1\pi}{2}) + i\,sen\,(\frac{0 + 2.1\pi}{2}) = -1 + 0i = -1$$

En este caso hay sólo raíces reales.

- Calculemos las raíces cúbicas de 1:

  $w^3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad w = \sqrt[3]{1}$

  $1 = cos\,0 + i\,sen\,0$

Tenemos entonces:

$$w_0 = cos(\frac{0+2.0\pi}{3}) + i\,sen(\frac{0+2.0\pi}{3}) = 1 + 0i = 1$$

$$w_1 = cos(\frac{0+2.1\pi}{3}) + i\,sen(\frac{0+2.1\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_2 = cos(\frac{0+2.2\pi}{3}) + i\,sen(\frac{0+2.2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

- Si calculamos las raíces cuartas de 1 al calcular w_0, dará 1, ya que en principio es cierto que $1^n = 1$, para cualquier *n.* En particular para *n* = 4

Notemos además que $Arg(w_0) = \frac{0+2.0\pi}{4} = 0$ y $|w_0| = 1$.

$$w_1 = cos(\frac{0+2.1\pi}{4}) + i\,sen(\frac{0+2.1\pi}{4}) = cos\frac{\pi}{2} + i\,sen\frac{\pi}{2} = 0 + 1i = i$$

$$w_2 = cos(\frac{0+2.2\pi}{4}) + i\,sen(\frac{0+2.2\pi}{4}) = cos\pi + i\,sen\,\pi = -1 + 0\,i = -1$$

$$w_3 = cos(\frac{0+2.3\pi}{4}) + i\,sen(\frac{0+2.3\pi}{4}) = cos\frac{3\pi}{2} + i\,sen\frac{3\pi}{2} = 0 - 1i = -i$$

Comentario importante (en particular para los alumnos de Lic. en Matemática que luego verán otras situaciones similares…): Se dará un concepto muy importante dentro del Algebra. Este concepto es sólo un ejemplo de concepto que trasciende el tema de los números complejos ya que es ejemplo de un elemento que puede generar todos los elementos de un conjunto.

***w* es raíz *n*-ésima primitiva de orden *n* de 1** si:

$$w^n = 1 \quad \text{y} \quad (\forall n')(\ 0 < n' < n \text{ entonces } w^{n'} \neq 1).$$

Es decir que *w* es raíz *n*-ésima de 1 y además *n* es el menor natural tal que $w^n = 1$

w_0 no es primitiva para ningún *n*, ya que
$w_0 = 1$ entonces $(w_0)^{n'} = 1$ para todo $n' > 0$

- Para *n* =2 , w_1 es primitiva de orden 2,

  ya que $w_1 = -1$ y se cumple que $(-1)^2 = 1$ y $(-1)^1 \neq 1$

- Para *n*=3 w_1 y w_2 son primitivas de orden 3:

$$w_1 = cos(\frac{2\pi}{3}) + i\ sen(\frac{2\pi}{3}),\ \text{se cumple que :}$$

$$(w_1)^3 = 1 \quad \text{y} \quad (w_1)^1 \neq 1 \quad \text{y}\ (w_1)^2 \neq 1.\ \text{¡Seguro!}$$

$$w_2 = cos(\frac{4\pi}{3}) + i\ sen(\frac{4\pi}{3}),\ \text{se cumple:}$$

$$(w_2)^3 = 1 \quad \text{y} \quad (w_2)^1 \neq 1 \quad \text{y}\ (w_2)^2 \neq 1.\ \text{Porqué??}$$

Observar que la definición significa que una raíz ***n***-ésima de 1 *w* es **primitiva de orden *n*** si no es raíz de raíz de 1 para ningún *n*'< *n*.

Es para ese *n* que *w* aparece por primera vez como raíz de 1 …..

EJERCICIO 8.10.1:
Hallar las raíces cuartas, quintas y sextas de 1.

Hallar cuáles de ellas son primitivas de ese orden.

¿Será que para todo *n* hay raíces primitivas de orden *n* de 1??? Acá está la respuesta:

♦PROPIEDAD 8.10.2:
Para todo *n > 0*, w_1 (la dada por la fórmula para *k* = 1) es raíz primitiva de orden *n* de 1.

Demostración:

Como $1 = cos\,0 + i\ sen\,0$, $w_1 = cos\frac{2\pi}{n} + i\ sen\frac{2\pi}{n}$ entonces

$$(w_1)^n = cos\frac{n.2\pi}{n} + i\,sen\frac{n.2\pi}{n} = cos\,2\pi + i\,sen\,2\pi = 1$$

Resta probar que si *n'*, es un natural tal que *0 < n' < n*, entonces $(w_1)^{n'} \neq 1$.

Supongamos por el absurdo que existe *n'* , *0 < n' < n* , tal que $(w_1)^{n'} = 1$, entonces

$(w_1)^{n'} = cos\frac{n'.2\pi}{n} + i\ sen\frac{n'.2\pi}{n} = 1 = cos\,0 + i\ sen\,0$, por lo tanto

$$\frac{n'.2\pi}{n} = 0 + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \quad \text{entonces } n'.2\pi = n.2k\pi$$

$$\text{haciendo cuentas resulta} \quad n' = n.k$$

Entonces si *k* es negativo *n'* también lo es, y si *k* es positivo *n' > n,* absurdo, ya que habíamos supuesto que *0 < n' < n.*

Por lo tanto w_1 es primitiva de orden *n* de 1.

♦

Para cualquier *n* se sabe que $w_1 = cos\frac{2\pi}{n} + i\ sen\frac{2\pi}{n}$ entonces $w_k = (w_1)^k$, ya que

$w_k = cos\frac{2k\pi}{n} + i\ sen\frac{2k\pi}{n}$ y $(w_1)^k = cos\frac{k2\pi}{n} + i\ sen\frac{k2\pi}{n}$ por De Moivre.

Esto significa que todas las raíces *n*-ésimas de 1 se expresan como potencia de w_1

Esta observación se generaliza:

♦ PROPIEDAD 8.10.3

w es raíz *n*-ésima primitiva de la unidad de orden *n* si y sólo si $w^0, w^1, w^2, ..., w^{n-1}$ son todas las raíces *n*- ésimas de 1.

Demostración:

Veamos primero que si *w* es raíz *n*-ésima primitiva orden *n* de la unidad entonces $w^0, w^1, w^2, ..., w^{n-1}$ son todas las raíces de orden *n* de 1.

Como por hipótesis *w* es raíz primitiva de la unidad de orden *n*, se tiene:

$w^n = 1$ y si $0 < n' < n$ entonces $w^{n'} \neq 1$

Para cualquiera de la lista es $(w^h)^n = (w^n)^h = (1)^h = 1 \quad (\forall h)(\ 0 \le h < n\ )$, entonces $w^0, w^1, w^2, ..., w^{n-1}$ son raíces *n*-ésimas de 1.

Falta ver que son todas las raíces *n*-ésimas de 1, para esto veremos que son todas distintas, así se comprobará que son *n.* (Por el absurdo)

Supongamos que $w^t = w^s$ para *s* y *t*, con *s* distinto de *t* y tales que $0 \le s < n$ y $0 \le t < n$, entonces

$$w^t - w^s = 0 \quad \text{y} \quad w^s(w^{t-s} - 1) = 0 \quad \text{suponiendo que} \quad s < t,$$

luego $w^s = 0$ o $(w^{t-s} - 1) = 0$, pero $w^s \ne 0$ porque $w \ne 0$ (justifique!!!!) entonces $w^{t-s} - 1 = 0$ entonces $w^{t-s} = 1$.

Absurdo, porque *w* es primitiva de orden *n* de 1 y además 0 < *t* - *s* < *n*. Por lo tanto $w^{t-s} \ne 1$.

Por lo tanto $w^0, w^1, w^2, ..., w^{n-1}$ son todas raíces *n*-ésimas de la unidad y son todas distintas, por lo tanto al ser *n* son todas las raíces *n*-ésimas de 1.

Veamos ahora el recíproco, es decir que si la hipótesis es $w^0, w^1, w^2, ..., w^{n-1}$ son todas las raíces *n*- ésimas de 1, entonces *w* es raíz *n*-ésima primitiva de la unidad de orden *n.*

Hay que probar que $w^n = 1$ y si $0 < n' < n$ entonces $w^{n'} \ne 1$.

Como $w = w^1$ elevando a la n a ambos miembros se tiene que $w^n = (w^1)^n$ y como w^1 es raíz n–ésima de 1 por hipótesis, $(w^1)^n = 1$ y por lo tanto *w* es raíz *n*–ésima de 1.

Falta ver que *w* es primitiva.

Supongamos que existe n', $0 < n' < n$ tal que $w^{n'} = 1$, entonces como se sabe que $w^0 = 1$, tenemos que $w^0 = w^{n'}$.

Absurdo, pues entonces dos de los complejos de la lista, que por hipótesis son todas las raíces

n-ésimas de 1, serían iguales entonces no habría *n* raíces sino a lo sumo *n*-1, por lo tanto no serían ***todas*** las raíces *n*-ésimas de 1 que se sabe que son *n*.

En consecuencia *w* es primitiva de orden *n* de 1.

♦

Lo que sigue significa que para *n* > 2, hay más de una raíz primitiva de orden *n* de 1:

♦ PROPIEDAD 8.10.4:
Si *w* es raíz *n*-ésima primitiva orden *n* de la unidad entonces $\overline{w}$ es raíz *n*-ésima primitiva de orden *n* de la unidad.

Demostración:
Como *w* es primitiva de orden *n*, $w^n = 1$ y si $0 < n' < n$ $w^{n'} \neq 1$.
Se quiere ver que $\overline{w}^n = 1$ y si $0 < n' < n$ $\overline{w}^{n'} \neq 1$.
Por propiedades de la conjugación: $\overline{w}^n = \overline{w^n} = \overline{1} = 1$ por lo tanto $\overline{w}$ es raíz de orden *n* de 1.
Supongamos por el absurdo que existe *n'*, $0 < n' < n$ tal que $\overline{w}^{n'} = 1$, entonces tenemos que $\overline{w^{n'}} = 1$ y aplicando el conjugado a ambos miembros $\overline{\overline{w^{n'}}} = \overline{1}$, por lo tanto: $w^{n'} = 1$. Absurdo, porque *w* es raíz primitiva de orden *n* de 1.

♦

Es decir, si un complejo es raíz primitiva de orden *n* de 1 su conjugado también lo es.
¿Qué ocurre si un real es primitiva de orden *n* (caso *n* = 2) ?

En lo que sigue se verán algunas propiedades que permitirán determinar para cada *n* cuáles son las primitivas de orden *n* de 1.

♦PROPIEDAD 8.10.5:
Sea *w* raíz *n*-ésima primitiva orden *n* de la unidad. Si $w^k = 1, \quad k \in \mathbb{N}$ entonces *n* divide a *k*.

Demostración:
Por hipótesis $w^k = 1, \quad k \in \mathbb{N}$ y como *n* es natural no nulo, por el Teorema Algoritmo de la División tenemos que $k = c.n + r \qquad 0 \le r < n$, para *c* y *r* únicos. Entonces

$$w^k = w^{c.n+r} = w^{c.n}.w^r = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Porque } w \text{ es raíz } n\text{-ésima}}}{(w^n)^c}.w^r = (1)^c.w^r = w^r \qquad \text{entonces} \quad w^k = w^r = 1$$

Pero como *w* es primitiva de orden *n* y $0 \le r < n$ entonces *r* = 0 para no contradecir la hipótesis, en consecuencia $k = c.n$ por lo cual *n* divide a *k.*

♦

♦ PROPIEDAD 8.10.6:
w_k es raíz *n*-ésima primitiva de orden *n* de la unidad si y sólo si (*k, n*) = 1, es decir *k* y *n* son coprimos.

Demostración:
Probaremos primero que si (*k, n*) = 1 entonces w_k es primitiva de orden *n* de 1, siendo

$$w_k = cos\frac{2k\pi}{n} + i\ sen\frac{2k\pi}{n}$$

w_k es raíz *n*-ésima de 1, falta probar que $(w_k)^{n'} \neq 1$ para un n' con $0 < n' < n$ para que sea primitiva de orden *n.*

Sabemos también por observación anterior que $w_k = (w_1)^k$.

Supongamos que $(w_k)^{n'} = ((w_1)^k)^{n'} = 1$ con $0 < n' < n$, entonces $(w_1)^{k.n'} = 1$ y como w_1 es primitiva, por propiedad 8.10.5, vale que $n | n'.k$.

Como (*k, n*)=1 entonces *n* no divide a *k*, entonces $n | n'$ Absurdo porque *n' < n* y $n' \neq 0$.

Por lo tanto w_k es primitiva de orden *n* de 1.

Se probará que si w_k es raíz *n*-ésima primitiva de orden *n* la unidad entonces (*k, n*)=1, es decir *k* y *n* son coprimos.

Sea *d* = (*k, n*), entonces $d | k$ y $d | n$ así *k = d.h* y *n = d.q* para *h* y *q* enteros.

Observar que son enteros los números $q = \frac{n}{d}$ y que $h = \frac{k}{d}$

Luego $(w_k)^q = (w_1{}^k)^q = w_1{}^{kq} = w_1{}^{k\frac{n}{d}} = (w_1{}^n)^{\frac{k}{d}} = 1^{\frac{k}{d}} = 1$ ya que $\frac{k}{d}$ = *h.*

Pero entonces *q* = 0 ó $q \geq n$ ya que w_k es primitiva, pero como *n = d .q* , 0< $q \leq n$ por lo tanto *q = n* y en consecuencia *d* =1. Se tiene entonces que *n* y *k* son coprimos.

♦

EJEMPLO 8.10.10:
Calcular las raíces primitivas de orden 8 de 1:

Hay que hallar las w_k tales que (k,8) = 1, entonces (1,8) = (3,8) = (5,8) = (7,8) = 1.

Las primitivas son:

$$w_1 = cos\frac{2\pi}{8} + i\ sen\frac{2\pi}{8}$$

$$w_3 = cos\frac{2.3\pi}{8} + i\ sen\frac{2.3\pi}{8}$$

$$w_5 = cos\frac{2.5\pi}{8} + i\ sen\frac{2.5\pi}{8}$$

$$w_7 = cos\frac{2.7\pi}{8} + i\ sen\frac{2.7\pi}{8}$$

EJERCICIO 8.10.11

a) Calcular las raíces primitivas de orden 7 de 1 y representarlas.
b) Calcular las raíces primitivas de orden 12 de 1 y representarlas.

EJERCICIO 8.10.12

Probar que si *n* es par y z es raíz primitiva de orden *n* de 1, entonces $z^{\frac{n}{2}} = 1$

11. Exponente Fraccionario

Se han definido potencias naturales y potencias enteras en los casos posibles, se va a generalizar a los exponentes fraccionarios.

Para todo $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, $z^{\frac{p}{q}}$ como las raíces ***q*-ésimas de** z^p .

Es decir que si $z = |z|(cos\ \theta + i\ sen\,\theta)$, $z^{\frac{p}{q}}$ tiene *q* resultados:

$$u_k = \sqrt[q]{|z|^p}\,(cos\frac{p\theta + 2k\pi}{q} + i\ sen\frac{p\theta + 2k\pi}{q}) \quad 0 \le k \le q-1$$

No es lo mismo intercambiar el orden de las operaciones, no es lo mismo las raíces *q*-ésimas de z^p, que calcular las potencia *p*-ésima de las raíces *q*-ésimas de z. 
Mirar los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 8.11.1:

Sea z = 2+ 2 *i* , hallar $z^{\frac{3}{2}}$.

Como $|z| = \sqrt{8}$ y $Arg(z) = \frac{\pi}{4}$, tenemos al aplicar la definición:

$z^3 = (\sqrt{8})^3 (cos\, 3\frac{\pi}{4} + i\, sen\, 3\frac{\pi}{4})$ entonces las raíces cuadradas de z al cubo son:

$$u_0 = \sqrt{(\sqrt{8})^3}\,(cos\frac{3\frac{\pi}{4} + 2.0\pi}{2} + i\, sen\frac{3\frac{\pi}{4} + 2.0\pi}{2}) = \sqrt{(2\sqrt{2})^3}\,(cos\frac{3\pi}{8} + i\, sen\frac{3\pi}{8})$$

$$u_1 = \sqrt{(2\sqrt{2})^3}\,(cos\frac{3\frac{\pi}{4} + 2.1\pi}{2} + i\, sen\frac{3\frac{\pi}{4} + 2.1\pi}{2}) = \sqrt{(2\sqrt{2})^3}\,(cos\frac{11\pi}{8} + i\, sen\frac{11\pi}{8})$$

Si calculáramos primero las raíces cuadradas de z y luego las eleváramos al cubo resulta:

Raíces cuadradas de z

$$w_0 = \sqrt{2\sqrt{2}}\,(cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2.0\pi}{2} + i\, sen\frac{\frac{\pi}{4} + 2.0\pi}{2}) = \sqrt{2\sqrt{2}}\,(cos\frac{\pi}{8} + i\, sen\frac{\pi}{8})$$

$$w_1 = \sqrt{2\sqrt{2}}\,(cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2.1\pi}{2} + i\, sen\frac{\frac{\pi}{4} + 2.1\pi}{2}) = \sqrt{2\sqrt{2}}\,(cos\frac{9\pi}{8} + i\, sen\frac{9\pi}{8})$$

Elevando al cubo las raíces cuadradas de z:

$$w_0{}^3 = (\sqrt{2\sqrt{2}})^3\,(cos\frac{3\pi}{8} + i\, sen\frac{3\pi}{8})$$

$$w_1{}^3 = (\sqrt{2\sqrt{2}})^3\,(cos\frac{27\pi}{8} + i\, sen\frac{27\pi}{8})$$

En este caso se cumple que $u_0 = (w_0)^3$ y $u_1 = (w_1)^3$ ya que tienen el mismo módulo y sus ángulos son iguales o congruentes.

EJEMPLO 8.11.2

Hallemos ahora para el mismo z, $z^{\frac{4}{2}}$.

De acuerdo a la definición: $z^4 = (\sqrt{8})^4 (cos\, 4\frac{\pi}{4} + i\; sen\, 4\frac{\pi}{4}) = (2\sqrt{2})^4 (cos\, \pi + i\; sen\, \pi)$

Calculando las raíces cuadradas:

$$u_0 = \sqrt{(2\sqrt{2})^4} (cos \frac{\pi + 2.0.\pi}{2} + i\; sen \frac{\pi + 2.0\pi}{2}) = \sqrt{(2\sqrt{2})^4} (cos \frac{\pi}{2} + i\; sen \frac{\pi}{2})$$

$$u_1 = \sqrt{(2\sqrt{2})^4} (cos \frac{\pi + 2.1\pi}{2} + i\; sen \frac{\pi + 2.1\pi}{2}) = \sqrt{(2\sqrt{2})^4} (cos \frac{3\pi}{2} + i\; sen \frac{3\pi}{2})$$

Veamos ahora si calculamos primero las raíces cuadradas de z:

$$w_0 = \sqrt{(2\sqrt{2})} (cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2.0.\pi}{2} + i\; sen \frac{\frac{\pi}{4} + 2.0\pi}{2}) = \sqrt{(2\sqrt{2})} (cos \frac{\pi}{8} + i\; sen \frac{\pi}{8})$$

$$w_1 = \sqrt{(2\sqrt{2})} (cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2.1\pi}{2} + i\; sen \frac{\frac{\pi}{4} + 2.1\pi}{2}) = \sqrt{(2\sqrt{2})} (cos \frac{9\pi}{8} + i\; sen \frac{9\pi}{8})$$

Elevando ahora a la cuarta ambas raíces resulta:

$$w_0{}^4 = \sqrt{(2\sqrt{2})} (cos \frac{4\pi}{8} + i\; sen \frac{4\pi}{8}) = \sqrt{(2\sqrt{2})} (cos \frac{\pi}{2} + i\; sen \frac{\pi}{2})$$

$$w_1{}^4 = \sqrt{(2\sqrt{2})} (cos \frac{9\pi}{2} + i\; sen \frac{9\pi}{2}) = \sqrt{(2\sqrt{2})} (cos \frac{\pi}{2} + i\; sen \frac{\pi}{2})$$

En este caso, encontramos distintos resultados si intercambiamos el orden, ya que las raíces cuadradas de z a la cuarta nos dan 2 complejos solución y la potencia cuarta de las raíces cuadradas de z nos da un único complejo como solución.

No podemos intercambiar el orden de las operaciones.



Pero se tiene la siguiente propiedad:

♦ TEOREMA 8.11.3:

Sea $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, $z^{\frac{p}{q}}$ por definición son las raíces *q*-ésimas de z^p y coinciden con $(\sqrt[q]{z})^p$, si y sólo si (*p, q*) = 1.

Demostración:

Probaremos primero que si (*p, q*) = 1 los resultados de $z^{\frac{p}{q}}$, definido como $\sqrt[q]{z^p}$ coinciden con los complejos $(\sqrt[q]{z})^p$.

Sea $z = |z|(cos\,\theta + i\,sen\,\theta)$, un complejo no nulo.

Sean los conjuntos:

$$T = \left\{ u_h : u_h = \sqrt[q]{|z|^p}\,(cos\frac{p.\theta + 2h\pi}{q} + i\,sen\frac{p.\theta + 2h\pi}{q}) \quad 0 \le h \le q-1 \right\}$$

$$P = \left\{ (w_k)^p : w_k = \sqrt[q]{|z|}(cos\frac{\theta + 2k\pi}{q} + i\,sen\frac{\theta + 2k\pi}{q}) \quad 0 \le k \le q-1 \right\}$$

Queremos ver que *T = P.*

En el conjunto *T* tiene *q* elementos, veamos cuántos hay en el conjunto *P*.

Los w_k son *q* distintos por ser raíces *q*-ésimas de z.

Vamos a probar que al elevarlos a la *p* obtengo *q* valores distintos.

$$w_k = \sqrt[q]{|z|}(cos\frac{\theta + 2k\pi}{q} + i\,sen\frac{\theta + 2k\pi}{q}) \text{ así}$$

$$(w_k)^p = (\sqrt[q]{|z|})^p (cos\; p.\frac{\theta + 2k\pi}{q} + i\,sen\; p.\frac{\theta + 2k\pi}{q})$$

$$arg((w_k)^p) = p.\frac{\theta + 2k\pi}{q} = \frac{p.\theta + p.2k\pi}{q}$$

Por el teorema Algoritmo de la División, como *q* es no nulo: $k.p = c.q + r$ con $0 \le r < q$

Entonces $arg\,((w_k)^p) = \frac{p.\theta + (cq + r)2\pi}{q} = \frac{p.\theta + cq2\pi + r2\pi}{q} = \frac{p.\theta}{q} + 2c\pi + \frac{2r\pi}{q}$

$$arg\,((w_k)^p) \simeq \frac{p.\theta + 2r\pi}{q}$$ como $0 \le r < q$ entonces $(w_k)^p \in T$ luego $P \subseteq T$

Se probará que *P* tiene *q* elementos.

Vamos a considerar 2 raíces *q*-ésimas distintas de *z,* sean

w_t y w_j con $t \ne j$ queremos probar que $(w_t)^p \ne (w_j)^p$.

$$w_t = \sqrt[q]{|z|}(cos\frac{\theta+2t\pi}{q} + i\ sen\frac{\theta+2t\pi}{q}) \text{ así } (w_t)^p = (\sqrt[q]{|z|})^p(cos\ p\frac{\theta+2.t.\pi}{q} + i\ sen\ p\frac{\theta+2.t\pi}{q})$$

$$w_j = \sqrt[q]{|z|}(cos\frac{\theta+2j\pi}{q} + i\ sen\frac{\theta+2j\pi}{q}) \text{ así } (w_j)^p = (\sqrt[q]{|z|})^p(cos\ p\frac{\theta+2j\pi}{q} + i\ sen\ p\frac{\theta+2j\pi}{q})$$

Los módulos de estos complejos son iguales, para ver que son diferentes

$(w_t)^p$ y $(w_j)^p$

analicemos sus argumentos.

Si sus argumentos fueran congruentes la diferencia debe ser un múltiplo de 2π, entonces

$$p\frac{\theta+2t\pi}{q} - p\frac{\theta+2j\pi}{q} = 2h\pi \quad h \in \mathbb{Z}, \text{ luego haciendo cuentas:}$$

$$\frac{p\theta + p2t\pi - p\theta - p2j\pi}{q} = 2h\pi \text{ y resulta } \frac{2\pi p(t-j)}{q} = 2h\pi$$

Dividiendo por 2π se tiene $\frac{p.(t-j)}{q} = h$ por lo cual $p.(t-j) = h.q$ lo que significa que

$q \mid p.(t-j)$ pero como por hipótesis *p* y *q* son coprimos, entonces $q \mid t-j$.

Pero $0 \le t < q$ y $0 \le j < q$ y además $t-j$ es no nulo y entonces $0 < |t-j| < q$.

Absurdo pues en estas condiciones que $q \mid t-j$, así los argumentos no son congruentes por lo tanto $(w_t)^p \neq (w_j)^p$.

Como $P \subseteq T$ y *P* tiene *q* elementos y *T* tiene *q* elementos, entonces *P* = *T*.

Veamos ahora que tomando los conjuntos *P* y *T* como antes, si *P* = *T* entonces (*p, q*)=1.

Lo que equivale a demostrar que: $(p,q) \neq 1$ entonces $P \neq T$

Y esto se probó en el Ejemplo 8.11.2.

♦

Ejercicios Adicionales de todo el Capitulo.

1. Escribir en su forma binomial mínima $a + b\,i$, con $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, y como pares ordenados (a, b) los siguientes números complejos:

a) $6 - 8i - (5 + 2i) - (9 - 7i)$

b) $(2 + 5i)(-4 - 6i)(-1 + 3i)$

c) $\frac{1}{2i}\left(\frac{4 + 2i}{1 - 2i} + \frac{3 + 4i}{2 + 3i}\right)$

d) $\frac{2}{1 - i} + \frac{i}{-2 + 2i} - \frac{3i}{1 - i}$

e) $(1 - i)^3 (1 - i)$

f) $2i\frac{(1 + i)^2}{2 - i} + 5i\frac{(1 + i)^4}{(2 - i)^2}$

2. Calcular y expresar el resultado en forma binómica:

a) $i^{18} + i^{19}$

b) $i^{53} - 3i^7 + i^{21}(1 - (2i)^2)$

c) $-i^{43}(-i)^{203} + 2i^{-13}$

3. Siendo $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$, calcular la parte real, la parte imaginaria y el conjugado de los siguientes números complejos:

a) $i + a$

b) $\frac{1 + 2i}{3 - i}$

c) $\frac{a}{bi}$

d) $\frac{1}{a + bi}$

4. Sean z, w dos números complejos cualesquiera, demostrar:

a) $\mathrm{Re}(z + w) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w)$, $\quad \mathrm{Im}(z + w) = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w)$

b) $\mathrm{Re}(zw) = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(w) - \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(w)$, $\quad \mathrm{Im}(zw) = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(w) + \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Re}(w)$

5. Sean $z \in \mathbb{C}$ y $w \in \mathbb{C}$, demostrar las siguientes propiedades:

a) $\overline{z^2} = \overline{z}^{2}$

b) $|z.w| = |z||w|$

c) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ para $w \neq 0$

d) $z.w = 0$ si y sólo si $(z = 0 \vee w = 0)$

6. Sean $z_j \in \mathbb{C}$, para $1 \leq j \leq n$, demostrar por inducción:

a) $\overline{\sum_{j=1}^{n} z_j} = \sum_{j=1}^{n} \overline{z_j}$

b) $\left|\prod_{j=1}^{n} z_j\right| = \prod_{j=1}^{n} |z_j|$

7. Hallar los conjugados de:

a) $\left||1-i|+i\right| + i$

c) $1 + i + i^2 + i^3 + ... + i^{53}$

b) $(1-2i)(2-i)(i+1)$

d) $1 + \dfrac{i}{1 + \dfrac{i}{1+i}}$

8. Probar las siguientes equivalencias:

a) $|w| = 0 \Leftrightarrow w = 0$

b) $|w| = 1 \Leftrightarrow w^{-1} = \overline{w}$

9. Sean $z \in \mathbb{C}$ y $w \in \mathbb{C}$, demostrar:

$$|z|^2 + |w|^2 = \frac{|z+w|^2 + |z-w|^2}{2}$$

10. Dados $z \in \mathbb{C}$ y $w \in \mathbb{C}$, analizar la validez del siguiente enunciado:

$$z^2 + w^2 = 0 \Leftrightarrow (z = 0 \text{ y } w = 0)$$

11. Representar gráficamente los conjuntos de puntos del plano que satisfacen las condiciones:

a) $|z-2| = 3$

b) $|z| \leq a$ con $a \in \mathbb{R}^+$

c) $|z+1-2i| - 2 > 0$

d) $\operatorname{Im}(z\bar{z}) = 0$

e) $|\operatorname{Re}(z)| \leq 1$

f) $z + \bar{z} = 3$

g) $\operatorname{Re}(z(1+2i)) = 0$

h) $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 2.\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(\bar{z})$

i) $\operatorname{Im}(z) \geq 2$ y $|z+1+i| < 4$

j) $-1 \leq 1 - |\bar{z} + i| < 0$

k) $|z(4+3i)| = 10$

l) $\dfrac{-2\operatorname{Re}(\bar{z})\operatorname{Im}(\bar{z})}{6i-2} + \dfrac{z^2}{|6i|+2i} = 0$

12. Sean $z \in \mathbb{C}$ y $w \in \mathbb{C}$, mostrar que si $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z}{w}\right) = 0$ entonces $|z+w| = |z| + |w|$

13. Escribir en forma polar y trigonométrica los siguientes números complejos:

a) $2 + 2\sqrt{3}i$

b) $\dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i}$

c) $(1+i)^{-1}$

d) $sen\dfrac{\pi}{6} + i\, sen\dfrac{\pi}{6}$

14. Calcular:

a) $(1-\sqrt{3}\,i)^{20}$

b) $(-2+i)^{12}$

c) $(1-i)^8\,(3.\sqrt{3} + 3i)^{-4}$

d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{200} \left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^j$

15. Dados $x = 3(cos\dfrac{\pi}{6} + i\, sen\dfrac{\pi}{6}),\quad y = 1+i$ y $z = 2_{\frac{3\pi}{2}}$, calcular:

a) $\dfrac{x^3 y}{z}$

b) $z^{17}\left(\dfrac{\bar{x}}{y^4}\right)^5$

16. Dado $z \in \mathbb{C}$, de módulo 1 y argumento $\theta,\ 0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$, hallar el módulo y el argumento de

z +1 en función de θ. (Indicación: representar gráficamente)

17. Analizar para qué valores de $n \in \mathbb{N}$, el valor de $(1+i)^n$ es:

a) Real positivo

b) Real negativo

c) Imaginario puro

18. Demostrar aplicando la fórmula de De Moivre , para $n \in \mathbb{N}$

a) $(z_1 . z_2)^n = z_1{}^n . z_2{}^n$

b) $z_2 \neq 0$ entonces $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \frac{z_1{}^n}{z_2{}^n}$

19. Dado $w \in \mathbb{C}$ tal que $1 + w + w^2 = 0$, encontrar la relación de *w* con las raíces cúbicas de $z = 1$.

20. a) Si $z = \frac{3i-1}{6i}$, calcular las raíces terceras de $z|z|$.

b) Representarlas en el plano complejo teniendo en cuenta una propiedad de simetría. ¿Cuál?

21. Determinar a y b para que $z = 1+i$ sea una solución de la ecuación $z^5 + a.z^3 + b = 0.$

22. Encontrar los complejos z que son solución de las siguientes ecuaciones:

a) $(2i\, z^3 - 4 - 4i)(z-i)^2 = 0$

b) $\frac{z}{z^2+9} + \frac{3}{z^2 + 6i.z - 9} = 0$

c) $(z^2 + 1 + i)^2 (z^2 - 1 - i)^2 = 4$

d) $\frac{z}{(i+z)(z-i)} - \frac{i}{(z+i)^2} - \frac{2}{z-i} = 0$

23. Hallar las raíces sextas de $z=-1+i$ y representar gráficamente. De acuerdo con la figura, ¿existe alguna raíz sexta *w* que también verifique $\overline{w}^6=z$?

24. a) Un pentágono regular centrado en el origen de coordenadas cartesianas tiene uno de sus vértices en el punto (-2, 0). Calcular usando números complejos las coordenadas de sus restantes vértices.
b) Ídem a), para un hexágono regular centrado en (-1, 1) y con un vértice en (-1,4).

25. Cuáles de los siguientes números complejos son raíces *n*-ésimas de 1?

a) $cos\sqrt{3}\pi+i\ sen\sqrt{3}\pi$ b) $cos\frac{3}{4}\pi+i\ sen\frac{3}{4}\pi$ c) $cos\frac{15}{18}\pi+i\ sen\frac{15}{18}\pi$

26. Probar que el producto, cociente y potencia de exponente natural de las raíces *n*-ésimas de 1 son también raíces *n*-ésimas de 1.

27. a) Sea $z\in\mathbb{C}$ tal que existen enteros positivos *n* y *m* tales que $z^n=z^m=1$.
Probar que si *d* = (*n* , *m*) entonces $z^d=1$.
b) Probar que si *n* y *m* son números naturales coprimos, entonces si $z\in\mathbb{C}$ y $z^n=z^m=1$ entonces z = 1.

28. a) Probar que calculada una de las raíces *n*-ésimas de un complejo, las demás se pueden obtener haciendo su producto con cada una de las raíces *n*-ésimas de la unidad.
b) Calcular las raíces quintas de *i*.

29. Determinar en cada caso la totalidad de soluciones en $\mathbb{C}$

a) $(z+1)^3=z^3$
b) $(z-1)^6=i\,z^6$
c) $(z-2)^6=(z-3)^5$
d) $(z^2-3z+1)^4=1$
e) $z^4=4+3i$
f) $z^2+2iz+1=0$
g) $(z+1)^4+1=0$
h) $(z^6+2i)^{30}=0$

30. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos en $\mathbb{C}$ el conjunto: $G_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$, de todas las raíces *n*-énesimas de 1.

a) Sean *m* y *n* números naturales, sea *d* = (*m, n*), probar que $G_n \cap G_m = G_d$.

b) Probar que $G_n \subset G_m$ si y sólo $n \mid m$.

CAPITULO 9
Polinomios en una indeterminada

En este capítulo trabajaremos con polinomios con coeficientes en un cuerpo conmutativo *K*, por ejemplo el de los números racionales, reales, complejos o los $\mathbb{Z}_p$ con $p \in \mathbb{N}$ y p número primo. Las propiedades y definiciones son válidas en ese contexto. Es importante resaltar esto ya que muchas de las propiedades no se verifican si se trabaja con polinomios con coeficientes en conjuntos que no son cuerpo.

1. Definiciones básicas

Se llama **polinomio en una indeterminada** x a una expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

para $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ elementos de K, que son los **coeficientes.**

Recordar que por la identificación establecida, los números complejos incluyen a los reales, es decir los reales son un caso particular.

Se designa por $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$ a los conjuntos de polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ respectivamente. Y $\mathbb{Z}_p[x]$ a los polinomios con coeficientes en $\mathbb{Z}_p$

x no representa una variable real ni compleja. Se la llama ***indeterminada.***

Por ejemplo si $P(x) = 4x^5 + \sqrt{2}x^4 - 3x + 1$; en este polinomio
$a_5 = 4;\ a_4 = \sqrt{2};\ a_3 = a_2 = 0;\ a_1 = -3;\ a_0 = 1$ son los coeficientes.

Los exponentes de x son números naturales.

NO ES un polinomio una expresión de la forma

$H(x) = 3x^{-2} + 2x + x^2 + 3$; pues está x elevada a –2 en uno de los términos.



Se llama **grado de un polinomio** al mayor n tal que a_n sea distinto de 0.

En el ejemplo, $P(x)$ es de grado 5, pues $a_5 = 4 \neq 0$ y al no estar explícitos otros a_i con $i > 5$, significa que $a_i = 0$ para $i > 5$

El polinomio $Q(x) = \sqrt{3}x^4 + 8x - x^7$ tiene grado 7 pues $a_0 = 0$; $a_1 = 8$; $a_2 = a_3 = 0$; $a_4 = \sqrt{3}$; $a_5 = a_6 = 0$; $a_7 = -1$

Se llama **polinomio nulo** y se anota $\boldsymbol{0(x)}$ al polinomio cuyos coeficientes son todos 0. Es decir:

$0(x) = 0x^m + 0\,x^{m-1} + \dots\dots\dots + 0x + 0$

Observar que de acuerdo a la definición el polinomio $\boldsymbol{0(x)}$ **NO TIENE GRADO**.

Además se admite que se puede escribir de muchas maneras, por ejemplo

$0(x) = 0x^2 + 0 = 0x^{10} + 0x^8 + 0x + 0$

EJERCICIO 9.1.1

Analizar si las siguientes expresiones son polinomios; en caso afirmativo hallar su grado

$T(x) = x^3 - \frac{1}{3}x^{-2} + x$; $P(x) = \frac{1}{3}x^4 - 2x^3 - 7x + x^2$;

$R(x) = 2x - 7 - i + \frac{1}{x}$; $Q(x) = x^6 + x - 0{,}7$;

$S(x) = 4x - \frac{1}{3}x - 1 + 3i\,x^2 - x^3$; $U(x) = (2 + 3\,i)\,x^5 + (3 - i)\,x^2 - 1$

EJEMPLO 9.1.2
Consideremos

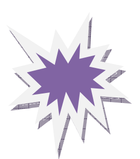
$P(x) = 3x^2 + 2x - x^4 + 1 + 0 + 0x^5$ y $Q(x) = 2x + 3x^2 + 1 - x^4$

Mirando con atención se percibe que para igual potencia de x el coeficiente de $P(x)$ es igual al coeficiente de $Q(x)$.

Dados dos polinomios no nulos cualesquiera

$P(x) = a_n\ x^n + a_{n-1}\ x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ y $Q(x) = b_m\ x^m + b_{m-1}\ x^{m-1} + ...+ b_1\ x + b_0$

ellos **son iguales** si se cumple



$$\begin{cases} \text{gr}(P(x)) = \text{gr}(Q(x)) \\ \text{Y} \\ \text{si} \quad a_i = b_i \quad 0 \le i \le \text{gr}(P(x)) = \text{gr}(Q(x)) \end{cases}$$

lo anotaremos $P(x) = Q(x)$

El polinomio nulo $0(x)$ es igual a si mismo en cualquiera de las formas que se presente.

2. OPERACIONES: suma, producto por un elemento de *K* y multiplicación

De alguna manera los polinomios pueden considerarse como una extensión del cuerpo numérico. De ahí que se han definido sobre ellos operaciones del mismo tipo a las definidas en *K*, además pretendiendo que conserven las “buenas” propiedades de esas operaciones sobre *K.*

Recordatorio, que nos servirá de motivador para lo que sigue e interesa definir:

I) Un **término** es una expresión algebraica donde hay números, letras (que simbolizan números) o números y letras.

II) **Términos semejantes** son aquellos que tienen la misma parte literal, por ejemplo:

$3a^2bc^{-1}$ y $-\frac{4}{5}a^2\,bc^{-1}$ son semejantes.

$3\,ab^{-8}$ y $3a^{-1}b$ no son semejantes

4/9 y -3 son semejantes (¿porque?)

III) Al sumar términos semejantes se puede reducir la expresión, por ejemplo:

$$3a^2bc^{-1} + (\frac{-4}{5})a^2bc^{-1} = (3 + (\frac{-4}{5}))a^2bc^{-1} = \frac{11}{5}a^2bc^{-1}$$

IV) Al multiplicar términos se opera respetando las leyes de potenciación y la conmutatividad de producto, por ejemplo:

$$\frac{3}{5}a^2b^{-3}c\frac{25}{7}a^{-1}bc = \frac{3}{5}.\frac{25}{7}a^2b^{-3}ca^{-1}bc = \frac{15}{7}ab^{-2}c^2$$

Para el caso de las operaciones con polinomios usaremos el mismo criterio, aunque es de destacar nuevamente que x no simboliza un número.

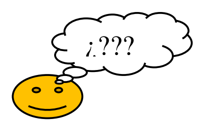
EJEMPLO 9.2.1

Para calcular $P(x) = 2x^3 + 4x^5 - x^2 + 2$ más $Q(x) = x^4 - 2x^5 + 3x^3 + x^2 - 1$, cuyo resultado anotaremos $P(x) + Q(x)$, se suman los coeficientes de los términos de igual grado (es decir, de x elevada al mismo exponente). En el ejemplo:

$$P(x) + Q(x) = (2+3)\,x^3 + (4\ -2)\,x^5 + (-1+1)\,x^2 + x^4 + (2-1) = 5x^3 + 2x^5 + x^4 + 1$$

esto se expresa también diciendo que se "suma coeficiente a coeficiente".

Qué ocurre si realizamos $P(x) + 0(x)$ =.........?



Es por eso que a $0(x)$ se lo llama polinomio nulo, pues para la suma se comporta como el número 0 de K.

Decimos así que el polinomio nulo es el **elemento neutro** en la suma de polinomios

En general:

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ ambos no nulos, con grado n y m respectivamente.

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ...+ a_1 x + a_0$ y $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ...+ b_1 x + b_0$

Si $m = n$: $P(x) + Q(x) = (a_n + b_n) x_n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x_{n-1} + ... + (a_0 + b_0)$

Si $m < n$: $P(x) + Q(x) = a_n x^n + ...+ (a_m + b_m) x^m + ... + (a_0 + b_0)$

Completar un polinomio es explicitar con 0 los coeficientes de las potencias de x que no se presentan.

EJEMPLO 9.2.2

a) $H(x) = x^4 + 3x^3 + 4$

Completar $H(x)$ significa escribir $H(x) = x^4 + 3x^3 + 0x^2 + 0x + 4$

b) $T(x) = \dfrac{1}{3} x^3 - 2x^5 + x^2$ el completado de $T(x)$ es

$$T(x) = -2x^5 + 0x^4 + \frac{1}{3} x^3 + x^2 + 0x + 0$$

En algunas situaciones es conveniente ***"ordenar"*** un polinomio. Por ello se entiende escribirlo según potencias crecientes o decrecientes de x. En el caso de $T(x)$ hemos dado el ordenado y completado según potencias decrecientes

EJERCICIO 9.2.3

Complete y ordene según potencias crecientes los polinomios:

$P(x) = 3x^2 - 2x^4 + 10$

$Q(x) = x^3 - 4x^2 + 5x^4 + x$

$R(x) = (2-i) x^3 + 4x^2 - (7-5i) x^4 + x + 3i$

Luego, utilizando la idea de ordenar un polinomio en la definición de la suma de $P(x)$ y $Q(x)$, con grado n y m respectivamente, para el caso de $m < n$, como $P(x) \neq Q(x)$ podemos afirmar que completaremos $Q(x)$ hasta el grado de $P(x)$ y entonces

$P(x) + Q(x) = (a_n + b_n) x^n + ... + (a_0 + b_0)$

Por la definición dada es inmediato que valen las siguientes propiedades de la suma:

- Si $P(x)$, $Q(x)$ y $T(x)$ son polinomios con coeficientes en K entonces se cumplen las propiedades:

  Asociativa: $(P(x)+ Q(x)) + T(x) = P(x) +(Q(x) + T(x))$ (I)

  Conmutativa: $P(x)+ Q(x) = Q(x) + P(x)$ (II)

Demostración de (II):

Sean $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...+ a_1x + a_0$ y $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ...+ b_1x + b_0$

Si $m < n$, completando $Q(x)$, se tiene que:

$P(x)+ Q(x) = (a_n + b_n) x_n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x_{n-1} + ... + (a_0 + b_0) =$

por la propiedad conmutativa de la suma en K es igual a

$= (b_n + a_n) x_n + (b_{n-1} + a_{n-1}) x_{n-1} + ... + (b_0 + a_0) = Q(x) + P(x)$

♦

EJERCICIO 9.2.4

a) Justifique que $P(x) + Q(x)$ es un polinomio. Cómo puede decir que es la suma en el conjunto $K[x]$ de polinomios x con coeficientes en K ?

b) Demuestre la propiedad (I) .

c) Realice $P(x) + Q(x)$ en el caso de

$P(x) = x^4 +3x - 2 x^2 + 3$ y $Q(x) = 2x^2 – 3x – 3 - x^4$

¿Qué observa? ¿Que diría?



EJERCICIO 9.2.5

Dado un polinomio cualquiera $P(x)$, determinar cuál es su **opuesto**. ¿Cómo anotaría el opuesto de $P(x)$?

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, existe un polinomio $Q(x)$ tal que $P(x) + Q(x) = 0(x)$, decimos que $Q(x)$ es **el opuesto** de $P(x)$, siendo $Q(x) = -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - ... - a_1 x - a_0$

E indicaremos a $Q(x)$ por $- P(x)$.

Resumiendo, la suma definida en $K[x]$, siendo $K = \mathbb{Z}_p$ con $p \in \mathbb{N}$ y p número primo, $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$, es cerrada, asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro y elemento opuesto. Resulta entonces que el conjunto de los polinomios en una indeterminada sobre un cuerpo conmutativo *K*, dotado de la operación +, se verifica que ($K[x]$, +) tiene la estructura de **grupo conmutativo**

EJERCICIO 9.2.6

Dados los siguientes polinomios, en cada caso, complete y ordene según potencias decrecientes de x y halle el opuesto:

$P(x) = x^4 - x^6 + 1 - 2x$, $Q(x) = x^2$, $R(x) = 1 - x^2 + x^4$

$S(x) = (1+i)\ x^4 - 2x + 5 + x^5 + (\sqrt{3} - 7\ i)\ x^8$, $T(x) = 5\ i\ x^9 - 2\ x^4 + i - 1$

$H(x) = \overline{3}x^3 + \overline{4}x^2 + \overline{5}$ $R(x) = \overline{4}x^3 + \overline{3}x^2 + \overline{2}$ en $\mathbb{Z}_7[x]$

Restar al polinomio $P(x)$ el polinomio $Q(x)$ es realizar $P(x) + (-Q(x)) = P(x) - Q(x)$

EJEMPLO 9.2.7

Calcular $P(x) + Q(x)$ y $P(x) - Q(x)$ siendo

$P(x) = 3x^2 - x^4 + 3x - 1$ y $Q(x) = x^3 + x^2 - 2x + 3$

Las operaciones se pueden realizar utilizando una disposición similar a la utilizada para operar con números de varias cifras. Para ello se elige una forma (creciente o decreciente) de ordenar las potencias, luego se disponen uno debajo del otro de modo que queden encolumnados los términos semejantes. Por último se suman los coeficientes. Veamos en el ejemplo:

$P(x)$	$- x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 3x - 1$
$Q(x)$	$x^3 + x^2 - 2x + 3$
	$- x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2$

luego $P(x) + Q(x) = - x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2$

$P(x)$	$-x^4 - 0x^3 + 3x^2 + 3x - 1$
$-Q(x)$	$-x^3 - x^2 + 2x - 3$
	$-x^4 - x^3 + 2x^2 + 5x - 4$

Resulta $P(x) - Q(x) = -x^4 - x^3 + 2x^2 + 5x - 4$

EJEMPLO 9.2.8

Calcular $P(x) + Q(x)$ para

$P(x) = 3x^5 - 2x^3 + 8$ y $Q(x) = 4x^5 + 3x^2 + ix + 2 - i$

$P(x)$	$3x^5 + 0x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 0x + 8$
+	
$Q(x)$	$4x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 3x^2 + ix + 2 - i$
$P(x) + Q(x) =$	$7x^5 + 0x^4 - 2x^3 + 3x^2 + ix + 10 - i$

EJEMPLO 9.2.9:

Calcular $P(x) + Q(x)$ para $P(x) = 3x^5 - 2x^3 - i$ y $Q(x) = -3x^5 + 2x^2 + 2 - i$

$P(x)$	$3x^5 + 0x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 0x - i$
+	
$Q(x)$	$-3x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 0x + 2 - i$
$P(x) + Q(x) =$	$0x^5 + 0x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 0x + 2 - 2i$

Observar que el grado de una suma de polinomios puede ser igual al mayor de los de los grados o menor que él.

El grado de una suma de polinomios, no es un valor determinado.

Pues puede dar el polinomio nulo o si tiene grado resulta:

$$\text{gr}\,(P(x)+Q(x)) \leq \text{Max}\{\text{gr}\,(P(x)), \text{gr}\,(Q(x))\}$$



No tiene un valor fijo pero tiene una cota superior si el resultado de la suma no es el polinomio nulo.

Veamos el siguiente ejemplo: dado un complejo *r* y un polinomio $P(x)$ se realiza $r.\ P(x)$ de modo que resulte un polinomio**,** así:

$(3\,i).\ (4x^4 - 2x + 3)$ se resuelve multiplicando los coeficientes del polinomio por *3 i*. Resultará así un polinomio. ¿Por qué? Se podría considerar que el *3i* distribuye en la suma formal que es el polinomio. Se obtiene así:

$3i.4x^4 + 3\,i.\ (-2)x + 3\,i\ .\ 3 = 12\,i\,x^4 - 6\,i\,x + 9\,i$

Generalizando

- ***Producto por escalar*:**

Dados $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ...+ a_1 x + a_0 \in K[x]$ y $r \in K$

Se define:

$$r.\ P(x) = r.\ a_n\,x^n + r.a_{n-1}\,x^{n-1} + ... + r.\ a_1 x + r.a_0$$

EJERCICIO 9.2.10

a) Justifique que $r.\ P(x)$ es un polinomio en x con coeficientes en *K.*

b) Probar que valen:

$(r + t).\ P(x) = r\ .\ P(x) + t\ .\ P(x)$ (en este caso + significa cosas distintas, porque??)

$(r\ .\ t).\ P(x) = r\ .(\ t\ .\ P(x))$ (en este caso algunos . significan cosas distintas, porque??)

$r\ .(\ P(x) + Q(x)) = r\ .\ P(x) + r\ .\ Q(x)$

$1_K\ .\ P(x) = P(x)$

EJERCICIO 9.2.11

Efectuar las operaciones indicadas y en cada caso indicar cuál es el grado del resultado:

$$(3x^3 - 2x^2 - x^4 + x) + \frac{1}{2}(x^3 - x + x^2 + \frac{1}{3}) =$$

$$\frac{1}{2}(2x^4 - 3x^2 + x - 1) - 5\,i\,(x^4 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{25}\ x^2 + x^3 - 5^{-2}\ ) =$$

$$(x^4 - 2x + x^3) + (3x^3 - x^2 + 2x + 1\ ) + \frac{1}{3}\ (3\ -12\,x^3 - 3x^4 + 3\,x^2\ ) =$$

$$-1(x^2 + 3x - 1) + (x^2 + 3x - 1) =$$

$$0.\ (x^{41} + 28x^{21} - \frac{82}{\sqrt{3}}x - 1\ ) =$$

$$(2+3\,i)\;(x^4 - 2x + x^3) - (5+i)\;(4x^4 + (1-2\,i)\,x + x^3 + 5\,i)$$

➤ ***Multiplicación de polinomios***

Se define la **multiplicación de polinomios** con la pretensión que algunas propiedades de la multiplicación de los números se sigan satisfaciendo, por ejemplo que el resultado sea un polinomio, que sea asociativo y valga la distributividad del producto en la suma, entre otras.

Para establecer la definición se considera

al ser x una indeterminada debemos analizar y definir su comportamiento:

$x^n \,.\, x^m = x^{n+m}$ para *n, m* naturales

$a.\, x^n = x^n \,.\, a$ para a un elemento de *K* y *n* natural

Se va a introducir la operación, con lo que se pretende lograr para ella, por un ejemplo para luego generalizar:

EJEMPLO 9.2.12

Realizar la multiplicación de $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - \frac{2}{3}$ por $Q(x) = 2x^4 - x$, será multiplicar cada término de *P*(x) por cada término de *Q*(x) y sumar. Aplicamos lo que se definió con las potencias de la indeterminada x y su conmutación con los números. Luego se tiene así:

$$P(x).\,Q(x) = 3x^3 \,.\, 2x^4 + 3x^3 \,.\, (-x) + 4x^2 \,.\, 2x^4 + 4x^2 \,.\, (-x) + (\frac{-2}{3})2x^4 + (\frac{-2}{3}).(-x) =$$

$$= 3.\,2x^3 \,.\, x^4 + 3(-1)\,x^3 \,.\, x + 4 \,.\, 2x^2 \,.\, x^4 + 4(-1)x^2 \,.\, x + (\frac{-2}{3})2x^4 + (\frac{-2}{3})(-1)\,x =$$

$$= 6x^7 - 3x^4 + 8x^6 - 4x^3 - \frac{4}{3}x^4 + \frac{2}{3}x =$$

$$= 6x^7 + 8x^6 - \frac{13}{3}x^4 - 4\,x^3 + \frac{2}{3}x$$

Observe que al multiplicar *P*(x) de grado 3 por *Q*(x) de grado 4 se ha obtenido un polinomio de grado 7.

Vamos a ir generalizando paulatinamente:

Observemos como resulta producto de la siguiente multiplicación, siendo:

$$P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \text{y} \quad Q(x) = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

$$P(x).Q(x) = a_3x^3(b_2x^2 + b_1x + b_0) + a_2x^2(b_2x^2 + b_1x + b_0) +$$
$$+ a_1x(b_2x^2 + b_1x + b_0) + a_0(b_2x^2 + b_1x + b_0) =$$

$$= a_3x^3b_2x^2 + a_3x^3b_1x + a_3x^3b_0 + a_2x^2b_2x^2 + a_2x^2b_1x + a_2x^2b_0 +$$
$$+ a_1xb_2x^2 + a_1xb_1x + a_1xb_0 + a_0b_2x^2 + a_0b_1x + a_0b_0$$

Por cómo se definió el comportamiento del producto de las diferentes potencias de x, y su comportamiento por los elementos de *K:*

Agrupando por las potencias de x:

$$P(x).Q(x) = a_3b_2x^5 + (a_3b_1 + a_2b_2)x^4 + (a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2)x^3 + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2$$
$$+(a_1b_0 + a_0b_1)x + a_0b_0 =$$

$$= (\sum_{i+j=5} a_ib_j)x^5 + (\sum_{i+j=4} a_ib_j)x^4 + (\sum_{i+j=3} a_ib_j)x^3 + (\sum_{i+j=2} a_ib_j)x^2 + (\sum_{i+j=1} a_ib_j)x + \sum_{i+j=0} a_ib_j =$$

$$= \sum_{k=0}^{5}(\sum_{i+j=k} a_ib_j)x^k$$

EJERCICIO 9.2.13

¿Cómo resultará en general el grado del producto de polinomios no nulos? ¿Qué ocurre si uno de los factores es *0*(x)?

Grado de la multiplicación de polinomios no nulos de $K[x]$

¡Si!

Si gr (*P*(x)) = *n* y gr (*Q*(x)) = *m* entonces gr (*P*(x).*Q*(x)) = *n + m*

Sean los polinomios $P(x) = a_nx^n + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ y $Q(x) = b_mx^m + ... + b_1x + b_0$ el producto entre ambos es : $P(x).Q(x) = \sum_{k=0}^{n+m}(\sum_{i+j=k} a_ib_j)x^k$

A partir de la definición podemos ver que:

Si $P(x) \in K[x], Q(x) \in K[x]$ y $T(x) \in K[x]$, *K* cuerpo conmutativo, valen las siguientes propiedades de la multiplicación:

Asociativa: $P(x).\ (Q(x).T(x)) = (P(x).Q(x)).T(x)$

Conmutativa: $P(x).Q(x) = Q(x).P(x)$

Distributiva de la multiplicación respecto de la suma:

$$P(x).(Q(x)+T(x)) = P(x).Q(x) + P(x).T(x)$$

Unidad: existe el polinomio $1(x) = 1_K$ tal que $P(x).1(x) = P(x)$

Por el cumplimiento de estas propiedades entonces ($K[x]$,+, .) es un **anillo conmutativo con unidad.**

¡¡No todo polinomio tiene inverso multiplicativo!! Pues si $P(x) = x^2$, ¿por qué polinomio tendría que multiplicarlo para que el resultado de $1(x)$? Claramente ese factor no es polinomio. Los exponentes deben ser números naturales…

EJERCICIO 9.2.14
Para *K* cuerpo conmutativo. Demuestre que los únicos polinomios invertibles de $K[x]$ (es decir con inverso multiplicativo) son los polinomios de grado cero. En otras palabras, los elementos no nulos de *K*.

Recordatorio: (*A*, +, .) es un **dominio de integridad** si es un anillo conmutativo con unidad y además para dos elementos a y b cualesquiera de *A*, si $a.b = 0$ entonces $a = 0$ ó $b = 0$.

♦ LEMA 9.2.15

Sea *K* cuerpo conmutativo, entonces ($K[x]$, +, .) es un dominio de integridad**.**

Demostración:

Sean $P(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ y $Q(x) = b_m x^m + ... + b_1 x + b_0$ polinomios de $K[x]$,

si $P(x).Q(x) = O(x)$, entonces por la definición y la suposición:

$P(x).Q(x) = \sum_{k=0}^{n+m} (\sum_{i+j=k} a_i b_j) x^k = O(x)$, así todos los coeficientes son 0.

Además el coeficiente principal de $P(x).Q(x)$ es $a_n b_m = 0$ y por ser K cuerpo, si $a_n \neq 0,$ existe

a_n^{-1} por lo tanto $1_K.b_m = a_n^{-1}.(a_n.b_m) = a_n^{-1}.0$ entonces $b_m = 0$.

Por lo tanto $Q(x) = b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$, por lo tanto el coeficiente principal de $P(x).Q(x)$ es

$a_n b_{m-1} = 0$ y por ser K cuerpo, si $a_n \neq 0,$ $1_K.b_m = a_n^{-1}.(a_n.b_{m-1}) = a_n^{-1}.0$ entonces $b_{m-1} = 0$.

Y así se puede seguir, para $Q(x) = b_{m-2}x^{m-2} + ... + b_1 x + b_0$ y resultará que

$1_K.b_{m-2} = a_n^{-1}.(a_n.b_{m-2}) = a_n^{-1}.0$ entonces $b_{m-2} = 0$, luego se demuestra que todos los coeficientes de $Q(x)$ son 0, es decir $Q(x) = O(x)$

Análogamente si se considera $b_m \neq 0,$ y $P(x).Q(x) = O(x)$, se llega a $P(x) = O(x)$.

Luego se tiene entonces que $(K[x],+,.)$ es un dominio de integridad.

♦

Para realizar la multiplicación de polinomios puede hacerse también una disposición práctica de los mismos, análoga a la usada para multiplicar a mano números, ya que los números en base 10 tienen una estructura polinomial. Para hacer 2354 x 123, se dispone

```
   2354
 x  123
 ------
```

y se van multiplicando cada una de las cifras 2354 por c/u de las 123 y luego se suman….los números que quedan encolumnados, como ya se sabe hacer.

Dados $P(x)$ y $Q(x)$, si gr $(P(x)) \geq$ gr $(Q(x))$ o el número de términos no nulos de $P(x)$ es mayor o igual que el número de términos no nulos de $Q(x)$ se disponen los polinomios

$$\begin{array}{r} P(x) \\ \times \;\; Q(x) \\ \hline \end{array}$$

Habiendo ordenado y completado previamente los polinomios (es para "guardar lugar" a las sucesivas potencias de x que puedan ir surgiendo por la multiplicación).

Se entenderá mejor con el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 9.2.16

$P(x) = 4x^3 - 2x^4 + 3x + 1$; $Q(x) = \frac{2}{3}x^2 + x - 3$, es gr $(P(x)) >$ gr $(Q(x))$,

entonces se procede a multiplicar cada término de $P(x)$ por los sucesivos términos de $Q(x)$, al

cambiar de término "corremos un lugar" a la izquierda sucesivamente hasta terminar $Q(x)$, para encolumnar los términos de igual grado:

$$
\begin{array}{r}
-2x^4 + 4x^3 + 0x^2 + 3x + 1 \\
\frac{2}{3}x^2 + x - 3 \\
\hline
6x^4 - 12x^3 + 0x^2 - 9x - 3 \\
-2x^5 + 4x^4 + 0x^3 + 3x^2 + x \\
-\frac{4}{3}x^6 + \frac{8}{3}x^5 + 0x^4 + 2x^3 + \frac{2}{3}x^2 \\
\hline
-\frac{4}{3}x^6 + \frac{2}{3}x^5 + 10x^4 - 10x^3 + \frac{11}{3}x^2 - 8x - 3
\end{array}
$$

Luego sumamos los términos semejantes que habrán quedado encolumnados.

Apliquemos este esquema para los polinomios:

$$P(x) = 3x^3 + 4x^2 + 0x - \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad Q(x) = 2x^4 + 0x^3 + 0x^2 - x + 0$$

El gr ($Q(x)$) > gr ($P(x)$) pero el número de términos no nulos de $P(x)$ es mayor que el número de términos no nulos de $Q(x)$, luego se dispone:

$$
\begin{array}{r}
3x^3 + 4x^2 + 0x - \frac{2}{3} \\
2x^4 + 0x^3 + 0x^2 - x + 0 \\
\hline
-3x^4 - 4x^3 + 0x^2 + \frac{2}{3}x + 0 \\
6x^7 + 8x^6 + 0x^5 + \frac{4}{3}x^4 + 0x^3 + 0x^2 \\
\hline
6x^7 + 8x^6 + 0x^5 - \frac{13}{3}x^4 - 4x^3 + 0x^2 + \frac{2}{3}x + 0
\end{array}
$$

Luego sumamos los términos semejantes que habrán quedado encolumnados.

Al tener definido la multiplicación, se tiene el caso particular de cuando ambos factores coinciden, pero como la multiplicación es asociativa se puede definir:

➢ ***Potencia natural de polinomios***

Para $n \in \mathbb{N} \wedge \quad P(x) \neq 0(x)$

$$P(x)^n = \begin{cases} 1(x) & \text{si} \quad n = 0 \\ P(x).P(x)^{n-1} & \text{si} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Para $n \in \mathbb{N} - \{0\} \quad \wedge \quad P(x) = 0(x) \; : \qquad P(x)^n = 0(x)$

EJERCICIO 9.2.17

a) Dados los polinomios

$P(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $R(x) = -3x^2 + x$ y $Q(x) = -5x^4 + 3x^2 - 2$

efectuar las siguientes operaciones:

i) $P(x) \,.\, (Q(x) - R(x))$; ii) $P(x) \,.\, Q(x) - P(x) \,.\, R(x)$

iii) $P(x) \,.\, Q(x) + 3(P(x) + R(x))$; iv) $Q(x) - 5/3\, x^2 \,.\, P(x)$

v) $R^2(x) - 2x \,.\, Q(x)$ vi) $P(x)^3$

b) Sin hacer los cálculos determinar el grado de:

i) $(x - 3)^2$; ii) $(x^2 - 3\,i)^2 \,.\, (x + (-1 + 2\,i))^3$ iii) $(x^3 - 3x^2 - i)^2 \,.\, (3/5\, x^2 - 4i\, x + 1)$

EJERCICIO 9.2.18

Efectuar las operaciones indicadas:

a) $(x + 5).\,(x - 6)^2$; b) $(4x - 1)^3 - (4x + 1)^3$

c) $(x - (2 + 2\,i))^2 .\,(x + 3)^3$; d) $(x - 3\,i).(\,x + 3\,i\,)$

EJERCICIO 9.2.19

Sean los polinomios de $\mathbb{Z}_7[x]$

$P(x) = \bar{3}\, x^5 + \bar{2}\, x^3 + \bar{4}\, x^2 + \bar{3}\, x + \bar{2}$ y $Q(x) = \bar{2}\, x^6 + \bar{4}\, x^4 + \bar{3}\, x^3 + \bar{3}\, x^2 + \bar{2}$

Calcular: a) $P(x) \,.\, Q(x) + (\, P(x) - Q(x)\,)$ b) $P^2(x)$

3. Divisibilidad y División

En este apartado se evidenciará aún más la semejanza entre la teoría de los números enteros y la teoría de polinomios. Hay conceptos que se "duplican" en esta teoría teniendo de referencia la de los enteros.

En el conjunto $K[x]$, de polinomios en una indeterminada x con coeficientes en el cuerpo conmutativo K, **$Q(x)$ divide a $P(x)$, si existe en $K[x]$ un polinomio $C(x)$** tal que:

$$P(x) = C(x) \,.\, Q(x)$$

Se anota $Q(x) \mid P(x)$.

EJEMPLO 9.3.1

Puede verificarse que el polinomio $x^2 - 1$ divide al polinomio $3x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 1$ pues existe el polinomio $3x^2 + 2x - 1$ de ya que:

$$(3x^2 + 2x - 1) \,.\, (x^2 - 1) = 3x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 1$$

Compruebo, así practico multiplicar

$x + 1$ divide a $2x^2 - 2$, pues existe $2x - 2$ tal que $2x^2 - 2 = (2x - 2)(x + 1)$

$x - i$ divide a $x^2 + 1$, pues existe $x + i$ tal que $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$

EJERCICIO 9.3.2

Probar las siguientes propiedades de la divisibilidad de polinomios de $K[x]$, K cuerpo conmutativo.

a) La divisibilidad es reflexiva y transitiva.

b) Demostrar que si

$$k \in K \text{ y } k \neq 0 \text{ entonces para todo } P(x) \in K[x],\, k \mid P(x)$$

c) Si $P(x) \mid Q(x)$ y $P(x) \mid R(x)$ entonces $P(x) \mid m(x) \,.\, Q(x) + n(x).\, R(x)$, cualesquiera sean $m(x)$ y $n(x)$ en $K[x]$.

d) Si $P(x) \mid Q(x)$ y $P(x) \mid Q(x) + R(x)$ entonces $P(x) \mid R(x)$.

e) Sean $D(x) \in K[x]$, $P(x) \in K[x]$ y $Q(x) \in K[x]$, si $P(x) \mid Q(x)$ entonces $D(x).P(x) \mid D(x).Q(x)$

f) Demostrar que si $P(x) \mid Q(x)$ y $Q(x)$ no nulo entonces $\text{gr}(P(x)) \leqslant \text{gr}(Q(x))$

g) Demostrar que si $P(x) \mid Q(x)$ y $Q(x) \mid P(x)$ y $Q(x)$ no nulo entonces $\text{gr}(P(x)) = \text{gr}(Q(x))$

h) Si $P(x) \mid Q(x)$ y $\text{gr}(P(x)) = \text{gr}(Q(x))$ entonces existe $b \in K$ tal que $P(x) = b \,.\, Q(x)$.

i) Demostrar que si $P(x) \mid Q(x)$ y $Q(x) \mid P(x)$ y ambos mónicos entonces $P(x) = Q(x)$.

(un polinomio es **mónico si su coeficiente principal es 1**)

j) Todo polinomio $P(x) \in K[x]$ divide a $O(x)$.



Lo ayudamos con b): Consideremos $P(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ y $k \in K$ y $k \neq 0_K$

Se quiere encontrar $C(x)$ en $K[x]$ tal que $k.\ C(x) = P(x)$.

Al ser k no nulo en un cuerpo, tiene inverso en K, por lo tanto por 9.2.10 , es un polinomio

$k^{-1}.P(x) = k^{-1}.a_n x^n + ... + k^{-1}.a_2 x^2 + k^{-1}.a_1 x + k^{-1}.a_0$ sea este el polinomio $C(x)$ buscado.

Luego, $k.\ C(x) = P(x)$. De acuerdo????

Ayudamos con f): Si $P(x) \mid Q(x)$ y $Q(x)$ no nulo entonces existe $C(x)$ en $K[x]$ tal que

$C(x)\ .\ P(x) = Q(x)$, como ($K[x]$, +, .) es un anillo de integridad, luego no son nulos los polinomios $C(x)$ ni $P(x)$, por lo cual ambos tienen grado.

Usando que el grado de un producto es la suma de los grados de los factores:

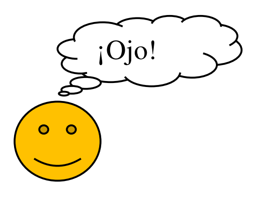
gr($C(x)$) + gr($P(x)$) = gr($Q(x)$) , y como son números naturales, es gr($P(x)$) $\leqslant$ gr($Q(x)$)

A g) se la regalamos…. También a h).

EJERCICIO 9.3.3

Analizar la validez en $K[x]$, K cuerpo conmutativo de:

$P(x) \mid R(x)$ y $Q(x) \mid R(x)$ entonces $P(x)\ .\ Q(x) \mid R(x)$



Al igual que en los números enteros, también en la teoría de los polinomios hay un que compensa que no la divisibilidad se cumpla.

El siguiente teorema es similar al del capítulo de números enteros.

♦ TEOREMA 9.3.4: **Algoritmo de la división en $K[x]$**

Sea K un cuerpo conmutativo. Dados los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ de $K[x]$, si $Q(x) \neq 0(x)$ entonces existen y son únicos $C(x)$ y $R(x)$ en $K[x]$ que satisfacen:

$P(x) = C(x)\ .\ Q(x) + R(x)$ con $R(x) = 0(x)$ ó gr($R(x)$) < gr($Q(x)$)

$C(x)$ es el **cociente** y $R(x)$ es el **resto**.

Demostración:

Observar que si $R(x) = 0(x)$, $Q(x)$ divide a $P(x)$.

Se construye un conjunto apropiado para hallar el cociente y el resto.

Sea $\mathcal{T}(x) = \{T(x) \in K[x] : T(x) = P(x) - H(x).Q(x)$, para algún $H(x) \in K[x]$ $\}$

$\mathcal{T}(x) \neq \emptyset$, ya que por ejemplo $P(x) \in \mathcal{T}(x)$ porque $P(x) = P(x) - 0(x).Q(x)$

Caso a): Si $Q(x) | P(x)$, entonces $P(x) = Q(x).W(x)$, para algún $W(x) \in K[x]$, entonces se tiene que $0(x) = P(x) - Q(x).W(x)$.

Tomamos entonces $R(x) = 0(x)$ y $C(x) = W(x)$ cumpliendo la existencia del cociente y resto.

Caso b): Si $Q(x)$ no divide a $P(x)$, se tiene que $0(x) \notin \mathcal{T}(x)$ podemos considerar

$T = \{ \text{gr}(T(x)) : T(x) \in \mathcal{T}(x) \} \subseteq \mathbb{N}$ y $T \neq \emptyset$, luego por el Principio de Buena Ordenación existe m el mínimo de T. Por lo tanto existe en $\mathcal{T}(x)$ un polinomio de grado mínimo m.

Sea $S(x)$ ese polinomio de grado mínimo m, luego

(A) $S(x) = P(x) - H(x).Q(x)$, para algún $H(x) \in K[x]$

Se probará que gr $(S(x))$ < gr $(Q(x))$.

Supongamos que gr$(S(x)) \geq$ gr$(Q(x))$ así se tiene que para

$Q(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ y $S(x) = b_m x^m + ... + b_1 x + b_0$

con $m \geq n$, así $m - n$ es un número natural.

Como K es cuerpo existe a_n^{-1} y se construye un polinomio en $\mathcal{T}(x)$:

$$G(x) = S(x) - a_n^{-1}.b_m.x^{m-n} Q(x),$$

Que calculando es, $G(x) = b_m x^m + ... + b_1 x + b_0 - (a_n^{-1} b_m x^{m-n}) a_n x^n - ... - (a_n^{-1} b_m x^{m-n}) a_0 =$

$= b_m x^m + ... + b_1 x + b_0 - b_m x^m - (a_n^{-1} b_m x^{m-n}) a_{n-1} x^{n-1} ... - (a_n^{-1} b_m x^{m-n}) a_0$

Y haciendo más cuentas resulta que gr$(G(x))$ < gr$(S(x))$, y además es expresable, usando (A):

$G(x) = S(x) - a_n^{-1}.b_m.x^{m-n} Q(x) = P(x) - H(x).Q(x) - a_n^{-1}.b_m.x^{m-n} Q(x) = P(x) - D(x).Q(x)$

Es decir que $G(x)$ es un elemento de $\mathcal{T}(x)$, lo que es un absurdo, ya que $S(x)$ es un polinomio de menor grado del conjunto $\mathcal{T}(x)$.

Por lo tanto no se debe poder fabricar el polinomio $G(x)$. Por lo cual gr$(S(x))$ < gr$(Q(x))$

Hemos probado que el cociente y resto existen. Sean entonces $R(x) = S(x)$ y $C(x) = H(x)$.

Veamos que cociente y resto son únicos con las condiciones $R(x) = 0(x)$ ó $gr(R(x)) < gr(Q(x))$
Se consideran que existen dos parejas de polinomios que operan como cociente y resto.

Sea $P(x) = C(x) . Q(x) + R(x) = B(x) . Q(x) + U(x)$

Con $R(x) = 0(x)$ ó $gr(R(x)) < gr(Q(x))$ y $U(x) = 0(x)$ ó $gr(U(x)) < gr(Q(x))$ (**)

Caso a): supongamos $R(x) \neq 0(x)$ y $U(x) = 0(x)$, se tiene que

$(C(x)-B(x)) . Q(x) = -R(x)$

Por lo tanto $Q(x)|R(x)$ y entonces $gr(Q(x)) \leq gr(R(x))$, absurdo , este caso no puede darse.

Caso b): supongamos $R(x) = 0(x)$ y $U(x) \neq 0(x)$, es análogo al anterior.

Caso c): supongamos $R(x) = 0(x)$ y $U(x) = 0(x)$, se tiene que

$(C(x)-B(x)) . Q(x) = 0(x)$ como $K[x]$ es un dominio de integridad, entonces $C(x) - B(x) = 0(x)$ ó $Q(x) = 0(x)$, pero $Q(x) \neq 0(x)$ luego $C(x) - B(x) = 0(x)$ y entonces $C(x) = B(x)$

Caso d): supongamos $R(x) \neq 0(x)$ y $U(x) \neq 0(x)$, se tiene que

$$(C(x) - B(x)) . Q(x) = U(x) - R(x) \qquad (*)$$

Si $U(x) = R(x)$ y $Q(x) \neq 0(x)$ entonces $C(x) = B(x)$

Si $U(x) - R(x) \neq 0(x)$, entonces vale que el $gr(U(x) - R(x)) \leq máx\{gr(R(x)), gr(U(x))\} < gr(Q(x))$, pero de la expresión (*) se deduce que $gr(Q(x)) \leq gr(U(x)-R(x))$, que es un absurdo, por (**) luego debe ser $U(x) = R(x)$ y así $C(x) = B(x)$

Por lo tanto, el cociente y resto existen y son únicos.

♦

EJEMPLO 9.3.5

Como $x^2 + 4x + 5 = (x+3)(x+1) + 2$ (verifique!!!) entonces al dividir

$x^2 + 4x + 5$ por $x + 1$, es $C(x) = x+3$ y $R(x) = 2$

Como el divisor es de grado 1, el resto $R(x)$ de no ser $0(x)$, debe tener grado 0 es decir debe ser un número (elemento de K).

Es evidente que para dividir polinomios y poder determinar si un polinomio es divisible por otro es necesario un algoritmo o mecanismo para resolver la cuestión. Que se explicará con un ejemplo.

Si se quiere dividir $P(x)$ por $Q(x)$, con $Q(x) \neq 0(x)$

Si $gr(Q(x)) > gr(P(x))$:

resulta de acuerdo al teorema anterior que el cociente $C(x) = 0(x)$ y el resto $R(x) = P(x)$ pues

$$P(x) = 0(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Si $gr(Q(x)) \leq gr(P(x))$, nos iremos aproximando al cociente y al resto por sucesivas restas (es análogo al mecanismo de la división de números de varias cifras).

Lo explicaremos en el siguiente ejemplo:

Sean $P(x) = x^5 + 2x^3 + x - 2$ y $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ realizaremos la división de $P(x)$ por $Q(x)$, hallar $C(x)$ y $R(x)$ de modo que $P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)$ con $R(x) = 0(x)$ ó $gr(R(x)) < gr(Q(x))$. ¿.?

Observar que $C(x)$. $Q(x)$ debe tener grado 5 (como el de $P(x)$ ya que el grado del resto no influye en el grado de la suma a cumplir para verificar la igualdad deseada) y también por la igualdad a satisfacer se determina cual es el coeficiente de x^2 en $C(x)$; se hace una disposición (como la que figura más abajo) teniendo en cuenta:

1º) Se han completado $P(x)$ y $Q(x)$ para "guardar lugar" a las sucesivas potencias, para $Q(x)$ no es imprescindible.

2º) $x^5 = x^2 \cdot x^3$ de allí que en $C(x)$ esté x^2 . Se busca un término que multiplicado por el primer término de $Q(x)$ dé el primer término de $P(x)$, busco A tal que $A..x^3 = x^5$ entonces $A = x^2$

3º) Se multiplica por x^2 cada uno de los términos de $Q(x)$, que se irán colocando debajo de $P(x)$ ordenadamente por grado. Como a $P(x)$ le queremos restar $x^2 .Q(x)$, "cambiamos" el signo y sumamos.

$$\begin{array}{l|l} x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 + x - 2 & x^3 - 3x^2 + 0x + 1 \\ \hline -x^5 + 3x^4 + 0x^3 - x^2 & x^2 \end{array}$$

se está formando $C(x)$

4º) A $P(x)$ le restamos $x^2 .Q(x)$; y "bajamos" el término siguiente (en este caso x).

5º) Como $P(x)$ - x^2 . $Q(x)$ tiene grado 4, el próximo término de $C(x)$ será A tal que

$A.x^3 = 3.x^4$ entonces A=3.x

de grado 1 y con coeficiente 3 para que por la siguiente resta se anule 3 x^4 así:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 + x - 2 & x^3 - 3x^2 + 0x + 1 \\
\hline
-x^5 + 3x^4 + 0x^3 - x^2 & x^2 + 3x \\
0 + 3x^4 + 2x^3 - x^2 + x & \text{construyendo } C(x)
\end{array}
$$

6º) Se multiplica por 3x .$Q(x)$ y se van colocando sus términos bajo $P(x)$ - x^2 $Q(x)$ “cambiados” de signo.

7º) Se resta a ($P(x)$ - x^2 . $Q(x)$) el polinomio 3x. $Q(x)$; se baja el término siguiente: - 2

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 + x - 2 & x^3 - 3x^2 + 0x + 1 \\
\hline
-x^5 + 3x^4 + 0x^3 - x2 & x^2 + 3x \\
0 + 3x^4 + 2x^3 - x^2 + x & \text{construyendo } C(x) \\
-3x^4 + 9x^3 - 0x^2 - 3x & \\
0 + 11x^3 - x^2 - 2x - 2 &
\end{array}
$$

8º) Se considera que 11 es el siguiente término de $C(x)$

9º) Se multiplica $Q(x)$ por 11 y se colocan esos términos ordenadamente.

10º) A ($P(x)$ - x^2 . $Q(x)$ - 3x . $Q(x)$) se le resta 11. $Q(x)$.

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 + x - 2 & x^3 - 3x^2 + 0x + 1 \\
\hline
-x^5 + 3x^4 + 0x^3 - x^2 & x^2 + 3x + 11 \\
0 + 3x^4 + 2x^3 - x^2 + x & \text{construyendo } C(x) \\
-3x^4 + 9x^3 - 0x^2 - 3x & \\
0 + 11x^3 - x^2 - 2x - 2 & \\
-11x^3 + 33x^2 + 0x - 11 & \\
0 + 32x^2 - 2x - 13 &
\end{array}
$$

Como $P(x) - x^2 \ . \ Q(x) - 3x \ . \ Q(x) - 11 \ . \ Q(x)$ es $32x^2 - 2x - 13$ y de grado 2 .

Como el divisor $Q(x)$ es de grado 3, hemos concluido, y así

$$R(x) = 32x^2 - 2x - 13 \text{ es el resto de la división y cumple:}$$

$$P(x) - x^2 \ . \ Q(x) - 3x \ . \ Q(x) - 11 \ . \ Q(x) = R(x)$$

Es decir

$$P(x) - (x^2 + 3x + 11) \ . \ Q(x) = R(x)$$

entonces

$$P(x) = (x^2 + 3x + 11) \ . \ Q(x) + R(x)$$

y por el teorema del algoritmo de la división $C(x)$ y $R(x)$ son únicos.

Veremos un caso muy simple pero no por eso no importante. 

Que ocurre cuando el divisor es de grado 1:

EJEMPLO 9.3.6

Halle el cociente y el resto de la división $T(x) = 2x^4 + 3x + 1$ por $S(x) = x + 3$:

$$\begin{array}{llllll|l}
2x^4 & +\ 0x^3 & +\ 0x^2 & +\ 3x & +\ 1 & & x + 3 \\
\underline{-2x^4} & \underline{-\ 6x^3} & & & & & 2x^3 - 6x^2 + 18x - 51 \\
0 & -\ 6x^3 & +\ 0x^2 & & & & \\
 & \underline{6x^3} & \underline{+\ 18x^2} & & & & \\
 & 0 & +\ 18x^2 & +\ 3x & & & \\
 & & \underline{-\ 18x^2} & \underline{-\ 54x} & & & \\
 & & 0 & -\ 51x & +\ 1 & & \\
 & & & \underline{51x} & \underline{+\ 153} & & \\
 & & & 0 & +\ 154 & &
\end{array}$$

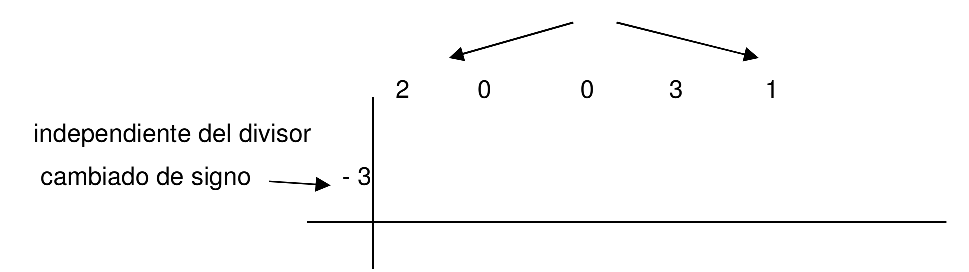
Observar que por el mecanismo antes expuesto hemos arribado a $R(x) = 154$ que tiene grado 0 pues $S(x)$ que es el divisor de este ejemplo tiene grado 1.

EJEMPLO 9.3.7

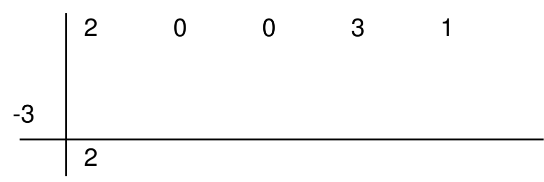
Halle el cociente y el resto de la división $T(x) = 2x^4 + 3x + 1$ por $S(x) = x + 3$ utilizando la **regla de Ruffini** (la introducimos en un ejemplo)

1º) Se disponen en un cuadro los coeficientes del dividendo, previamente ordenado según potencias decrecientes y completado, y el término independiente del divisor cambiado de signo.

coeficientes del dividendo (completado)



2º) Luego "se baja" el coeficiente de mayor grado del dividendo.



3º) Se multiplica ese coeficiente (en este caso 2) por el término independiente del divisor cambiado de signo (en este caso – 3) y se coloca ese resultado (- 6) bajo el coeficiente siguiente del dividendo.

	2	0	0	3	1
-3		-6			
	2				

4º) Se suma el 2º coeficiente del dividendo con –6, esa suma se multiplica por -3 y se colocan bajo el siguiente coeficiente de $T(x)$.

	2	0	0	3	1
-3		-6	18		
	2	-6			

5º) Se suman esos números y se sigue de manera análoga

	2	0	0	3	1
-3		-6	18	-54	153
	2	-6	18	-51	154 ← resto

6º) Como este caso, en algún momento habremos recorrido todos los coeficientes del dividendo. Hemos terminado.

El último número obtenido resulta ser el resto $R(x)$, en este caso $R(x) = 154$.

Los otros números, son los sucesivos coeficientes del cociente $C(x)$. Como la división es por un polinomio de grado 1, el grado del cociente es en 1 menor que el grado del dividendo, que es 3.

Se obtiene de este modo $C(x) = 2x^3 - 6x^2 + 18x - 51$.

IMPORTANTE!!!!

La regla de Ruffini es aplicable sólo cuando el divisor es de grado 1. 

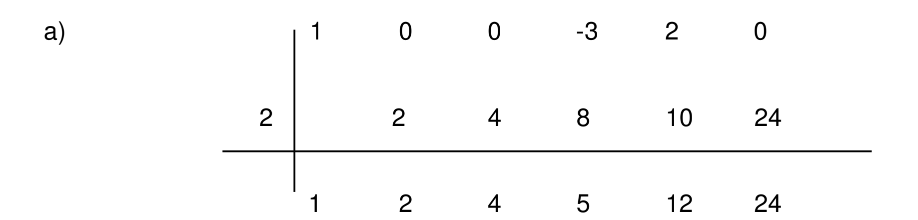
Por este hecho parece que es poco provechosa, pero luego verá que en muchas oportunidades se deben considerar divisores de grado 1.

EJEMPLO 9.3.8

Divida aplicando la regla de Ruffini a) $H(x) = x^5 - 3x^2 + 2x$ por $x - 2$.

b) $M(x) = 2x^4 - 2x^3 + x - 1$ por $x - 1$

a)



	1	0	0	-3	2	0
2		2	4	8	10	24
	1	2	4	5	12	24

Así resulta que:

$R(x) = 24$; $C(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x + 12$

b)

	2	-2	0	1	-1
1		2	0	0	1
	2	0	0	1	0

$R(x) = 0$; $C(x) = 2x^3 + 1$

Observar que en este caso $x - 1$ divide a $2x^4 - 2x^3 + x - 1$ es decir:

$$2x^4 - 2x^3 + x - 1 = (x - 1).(2x^3 + 1)$$

EJERCICIO 9.3.9

Determinar el cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$ de la división de $P(x)$ por $Q(x)$:

a) $P(x) = x^2 - 3x + 2$, $Q(x) = x + 1$

b) $P(x) = x^3 - 4x - x^2$, $Q(x) = 2x – 1$

c) $P(x) = x^3 - 3x + 1$, $Q(x) = 3x^2 + 2$

d) $P(x) = -12x + 10x^2 + 4x^2 + 9$, $Q(x) = x^3 - 2x + 3$

e) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x^2 - 1$

f) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x + 1$

Verifique que $P(x) = Q(x) . C(x) + R(x)$ en los casos a), c), d) .

4. Teorema del Resto y Raíces

Ya se destacó en ejemplos anteriores, que si el divisor es de grado 1 el resto $R(x) = 0(x)$ ó el gr($R(x)$) = 0 , es decir $R(x)$ es un elemento de K.

Al definir polinomios y las operaciones entre ellos hemos destacado que son sumas formales y que la x NO es un número. Ahora bien, que ocurre si reemplazamos la x por un número y realizamos las operaciones que quedan indicadas en $\mathbb{C}$ ó en general en K?

¡?????

Es claro que el resultado es un número complejo ó un elemento de K.

Esta observación conduce a la siguiente definición:

Dados un polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ de $K[x]$ y a un elemento de K se **llama valor numérico de $P(x)$ en $x = a$** al elemento de K obtenido realizando las operaciones que se habían dado como formales, en la situación actual se realizan en el cuerpo K

$$a_n . a^n + a_{n-1} . a^{n-1} + ... + a_1 . a + a_0$$ que se anota $P(a)$.

Se dice que se "especializa el polinomio $P(x)$ en a"

Por ejemplo:

$P(x) = 3x^4 - 2x + 1$

$P(0) = 3.\ 0^4 - 2.0 + 1 = 1$

$P(1) = 3\ .1^4 - 2.1 + 1 = 2$

$P(-1/3) = 3.(-1/3)^4 - 2.\ (-1/3) + 1 = 16/27$

EJERCICIO 9.4.1

Halle $P(-3)$; $P(0)$; $P(1/2)$; $P(1+i)$ Para $P(x) = x^3 - 2x^2 + x$

EJEMPLO 9.4.2

Para los polinomios $T(x) = 2x^4 + 3x + 1$, $H(x) = x^5 - 3x^2 + 2x$ y $M(x) = 2x^4 - 2x^3 + x - 1$, hallar el valor numérico de $T(x)$ en –3 ; $H(x)$ en 2 y M(x) en 1

$T(-3) = 2.\ (-3)^4 + 3.(-3) + 1 = 2\ .\ 81 - 3\ .\ 3 + 1 = 154$

$H(2) = 2^5 - 3.2^2 + 2.2 = 24$

$M(1) = 2.1^4 - 2.1^3 + 1 - 1 = 0$

Observe que esos valores numéricos no son más que el resto de las divisiones hechas en cada ejemplo 9.3.7 y 9.3.8.

La situación es general pues se tiene el:

♦ TEOREMA 9.4.3: **Teorema del Resto**

El resto de dividir un polinomio $P(x)$ por $d(x) = x + a$, es el valor numérico $P(-a)$

Demostración:

Por el Teorema del Algoritmo de la división, siendo $d(x) = x + a$ un polinomio no nulo

(1) $P(x) = C(x)\ .\ (x + a) + R(x)$,

además $R(x) = 0(x)$ ó $gr(R(x)) = 0$ ya que $gr((x + a)) = 1$

Es por tanto: $R(x) = r_0$, siendo r_0 un elemento de K, posiblemente 0.

Así valor numérico de $R(x)$ para cualquier especialización de $R(x)$ por k de K, es siempre r_0 .

La igualdad polinómica (1), evaluada en $-a$:

$$P(-a) = C(-a).\ (-a + a) + R(-a)$$

$$P(-a) = C(-a).0 + r_0$$

$$P(-a) = r_0 = R(-a)$$

Que es lo que queríamos demostrar.

♦

La importancia del teorema del Resto es obvia: permite determinar si un polinomio $P(x)$ es divisible por otro de grado 1 sin realizar la división.

Además más adelante tendrá una aplicación muy ligada a otro concepto importante que ya se definirá.

EJERCICIO 9.4.4

Utilizando el teorema del Resto, determinar si $P(x)$ es divisible por $Q(x)$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $P(x) = x^4 - 54x^3 - 2x^2 + 7$ $\qquad Q(x) = x + 3$

b) $P(x) = 8x^4 + 24x^3 + x + 3$ $\qquad Q(x) = x – 3$

c) $P(x) = 2x^3 + 6x^2 - x – 7$ $\qquad Q(x) = x – 1$

d) $P(x) = x^4 - 1$ $\qquad Q(x) = x – 1$

e) $P(x) = x^4 - 1$ $\qquad Q(x) = x + 1$

f) $P(x) = x^4 + 1$ $\qquad Q(x) = x – 1$

g) $P(x) = x^4 + 1$ $\qquad Q(x) = x + 1$

h) $P(x) = x^5 + 1$ $\qquad Q(x) = x – 1$

i) $P(x) = x^5 + 1$ $\qquad Q(x) = x + 1$

j) $P(x) = x^5 - 1/32$ $\qquad Q(x) = x – 1/2$

k) $P(x) = x^5 + ½$ $\qquad Q(x) = x + ½$

En cuatro casos a elección aplique la regla de Ruffini para calcular el cociente y resto.

EJERCICIO 9.4.5

a) Analicemos la siguiente expresión que resulta de dividir $P(x)$ de $K[x]$, K cuerpo conmutativo, por un polinomio $a.x + b$:

$P(x) = (a.x + b).Q(x) + R(x)$ y si $a \neq 0$ entonces $P(x) = (x + a^{-1}.b).a.Q(x) + R(x)$,

expresión que resulta de dividir $P(x)$ por el polinomio $x + a^{-1}.b$.

Enuncie el Corolario del teorema del Resto que se deduce de la anterior expresión para el caso que $D(x) = a\,x + b$, para a y b elementos de K y $a \neq 0$.

b) Utilizando el teorema del resto generalizado en a), determinar si $P(x)$ es divisible por $Q(x)$ en cada uno de los siguientes casos:

i) $P(x) = 4x^3 + 6x^2 - x - 9$ $\qquad Q(x) = 2x + 5$

ii) $P(x) = 5x^4 - 6x^3 - x + 8$ $\qquad Q(x) = 3x - 1$

EJEMPLO 9.4.6

a) Comprobar que $x^3 - 2^3$ y $x^4 - 2^4$ son divisibles por $x - 2$

Si $Q(x) = x^3 - 2^3$ para analizar si es divisible por $x - 2$ se evalúa $Q(2) = 2^3 - 2^3 = 0$ por el teorema del Resto se tiene que $x - 2$ divide a $Q(x)$.

Por lo cual $Q(x) = (x - 2).\ N(x)$, con $N(x)$ polinomio, calcule $N(x)$.

Si $P(x) = x^4 - 2^4$ se evalúa $P(2) = 2^4 - 2^4 = 0$, por el teorema del Resto resulta que $x - 2$ divide a $P(x)$.

Es decir $x^4 - 2^4 = (x - 2)\ .\ C(x)$, con $C(x)$ polinomio. Calcule $C(x)$.

b) Puede afirmar que $x^n - 2^n$ con n número natural es divisible por $x - 2$?

Sea $H(x) = x^n - 2^n$. Evaluando $H(2) = 2^n - 2^n = 0$ cualquiera sea n número natural.

Luego $x - 2$ divide a $H(x)$.

EJEMPLO 9.4.7

Comprobar que $x^4 - 3^4$ es divisible por $x + 3$.

Si $T(x) = x^4 - 3^4$ evaluando $T(-3) = (-3)^4 - 3^4 = 3^4 - 3^4 = 0$. Entonces de acuerdo al teorema del resto podemos afirmar que $x + 3$ divide a $x^4 - 3^4$.

$x^4 - 3^4 = (x + 3)\ .\ C(x)$, con $C(x)$ un polinomio. Calcúlelo.

- ✓ ¿Puede afirmar que $x^n - 3^n$ con n número natural es divisible por $x + 3$?

Si $S(x) = x^n - 3^n$ con n número natural, para que resulte divisible por $x + 3$ debe ser $S(-3) = 0$

$S(-3) = (-3)^n - 3^n = 3^n - 3^n = 0$ si n es par.

$S(-3) = (-3)^n - 3^n = -3^n - 3^n = -2.3^n$ si n es impar.

Por lo tanto si n es par $x^n - 3^n$ es divisible por $x + 3$.

EJERCICIO 9.4.8

Analizar la divisibilidad de $x^n + 2^n$ para n número natural por $x + 2$ y por $x – 2$.

Dado un polinomio $P(x)$ con coeficientes en K, un valor ***a* de *K* tal que *P*(*a*) = 0** se llama **raíz de *P*(*x*).**

En los ejemplos anteriores, 1 es raíz de $M(x)$.

También es claro que 2 es raíz de $Q(x)$ y de $P(x)$ del ejemplo 9.4.6, y que 3 es raíz de $T(x)$ del ejemplo anterior.

MUY IMPORTAMTE:



♦ PROPOSICIÓN 9.4.9

Sea $P(x)$ de $K[x]$, K cuerpo conmutativo.

a) Si a es un elemento de K que es raíz de $P(x)$ entonces $x - a$ divide a $P(x)$.

b) Si a es un elemento de K y $x – a$ divide a $P(x)$ entonces a es raíz de $P(x)$.

Demostración:

a) Sea a raíz de $P(x)$, entonces por la definición de raíz, $P(a) = 0$, entonces por el Teorema del Resto, 0 es el resto en la división de $P(x)$ por $x- a$, por lo tanto $x- a$ divide a $P(x)$.

b) Sea a tal que $x - a$ divide a $P(x)$, entonces por la definición existe $C(x)$ tal que $P(x) = (x- a).C(x)$, entonces $P(a) = (a- a).C(a) = 0$, por lo tanto a es raíz de $P(x)$

♦

IMPORTANTE: conocer raíces de $P(x)$ es conocer divisores de $P(x)$. 

EJERCICIO 9.4.10

Dado el polinomio $P(x) = 3x^2 + 5x - 2$;

Verificar que –2 es raíz de $P(x)$; que 1 no es raíz de $P(x)$.

Divida $P(x)$ por $x + 2$ ¿qué prueba?, y divida $P(x)$ por $x - 1$ ¿qué prueba?

Escriba $P(x)$ como producto de polinomios de grado 1.

EJERCICIO 9.4.11

a) Dado el polinomio $P(x) = x^4 + 1$ hallar todas las raíces en $\mathbb{C}$ y todas las raíces en $\mathbb{R}$.

Factorear como producto de polinomios de $\mathbb{C}[x]$ y como polinomios de $\mathbb{R}[x]$

b) Dado el polinomio $P(x) = \bar{3}.x^4 + \bar{2} \in \mathbb{Z}_5[x]$ hallar sus raíces. Factorearlo.

5. Divisibilidad: otras definiciones importantes

El conjunto de polinomios $K[x]$ es semejante desde el punto de vista estructural con el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$. En $K[x]$ se definió la relación de divisibilidad que tiene las mismas implicancias que tiene en $\mathbb{Z}$, hay conceptos de $\mathbb{Z}$ que tienen su correlato en $K[x]$.

Dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ de $K[x]$ son **asociados** si $P(x) \mid Q(x)$ y $Q(x) \mid P(x)$.

EJEMPLO 9.5.1

Consideremos los polinomios

$$P(x) = x^5 - 3x^2 + 2x \quad \text{y} \quad Q(x) = 3x^5 - 9x^2 + 6x$$

Ellos son asociados. Pues:

$$Q(x) = 3x^5 - 9x^2 + 6x = 3.(x^5 - 3x^2 + 2x) = 3.P(x)$$

$$P(x) = x^5 - 3x^2 + 2x = \left(\frac{1}{3}\right).(3x^5 - 9x^2 + 6x) = \left(\frac{1}{3}\right).Q(x)$$

Pues $P(x) \mid Q(x)$ y $Q(x) \mid P(x)$

EJERCICIO 9.5.2

Qué puede afirmar sabiendo que $P(x)$ y $Q(x)$ son asociados:

Si $P(x) = 0(x)$, cómo es $Q(x)$?

Si no son nulos, ¿qué relación hay entre los grados de ambos polinomios?

¿En qué difieren…?(mire 9.5.1)

EJERCICIO 9.5.3

Hallar polinomios asociados con:

a) $P(x) = 3x^2 - 2x^4 + 10$

b) $Q(x) = x^3 - 4x^2 + 5x^4 + x$

c) $R(x) = (2\text{-}i)\, x^3 + 4x^2 - (7\text{-}5i)\, x^4 + x + 3i$

♦ EJEMPLO 9.5.4

Demostrar que si $P(x)$ y $Q(x)$ son asociados entonces ambos tienen los mismos divisores.

Demostración:

Al ser $P(x)$ y $Q(x)$ asociados, $P(x) \mid Q(x)$ y $Q(x) \mid P(x)$.

Hay que probar que todo divisor de $P(x)$ lo es de $Q(x)$, y que todo divisor de $Q(x)$ lo es de $P(x)$.

Sea $T(x)$ en $K[x]$ tal que $T(x) \mid P(x)$, como $P(x) \mid Q(x)$ por transitividad $T(x) \mid Q(x)$.

Sea $H(x)$ en $K[x]$ tal que $H(x) \mid Q(x)$, como $Q(x) \mid P(x)$ por transitividad $H(x) \mid P(x)$.

♦

Por 9.5.4 y 9.4.9, vale que si $P(x)$ y $Q(x)$ son asociados entonces ambos tienen las mismas raíces en K.

EJERCICIO 9.5.5

a) Probar que todo polinomio no nulo tiene por asociado un polinomio mónico. Es decir un polinomio de coeficiente principal 1.

b) Demostrar que dos polinomios mónicos que se dividen mutuamente son iguales.

c) **Probar que la relación en $K[x]$, para K cuerpo conmutativo: $P(x)$ y $Q(x)$ *son asociados* es una relación de equivalencia en $K[x]$. Cómo son las clases de equivalencia por esa relación de algunos polinomios que Ud. se proponga.

** Es un ejercicio muy interesante y que aclara porque el comportamiento de un polinomio y un asociado tienen igual comportamiento respecto de la divisibilidad: son equivalentes…

➢Existencia del máximo común divisor en *K*[x]

El máximo común divisor en $K[x]$ está garantizado por el siguiente teorema que para este daremos una idea de la demostración.¿ LO MOSTRAMOS?.
Es realmente una replica del concepto que se da en el conjunto de los números enteros.
El siguiente teorema nos da las condiciones para la existencia y unicidad.

♦ TEOREMA 9.5.6
Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios en $K[x]$ no simultáneamente nulos, entonces existe un polinomio mónico $d(x)$ en $K[x]$ que cumple:

1) $d(x) \mid P(x)$ y $d(x) \mid Q(x)$
2) Si existe $d^*(x)$ en $K[x]$ tal que $d^*(x) \mid P(x)$ y $d^*(x) \mid Q(x)$ entonces $d^*(x) \mid d(x)$
3) $d(x) = m(x) \,.\, P(x) + n(x) \,.\, Q(x)$ con $m(x)$ y $n(x)$ en $K[x]$
4) $d(x)$ es único

El polinomio mónico que cumple 1) y 2) se llama **máximo común divisor** entre $P(x)$ y $Q(x)$.

Si $P(x) = Q(x) = 0(x)$ el máximo común divisor no existe. (Piense porqué …)

Demostración:
Idea: se construye un conjunto de polinomios
$\mathcal{M}(x) = \{G(x) : G(x) = s(x).P(x) + h(x).Q(x) \wedge G(x) \neq O(x) \wedge s(x) \in K[x] \wedge h(x) \in K[x]\}$
Por construcción todos los polinomios de $\mathcal{M}(x)$ tienen grado y además es no vacio.
Se considera $\mathcal{G}$={ $\text{gr}(G(x))$: $G(x)$ en $\mathcal{M}(x)$ } $\subseteq \mathbb{N}$. Por el Principio de Buena Ordenación tiene un elemento mínimo m.
Por lo tanto existe un polinomio $D(x)$ de $\mathcal{M}(x)$ de grado m. Es fácil probar que $d(x)$ el mónico asociado con $D(x)$ cumple las cuatro condiciones.
Hay que aplicar el teorema del Algoritmo de la División y pasos similares al teorema de la teoría de enteros y pasos similares al teorema del Algoritmo de la División demostrado para $K[x]$

♦

Al máximo común divisor entre $P(x)$ y $Q(x)$, polinomios no simultáneamente nulos, lo anotamos por $d(x) = (P(x), Q(x))$. En la definición se pide que sea mónico para que sea único.

EJEMPLO 9.5.7

a) Sea $P(x)$ en $K[x]$ no nulo entonces $(P(x), O(x)) = P^*(x)$, siendo $P^*(x)$ el mónico asociado con $P(x)$.

b) Sean $P(x)$ y $Q(x)$ en $K[x]$ no simultáneamente nulos, $(P(x), Q(x)) = (Q(x), P(x))$

c) Sean $P(x)$ y $Q(x)$ en $K[x]$ no simultáneamente nulos, $(P(x), Q(x)) = (P^\wedge(x), Q(x))$, siendo $P^\wedge(x)$ cualquier asociado con $P(x)$.

Se demostrará a):

Claramente $P(x) \mid P(x)$ y $P(x) \mid O(x)$, luego $P(x)$ verifica 1) de la definición.

Además es evidente que si $d^*(x)$ en $K[x]$ tal que $d^*(x) \mid P(x)$ y $d^*(x) \mid O(x)$ entonces $d^*(x) \mid P(x)$, por lo tanto también $P(x)$ verifica 2).

Luego por ser $P(x)$ no nulo existe el mónico asociado, el es $P^*(x)$.

Le quedan por hacer b) y c).

El siguiente teorema da una herramienta para calcular el máximo común divisor cuando existe:

♦ TEOREMA 9.5.8

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ en $K[x]$ y $Q(x) \neq 0$, si $R(x)$ es el resto de la división entre $P(x)$ y $Q(x)$, entonces

$$(P(x), Q(x)) = (Q(x), R(x))$$

La aplicación reiterada del teorema 9.5.8 hasta llegar al último resto no nulo se conoce como algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor entre polinomios.

Observar que el $\text{gr}(R(x)) < \text{gr}(Q(x))$, por lo tanto en la división de $Q(x)$ por $R(x)$, el grado del resto será menor que el grado de $R(x)$, y así sucesivamente, de modo que aplicando reiteradamente se alcanza el resto nulo, pues si en un paso se llega a un polinomio de grado 0 al paso siguiente se obtiene resto $O(x)$.

Demostración:

Como $Q(x) \neq 0$ existe $d(x) = (P(x), Q(x))$, entonces $d(x) \mid P(x)$ y $d(x) \mid Q(x)$, por lo tanto existen polinomios $C(x)$ y $H(x)$ tales que $P(x) = d(x).C(x)$ y $Q(x) = d(x).H(x)$ (I)

También existe $d^*(x) = (Q(x), R(x))$, entonces $d^*(x) \mid Q(x)$ y $d^*(x) \mid R(x)$, por lo tanto existen polinomios $F(x)$ y $G(x)$ tales que $Q(x) = d^*(x).F(x)$ y $R(x) = d^*(x).G(x)$ (II)

Además por el teorema del Algoritmo de la División $P(x) = Q(x).M(x) + R(x)$, (III)

Reemplazando $Q(x)$ y $R(x)$ en (III) usando (II) se tiene:

$P(x) = d^*(x).F(x) + d^*(x).G(x)$, entonces haciendo cuentas en $K[x]$

$P(x) = d^*(x).(F(x) + G(x))$, por lo tanto $d^*(x) \mid P(x)$.

Y como $d^*(x) \mid Q(x)$ entonces $d^*(x)$ divide al máximo común $d(x) = (P(x), Q(x))$ (parte 2) del teorema 9.5.6)

Reemplazando en (III) las expresiones de $P(x)$ y $Q(x)$ por (I) se tiene:

$d(x).C(x) = d(x).H(x) + R(x)$ entonces $d(x).(C(x) - H(x)) = R(x)$, por lo tanto $d(x)|R(x)$.

Y como $d(x) \mid Q(x)$ entonces $d(x)$ divide al máximo común $d'(x) = (Q(x), R(x))$.

Se tiene que $d(x) \mid d^*(x)$ y $d^*(x) \mid d(x)$ por lo tanto son asociados, y como ambos son mónicos se tiene que $d(x) = d^*(x)$.

♦

EJERCICIO 9.5.9

Formalice el algoritmo de Euclides para el cálculo del máximo común divisor de polinomios.

Idea: Dados $P(x)$ y $Q(x)$ en $K[x]$ y $Q(x) \neq 0$, si $R(x)$ es el resto de la división entre $P(x)$ y $Q(x)$, entonces $(P(x), Q(x)) = (Q(x), R(x))$. Si $R(x) = O(x)$, por el 9.5.7, ya se resolvió.

Si $R(x) \neq O(x)$, se considera $R_1(x)$ el resto de la división entre $Q(x)$ y $R(x)$ y por 9.5.8, así $(P(x), Q(x)) = (Q(x), R(x)) = (R(x), R_1(x))$. Si $R_1(x) = O(x)$, por el 9.5.7, ya se resolvió.

Si $R_1(x) \neq O(x)$, se considera $R_2(x)$ el resto de la división entre $R(x)$ y $R_1(x)$ y por la propiedad 9.5.8, $(P(x), Q(x)) = (Q(x), R(x)) = (R(x), R_1(x)) = (R_1(x), R_2(x))$, etc.…

Como los grados de los sucesivos restos son cada vez número naturales más pequeños, luego están acotados por 0. Si en algún paso hay un resto $R_k(x) = O(x)$ el proceso se termina y el máximo común divisor es $R_{k-1}{}^*(x)$ el mónico asociado con $R_{k-1}(x)$.

Si en caso se llega a $R_{k-1}(x)$ de grado 0, en el paso siguiente $R_k(x) = O(x)$.

Y así $R_{k-1}{}^*(x) = 1(x) = 1$, que es el mónico asociado a cualquier polinomio de grado 0.

EJERCICIO 9.5.10

Calcule el máximo común divisor entre:

a) $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$ y $Q(x) = -3x^2 + x$

b) $Q(x) = (-5 - i)\, x^4 + 3x^2 - (1 + 2i)$ y $P(x) = - i\, x^2 + (1 + 2i)\, x$

c) $P(x) = 9x^2 - 6\, i\, x - 1$ y $Q(x) = 9\, x^2 + 1$

Dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ en $K[x]$ son **coprimos** si el máximo común divisor entre ellos es 1.

EJERCICIO 9.5.11

Sean $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ en $K[x]$. K cuerpo conmutativo.

a) $(P(x), Q(x)) = 1$ si y sólo si existen $m(x)$ y $n(x) \in K[x]$ tales que $P(x) \,.\, m(x) + Q(x) \,.\, n(x) = 1$.

b) Si $P(x) \mid Q(x) \,.\, R(x)$ y $(P(x), Q(x)) = 1$ entonces $P(x) \mid R(x)$.

c) Sean $(P(x), Q(x)) = 1$. Si $P(x) \mid R(x)$ y $Q(x) \mid R(x)$ entonces $P(x) \,.Q(x) \mid R(x)$

EJERCICIO 9.5.12

a) Sean $P(x) = a\, x + b$, $Q(x) = c\, x + d$ polinomios de $K[x]$, K cuerpo conmutativo, con $a.c \neq 0$. Si $a/b \neq c/d$, entonces $(P(x), Q(x)) = 1$.

b) Si $k_1 \in K$, $k_2 \in K$, cuerpo conmutativo, $k_1 \neq k_2$ si y solo si $x - k_1$ y $x - k_2$ son coprimos.

c) Probar que para todo n y para todo m, $(x - k_1)^n$ y $(x - k_2)^m$ son coprinos si $k_1 \neq k_2$.

➢**Existencia del mínimo común múltiplo en $K[x]$**

El mínimo común múltiplo en $K[x]$ está garantizado por el siguiente teorema del cual daremos una idea de la demostración. ¿LO MOSTRAMOS?

♦ TEOREMA 9.5.13

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios en $K[x]$ no simultáneamente nulos, entonces existe un polinomio mónico $m(x)$ en $K[x]$ que cumple:

1) $P(x) \mid m(x)$ y $Q(x) \mid m(x)$
2) Si existe $m^*(x)$ en $K[x]$ tal que $P(x) \mid m^*(x)$ y $Q(x) \mid m^*(x)$ entonces $m(x) \mid m^*(x)$
3) $m(x)$ es único

El polinomio que cumple 1) y 2) se llama **mínimo común múltiplo** entre $P(x)$ y $Q(x)$.

Si $P(x) = O(x)$ o $Q(x) = O(x)$ el mínimo común múltiplo entre ellos se define por $O(x)$. (Piense porqué …)

Demostración:

Idea: es análoga a la del teorema del máximo común divisor. Para $P(x)$ y $Q(x)$ no nulos. Se define un conjunto:

$$\mathcal{S}(x)=\{T(x)\in K[x]: P(x)|T(x)\wedge Q(x)|T(x)\wedge T(x)\neq O(x)\} \ .$$

Este conjunto es no vacío, pues $P(x).\ Q(x)$ es uno de sus elementos.

Se considera $\mathcal{G}$ el conjunto de los grados de los elementos de $\mathcal{S}(x)$. También $\mathcal{G}$ es no vacio y por el Principio de Buena ordenación tiene un elemento mínimo m. El polinomio $M(x)$ de $\mathcal{S}(x)$ que tiene ese grado m es un que tiene las propiedades 1) y 2) . (probarlo!!!!!).

Como $M(x)$ no es $O(x)$, tiene un mónico asociado, que es el mínimo común múltiplo $m(x)$.

Por ser mónico sale que es único.

Como en el caso de los números enteros, el algoritmo para calcularlo es la combinación de dos algoritmos:

$$m(x)=\frac{H(x)}{(P(x),Q(x))} \quad \text{siendo } H(x) \text{ el mónico asociado con } P(x).Q(x)$$

El concepto de mínimo común múltiplo entre polinomios es el que permite entre otras cosas cuando hay que sacar el común denominador entre fracciones racionales poder hacerlo…

EJERCICIO 9.5.14

Calcular el mínimo común múltiplo entre los polinomios

a) $P(x) = 3x^2 - 2x^4 + 10$ y $Q(x) = x^3 - 4x^2 + 5x^4 + x$

b) $R(x) = (2\text{-i})\ x^3 + 4x^2 - (7\text{-}5\text{i})\ x^4 + x + 3\text{i}$ y $T(x) = 4\ \text{i}\ x^4 - 4x^2 - (5\text{-}2\text{i})\ x + 1$

Se dará el concepto de $K[x]$, para K cuerpo conmutativo, que se asemeja al de número primo. Ya que en muchas situaciones se tiene por objetivo hacer una descomposición de un polinomio cualquiera como producto de polinomios más “simples”, es importante saber cuándo se ha concluido esa tarea, es decir cuando no habrá más factores salvo asociados.

Dado $P(x)$ en $K[x]$, diremos que $P(x)$ es **irreducible sobre *K*** (ó **en *K*[*x*]**) si $P(x)$ no es constante y los únicos divisores de $P(x)$ en $K[x]$ son los polinomios constantes y los polinomios asociados con $P(x)$.

Todo polinomio $P(x)$ admite a las constantes y asociados por divisores.

Por ello a éstos divisores se los llama ***divisores triviales*** del polinomio $P(x)$.

Estos divisores triviales "juegan el papel" que en enteros cumplen 1, -1, *m* y -*m* para cualquier entero *m*.
Es así que los polinomios irreducibles no se pueden "descomponer" en factores salvo los triviales.
También se define como **polinomio primo** sobre *K* si además de ser irreducible sobre *K* es mónico.

EJEMPLO 9.5.15

a) $x^2 + 1$ no es irreducible sobre $\mathbb{C}$ pero si lo es en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{Q}[x]$

Es claro que $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$ por lo tanto tiene divisores no triviales en $\mathbb{C}[x]$

Pero $x^2 + 1$ sólo tiene divisores triviales en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{Q}[x]$

$x^2 - 2$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ pero no sobre $\mathbb{R}$.

Pues $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2}).(x + \sqrt{2})$ y ésta es la única (salvo asociados) factorización de $x^2 - 2$ no trivial (como se verá) resulta reducible en $\mathbb{R}[x]$ y no sobre $\mathbb{Q}$.

EJERCICIO 9.5.16

Cualquiera sea el cuerpo conmutativo *K*, demostrar que los polinomios de grado 1 son irreducibles sobre *K*.

EJERCICIO 9.5.17

a) Demostrar: Sean $P(x) \in K[x]$, con gr($P(x)$) > 1 y $a \in K$.

Si a es raíz de $P(x)$ entonces $P(x)$ no es irreducible

b) ¿La recíproca de a) es verdadera??

Analicemos el polinomio $P(x) = x^4 + 1 \in \mathbb{C}[x]$.

Para hallar sus raíces igualamos a 0 el polinomio y se buscan los valores de x^* de $\mathbb{C}$ tales que

$$x^4 = -1 \rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Es claro que ningún número real elevado a la cuarta da como resultado un número negativo, por lo tanto no tiene raíces reales.

Resulta entonces que $P(x) = x^4 + 1$ se factorea como

$$(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})$$

Multiplicando el primer factor con el tercero y el segundo con el último tenemos que:

$$(x^2 - 2\sqrt{2}x + 1)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 1)$$

Compruebe usando lo que sabe de “diferencia de cuadrados”.

Escribimos entonces a $P(x)$ como producto de dos polinomios con coeficientes reales que no son ni asociados ni constantes, por lo tanto $P(x)$ es reducible en $\mathbb{R}[x]$ pero no tiene raíces reales.

Por lo cual la recíproca de b) del ejercicio anterior no vale en general.

EJERCICIO 9.5.18

Demostrar: Sean $P(x) \in K[x]$ y $T(x) \in K[x]$, K cuerpo conmutativo, con $P(x)$ irreducible sobre K, entonces ($P(x)$, $T(x)$) = 1 si $P(x)$ no divide a $T(x)$ o ($P(x)$, $T(x)$) = $P^*(x)$, siendo $P^*(x)$ el mónico asociado con $P(x)$ en el caso que $P(x)$ divide a $T(x)$. (¿Que le recuerda??????)

♦ Proposición 9.5.19

Cualquiera sea K cuerpo conmutativo. Sean $P(x)$, $Q(x)$ y $T(x)$ en $K[x]$.

Si $P(x)$ es irreducible sobre $K[x]$ y $P(x) \mid Q(x).T(x)$ entonces $P(x) \mid T(x)$ ó $P(x) \mid Q(x)$

Demostración:

Sea $P(x)$ irreducible sobre $K[x]$ tal que $P(x) \mid Q(x).T(x)$ entonces puede que $P(x)$ divida a $T(x)$. Y ya está.

Si $P(x)$ no divide a $T(x)$, por 9.5.18 ($P(x)$, $T(x)$) = 1 entonces por el ejercicio 9.5.11, partes a) y b) resulta que $P(x) \mid Q(x)$

♦

♦ Proposición 9.5.20

Cualquiera sea K cuerpo conmutativo. Sean $P(x)$, $Q_j(x)$ para j= 1, ...,m en $K[x]$.

Si $P(x)$ es irreducible sobre K y $P(x) \mid Q_1(x).\ Q_2(x).\ \ldots\ .\ Q_m(x)$ entonces $P(x) \mid Q_j(x)$ para algún j, j = 1, ...,m.

EJERCICIO 9.5.21

Demostrar el enunciado anterior por inducción completa.

♦ Teorema 9.5.22

Todo polinomio no constante de $K[x]$ es divisible por un polinomio irreducible sobre K.

Demostración:

(Idea) Sea $\mathcal{W}(x) = \{T(x) \in K[x] : T(x) \text{no es divisible por polinomio irreducible}\}$.

Si este conjunto es no vacío, entonces tiene asociado un conjunto $\mathcal{H}$ de los grados de los polinomios de $\mathcal{W}(x)$. Y también será $\mathcal{H}$ no vacío.

Por el principio de Buena Ordenación $\mathcal{H}$ tiene un mínimo m, luego existe en $\mathcal{W}(x)$ un polinomio $S(x)$ de grado m. Justifique que $S(x)$ no es irreducible, y entonces hay dos factores no triviales de modo que $S(x) = L(x).\ U(x)$.

Además justifique que ambos no pueden estar en $\mathcal{W}(x)$.

Luego existe un polinomio irreducible que divide a $L(x)$, por ejemplo. Por lo cual dividirá a $S(x)$. Y así llega a un absurdo.

♦

EJERCICIO 9.5.23

Cualquiera sea K cuerpo conmutativo, existen infinitos polinomios irreducibles sobre K.

(Idea: es casi copiar la demostración en los números enteros)

6. Raíces complejas en polinomios con coeficientes reales

Para muchas aplicaciones es importante encontrar las raíces de un polinomio.

Cuando $P(x)$ es un polinomio de $\mathbb{C}[x]$, $P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \ldots + a_1.x + a_0$ y en particular todos los coeficientes a_j para $0 \le j \le n$ son números reales, se demuestra que

algunas raíces de $P(x)$ "aparecen de a pares", trayendo esto una ventaja pues reduce el número de raíces a buscar.

Para demostrar este resultado es conveniente recordar algunas propiedades de la conjugación de complejos:

$z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$ $\qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ $\qquad \overline{\overline{z}} = z$

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ $\qquad \overline{z^k} = \overline{z}^k$

♦ Teorema 9.6.1:

Sea $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, $P(x) = a_n . x^n + a_{n-1} . x^{n-1} + ... + a_1 . x + a_0$ tal que $a_j \in \mathbb{R}$ para todo *j*, $j = 0,...,n$.

Si $z \in \mathbb{C}$ es raíz de $P(x)$ también lo es su conjugado.

Es decir: si $P(z) = 0$ entonces $P(\overline{z}) = 0$

EJERCICIO 9.6.2:

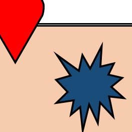
Demostrar el teorema 9.6.1.

Idea: Sabiendo que $P(z) = 0$ conjugue la igualdad y aplique propiedades de la conjugación que se han recordado antes del enunciado del teorema……

¿Si $P(\overline{z}) = 0$, es $P(z) = 0$? Justifique.



♦ Teorema 9.6.3: Teorema **Fundamental del Algebra**



Todo polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ de grado positivo no nulo, admite una raíz en $\mathbb{C}$.

Aceptaremos este teorema sin demostración ya que para ello se usan herramientas que exceden los contenidos del libro.

OBSERVACIÓN:

Luego si $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ todas las raíces de $P(x)$ están en $\mathbb{C}$.

Debido a ese resultado se dice que $\mathbb{C}$ **es algebraicamente cerrado**.

♦ Lema 9.6.4

Todo polinomio $Q(x)$ de grado impar y coeficientes reales tiene al menos una raíz compleja de parte imaginaria nula. (Es decir una raíz real!!!)

Demostración:

Probaremos el enunciado por inducción completa.

Consideremos el esquema

$P(n)$: Si $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ con todos los coeficientes en $\mathbb{R}$ y gr $(Q(x)) = 2.n + 1$, entonces $Q(x)$ tiene al menos una raíz real.

$P(0)$: Si $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ con todos los coeficientes en $\mathbb{R}$ y gr $(Q(x)) = 2.0 + 1$, entonces $Q(x)$ tiene al menos una raíz real

Si gr($Q(x)$) = 1 entonces $Q(x) = a\,x + b$. Con a no nulo. Luego el valor $\frac{-b}{a}$ es un número real por ser cociente de números reales con denominador no nulo, y $\frac{-b}{a}$ anula al polinomio (¿seguro?)

¡SI!

Por lo tanto $Q(x)$ tiene una raíz real y se cumple $P(0)$.

Veamos que si vale $P(k)$ entonces vale $P(k+1)$:

Es decir, suponemos que si un polinomio de $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$, con coeficientes reales tiene grado $2.k+1$ tiene al menos una raíz real, debemos probar que entonces si $T(x) \in \mathbb{C}[x]$, con todos los coeficientes reales tiene grado $2(k+1)+1= 2.k+2+1$ tiene al menos una raíz real.

Sea $T(x) \in \mathbb{C}[x]$, como todo número real es un complejo, es un polinomio a coeficientes complejos, por lo tanto, por el teorema 6.3 tiene una raíz en $\mathbb{C}$. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$, tal que $T(\alpha) = 0$.

Caso a) si en particular $\alpha \in \mathbb{R}$ resulta que $T(x)$ tiene una raíz real y queda probado.

Caso b) si $\alpha \notin \mathbb{R}$ por teorema anterior, $\overline{\alpha}$ tambien es raíz de $T(x)$ entonces $(x-\alpha) \mid T(x)$ y $(x-\overline{\alpha}) \mid T(x)$ entonces por ser ambos de grado 1 y además distintos, por lo tanto $(x-\alpha).(x-\overline{\alpha}) \mid T(x)$ (9.5.11 y 9.5.12)

Es decir que se tiene $T(x)=(x-\alpha).(x-\overline{\alpha}).D(x)$

$D(x)$ es un polinomio de grado 2k+1 entonces por hipótesis inductiva $D(x)$ tiene al menos una raíz real. Sea $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $D(\beta)=0$

$T(\beta)=(\beta-\alpha)(\beta-\overline{\alpha}).D(\beta)$ luego , $T(\beta)=0$ por lo tanto $\beta \in \mathbb{R}$ es raíz de $T(x)$ y queda probado P(2.(k+1)+1).

Por lo cual vale que para todo polinomio con todos sus coeficientes reales y de grado impar tiene al menos una raíz real.

♦

♦ Corolario 9.6.5: (del Teorema Fundamental del Algebra)

Para todo polinomio $P(x)\in \mathbb{C}[x]$ de grado $n \geq 1$, existen números complejos $z_1, z_2, \cdots, z_n$ tales que:

$$P(x)=a_n\prod_{i=1}^{n}(x-z_i)$$

siendo los $z_1, z_2, \cdots, z_n$ no necesariamente todos distintos y raíces de $P(x)$ y a_n es el coeficiente principal de $P(x)$.

EJERCICIO 9.6.6:

Demostrar por inducción el corolario anterior.

EJERCICIO 9.6.7:

Demostrar que los polinomios irreducibles de $\mathbb{R}$ [x] son los de grado uno y los de grado dos que no tienen raíces reales.

♦ Teorema 9.6.8: **Teorema Fundamental de la Aritmética** para polinomios

Sea K = $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \text{o } \mathbb{C}$, entonces todo polinomio no nulo ni constante de $K[x]$ es producto finito de polinomios irreducibles sobre K. Esa factorización es única salvo asociados.

La demostración sigue los pasos de la demostración del teorema análogo para enteros (recordar que es por la aplicación del Segundo Principio de Inducción), pero en esta teoría de polinomios como no se ordenan los polinomios irreducibles, no sale la unicidad salvo asociados.

♦ Corolario 9.6.9:

Todo polinomio $P(x)\in \mathbb{C}[x]$ de grado n tiene a lo sumo n raíces distintas.

Demostración:

Sea $P(x)$ de grado $n \geq 1$, entonces por el corolario 9. 6.5

$$P(x) = a_n \prod_{i=1}^{n} (x - z_i)$$

siendo los z_i no necesariamente todos distintos y raíces de $P(x)$.

Supongamos por el absurdo que $P(x)$ tiene $n+1$ raíces, si c es la raíz $n+1$, distinta de las anteriores. entonces $P(c) = 0$ pero como $P(x) = a_n . \prod_{i=1}^{n} (x - z_i)$, se tiene que

$P(c) = a_n . \prod_{i=1}^{n} (c - z_i)$ y se sabe que $c - z_i \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$, luego es absurdo que $P(c)= 0$ pues $K[x]$ es un dominio de integridad.

♦

EJERCICIO 9.6.10:

a) Comprobar que –1 y 3 son raíces de $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$. Halle todas las raíces de $P(x)$.

b) Halle las raíces de $P(x) = (x - 3)^2 . (x + 2)$; $T(x) = (x + 7) (x - 5)x$

c) Halle las raíces de $P(x) = (x^2 + 3)^2 . (x - 2)$; $T(x) = (x^4 + 7). (x +1- 5i).x^3$

EJERCICIO 9.6.11

a) Comprobar que 2 i es raíz de $P(x) = 2 x^3 + x^2 + 8 x + 4$

b) ¿Pueden tener todas las raíces de $P(x)$ parte imaginaria no nula?

c) ¿Cuál es otra raíz de $P(x)$?

d) Halle todas las raíces de $P(x)$.

EJERCICIO 9.6.17:

a) Compruebe que -3i es raíz de $P(x) = x^5 + 3i\, x^4 - x - 3i$

b) Evalúe $P(3i)$.

c) ¿Se contradice el Teorema 9.6.1 ? Justifique.

EJERCICIO 9.6.18:

Verificar que si x_1 y x_2 son raíces de la ecuación de segundo grado con coeficientes reales

a, b y c: $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ entonces resulta que $a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - x_1)(x - x_2)$
(Idea: use la expresión que da la fórmula para hallar las raíces y haga TODAS las operaciones.....)
b) Cómo puede factorear un polinomio $P(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ con coeficientes reales.

7. Raíces múltiples

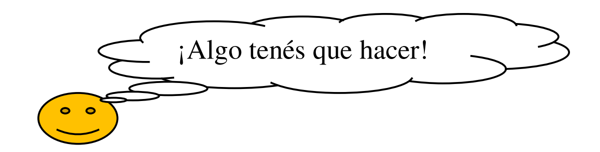
Recordar que cuando se calculan las raíces de la ecuación: $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ se tiene la posibilidad que si el discriminante es 0 se tiene que $x_1 = x_2$.
Por lo tanto por b) de 9.6.18, $P(x) = a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - x_1)^2$
Se va a generalizar esta situación.

Para cualquier cuerpo conmutativo K. Diremos que $a \in K$ es **raíz con multiplicidad *m*** de un polinomio $P(x) \in K[x]$ si m es la mayor potencia de $x - a$ que divide al polinomio $P(x)$,
Esto es: $(x-a)^m \mid P(x)$ y $(x-a)^{m+1} \nmid P(x)$

Se dice que a es **raíz múltiple** de $P(x)$ si m >1.
Observar que el polinomio nulo $0(x)$ no permite definir raíces múltiples. Queda indeterminada la multiplicidad.

♦Teorema 9.7.1
Sea $a \in K$, K cuerpo conmutativo, y sea $P(x) \in K[x]$
a es raíz con multiplicidad m de $P(x)$ si y sólo si existe $G(x)$ en $K[x]$ tal que
$P(x) = G(x).(x - a)^m$ y $G(a) \neq 0$.

EJERCICIO 9.7.2
a) Demostrar el Teorema 9.7.1.
b) Demostrar la siguiente propiedad:
Sea $P(x) \in K[x]$. K cuerpo conmutativo. Si $a_j \in K$ para $j = 1,\ldots k$, (para distintos subíndices son elementos distintos de K) son raíces de $P(x)$ de respectivas multiplicidades
m_j para $1 \le j \le k$ entonces $\prod_{j=1}^{k}(x-a_j)^{m_j} \mid P(x)$



Se ayuda con b) :

Por la parte a) y la definición de raíz múltiple: $(x-a_1)^{m_1} \mid P(x)$, además esta situación se da para cada una de las otras raíces, es decir:

$$(x-a_2)^{m_2} \mid P(x), (x-a_3)^{m_3} \mid P(x), \cdots, (x-a_k)^{m_k} \mid P(x)$$

Como si $h \neq t$ para $1 \leq h \leq k \;\wedge 1 \leq t \leq k$ entonces $(x-a_h)^{m_h}$ y $(x-a_t)^{m_t}$ son coprimos (por EJERCICIO 9.5.12 c)) y por EJERCICIO 9.5.11 c) entonces $\prod_{j=1}^{k}(x-a_j)^{m_j} \mid P(x)$

Como el grado de un producto es la suma de los grados de cada factor:

$gr\left(\prod_{j=1}^{k}(x-a_j)^{m_j}\right) = m_1 + \cdots + m_k$, y si este producto es un divisor de $P(x)$,

$$m_1 + \cdots + m_k \leq gr(P(x)) \; .$$

Es decir el número de raíces, contando cada una de ellas tantas veces como su orden de multiplicidad, es menor o igual que el grado de $P(x)$.

EJEMPLO 9.7.3

Determinar la multiplicidad de -1 como raíz de $P(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

Primero verifiquemos que -1 es raíz de $P(x)$ aplicando el teorema del resto:

$P(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^3 + 2(-1)^2 + 2(-1) + 1 = 1 - 2 + 2 - 2 + 1 = 0$

Luego $(x + 1) \mid P(x)$.

Determinemos la mayor potencia de $(x + 1)$ que divide a $P(x)$.

Para ello se divide $P(x)$ por $x + 1$ y se usará la regla de Ruffini

	1	2	2	2	1
-1		-1	-1	-1	-1
	1	1	1	1	0

Como era sabido el resto dio 0.

El cociente es el polinomio $x^3 + x^2 + x + 1$

que se indicará por $C_1(x)$, luego $C_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

Además $P(x) = (x + 1).(x^3 + x^2 + x + 1) = (x + 1).\ C_1(x)$

Siguiendo con nuestro propósito, se dividirá $C_1(x)$ por $x + 1$, también aplicando Ruffini:

	1	1	1	1
-1		-1	-1	-1
	1	1	1	0

El resto dio 0. El nuevo cociente es el polinomio $x^2 + x + 1$, que se indicará por $C_2(x)$,

luego $C_2(x) = x^2 + x + 1$

Por lo tanto: $C_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1).(x^2 + x + 1) = (x + 1).\ C_2(x)$

Se tiene entonces:

$P(x) = (x + 1).\ C_1(x) = (x + 1).[\ (x + 1).\ C_2(x)\ ] = (x + 1)^2.\ C_2(x)$

Será $C_2(x) = x^2 + x + 1$ divisible por $x + 1$??

Aplicando Ruffini....:

	1	1	1
-1		-1	0
	1	0	1

Como el resto es 1, $x + 1$ NO divide a $C_2(x)$.

Por lo cual la mayor potencia de $x + 1$ que divide a $P(x)$ es 2.

Entonces - 1 es raíz de multiplicidad 2 de $P(x)$. Por lo cual es múltiple.

Cuando la multiplicidad de una raíz a es 2, se dice que a es **doble.**

Si la multiplicidad de una raíz a es 3 se dice que a es **triple.**

EJERCICIO 9.7.4

a) Determinar un polinomio $P(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ tal que tiene mínimo grado, es mónico y admite las raíces $\overline{2}$ como doble; $\overline{1}$ como simple y $\overline{0}$ como triple .

b) Dado el polinomio $P(x) = \left(x^2 + 3\right)^4 \in \mathbb{C}[x]$ determinar sus raíces y sus respectivas multiplicidades.

8. Polinomio derivado

Recodemos que x no es una variable de *K*.

Para $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y $P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + ... + a_1.x + a_0$ en $K[x]$.

Se puede asociar a $P(x)$ una función

$P: K \rightarrow K$ dada por

$P(t) = a_n.t^n + a_{n-1}.t^{n-1} + ... + a_1.t + a_0$

que es una función, llamada función polinómica

En el caso que $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ esa asociación del polinomio a la función polinómica es una biyección. Es por ello que en esos casos de *K* muchas veces se identifica el polinomio con la función polinómica.

En Análisis Matemático I, ya se aprendió a derivar funciones de variable real por un procedimiento de pasaje al límite.

Al derivar una función polinómica real

$f(t) = a_n.t^n + a_{n-1}.t^{n-1} + ... + a_1.t + a_0$ resulta $f'(t) = n.\ a_n.t^{n-1} + (n-1)\ a_{n-1}.t^{n-2} + ... + a_1$

Además, $f'(t)$ es otra función polinomial de grado n-1 y además es otra función real factible de volver a derivar, y es claro que después de n pasos se obtiene una función real constante, cuya derivada es la función nula.

Una función real cualquiera g(t) se puede aproximar por medio de funciones polinómicas, llamadas polinomios de Taylor asociados a g(t). En el caso particular que g(t) sea una función polinómica se ha visto que el error de aproximación es nulo si se considera la función polinómica de Taylor de grado mayor o igual al grado de la función polinómica dada.

Vamos ahora a definir al “derivado” para todo $P(x)$ en $K[x]$ y todo cuerpo *K*. Se tiene la pretensión que sea un polinomio y que, en el caso de pensar en la función polinómica real asociada, los conceptos de Análisis Matemático I y Algebra coincidan.
Este mecanismo: la de la generalización de una idea motivadora que luego sea alcanzada como caso particular es permanente en el quehacer del matemático.

Un polinomio $P(x)$ en $K[x]$ se puede escribir de la siguiente manera:

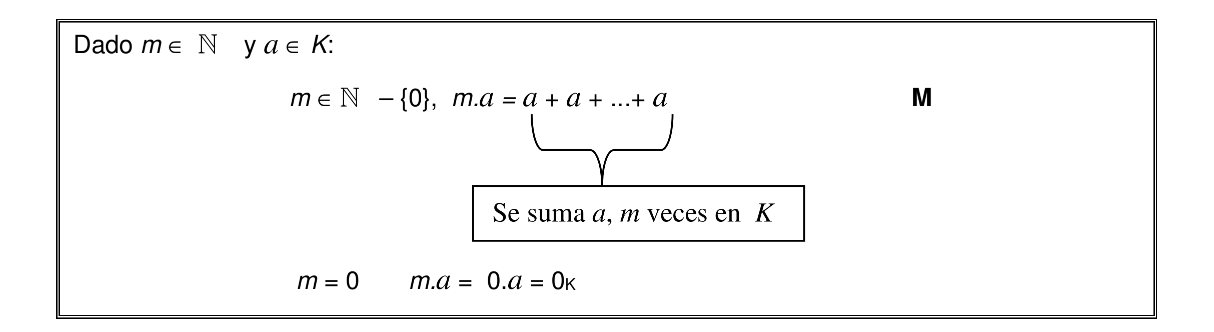
$$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

Luego, definimos **el polinomio derivado** de $P(x)$ como:

$$DP(x) = P'(x) = \sum_{j=0}^{n} j.a_j x^{j-1}$$

La definición del polinomio derivado requiere de una definición extra.

Pues si $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$ la multiplicación de un numero natural por un elemento de $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$ es algo que se sabe hacer, pero si K es otro cuerpo hay que decir algo….



Asociada a la definición **M** se definen para los cuerpos la **característica de un cuerpo.**

Un cuerpo ***K* es de característica *h*** si $h \in \mathbb{N} - \{0\}$, es el menor h tal que

$$h.1_K = 1_K + 1_K + ...+ 1_K = 0_K$$

Se suma 1_K, h veces en K

Se demuestra que h es primo. Esto lo demostrara en una materia de Algebra posterior.

Compruebe que $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \cdots, \mathbb{Z}_p$ son de característica p, para $p = 2, 3, 5,\ldots$, respectivamente.

Pero al sumar 1, en $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$ un número $h > 0$ de veces nunca da 0. Se define para estos cuerpos que su **característica es 0**.

EJEMPLO 9.8.1:

a) Sea $P(x) = 3x^5 + 2x + 1 \in \mathbb{R}[x]$

$P'(x) = 5.3.x^{5-1} + 1.\ 2\ x^{1-1} = 15\ x^4 + 2$

b) Sea $Q(x)$ =(1- 3i) x^{10} + (3+2i) x^5 + 1 $\in \mathbb{C}[x]$

$Q'(x)$ = 10. (1-3i). x^9 + 5.(3+2i) x^4 = (10-30i) x^9 + (15+10i) x^4

c) Sea T(x) = $\bar{5}\, x^7 + \bar{5}\, x^2 + \bar{2}.x + \bar{5} \in \mathbb{Z}_7[x]$

$T'(x) = 7.\bar{5}\, x^6 + 2.\bar{5}\, x \;\; + \bar{2} \in \mathbb{Z}_7[x]$. Luego debemos usar la definición **M :**

$7.\bar{5} = \bar{5} + \bar{5} + \bar{5} + \bar{5} + \bar{5} + \bar{5} + \bar{5} = \overline{7.5} = \bar{0}$ **.** Además $2.\bar{5} = \bar{5} + \bar{5} = \overline{2.5} = \overline{10} = \bar{3}$



$T'(x) = \bar{0}\, x^6 + \overline{10}\, x \;\; + \bar{2} = \bar{3}\, x \;\; + \bar{2} \in \mathbb{Z}_7[x]$.

Observar que no es como estaba acostumbrado en el caso de Análisis Matemático I que al derivar una función polinómica de grado h, la función derivada también es polinómica y de grado h-1……

- **Propiedades del polinomio derivado:**

i) Dado $P(x) \in K[x]$, $P'(x) \in K[x]$ (por definición)

ii) Una vez obtenido $P'(x)$ podemos obtener el derivado de él de la siguiente manera:

$D(P'(x)) = P''(x) = (n-1).n.\ a_n.\ x^{n-2} + (n-2).\ (n-1)\ a_{n-1}.x^{n-3} + \ldots + a_2$

y así sucesivamente, dado $P''(x) \in K[x]$, obtenemos $P'''(x)$, etc.

En general:

$D^r(P(x)) = D\,(D^{r-1}(P(x)))$ para $r > 1$

Se conviene $D^0\,(P(x)) = P(x)$

Observar que si $P(x) \in K[x]$, con $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$, $P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \ldots + a_1.x + a_0$ y gr($P(x)$) = n

$$P^r(x) = (n-r+1)\cdots(n-1).n.a_n.x^n + (n-r)\cdots(n-1)a_{n-1}.x^{n-r-1} + \ldots + a_r$$

Luego $P^n(x) = 1.2.\ \ldots\ .(n-1).n.\ a_n = n!.\ a_n$

$P^n(x) \neq 0(x)$.

Además:

$P^{n+j}(x) = 0(x)$, para $j > 0$.

Más Propiedades:

Sea K cuerpo conmutativo y sean $P(x)$ y $Q(x)$ en $K[x]$, entonces valen:

$$D(P(x) + Q(x)) = D(P(x)) + D(Q(x))$$

$$D(P(x).Q(x)) = D(P(x)).Q(x) + P(x).D(Q(x))$$

EJERCICIO 9.8.2:

Demostrar las propiedades anteriores.

Y para la última se sugiere probar para el caso $P(x) = a_t.x^t$ y $Q(x) = b^n x^n$

y luego aplicar la propiedad 1).

La noción de polinomio derivado introducida en los casos de $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, nos va a permitir caracterizar las raíces múltiples de un polinomio.

Recordar que en Análisis Matemático ha visto que la función real

$f(x) = x^2 + 2.x + 1 = (x+1)^2$ admite a -1 como raíz doble.

Si derivamos: $f'(x) = 2.x + 2 = 2.(x+1)$ se ve que -1 es raíz también de la derivada.

Este hecho se va a generalizar para **polinomios de *K* , *cuerpo conmutativo*:**

♦ Teorema 9.8.3:

Sea $P(x) \in K[x]$-{$0(x)$}. Sea $a \in K$, K cuerpo conmutativo y a es raíz de $P(x)$.

a es raíz múltiple de $P(x)$ entonces a es raíz de $P'(x)$.

Demostración:

Como hipótesis general se tiene $P(a) = 0$ porque a es raíz de $P(x)$. Observar que por ser $P(x)$ no nulo y teorema del Resto y sus corolarios $x - a$ es un divisor de $P(x)$.

Sea m la multiplicidad de a como raíz de $P(x)$. Con a múltiple, es entonces $m > 1$.

Luego:

$P(x) = (x-a)^m.G(x)$, con $G(a) \neq 0$, $m > 1$. (por Teorema 9.7.1)

$P'(x) = m.(x-a)^{m-1}.G(x) + (x-a)^m.G'(x) = (x-a)^{m-1}.[m.G(x) + (x-a).G'(x)]$

Como $m - 1 > 0$, luego $(x-a)^{m-1} \mid P'(x)$.

Por lo tanto a es raíz de $P'(x)$

Observación: dependiendo de la característica del cuerpo, podría ser $P'(x)= O(x)$

♦

Pero este resultado se puede mejorar si consideramos la **fórmula de Taylor para polinomios de coeficientes reales o complejos** que vale en esos conjuntos y se pasa a formular:

Propiedad 9.8.4:

Sea $P(x) \in K[x]$, $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, con gr($P(x)$ = n. Se tiene la siguiente fórmula:

$$P(x) = P(c) + \frac{P'(c)}{1!}(x-c) + \frac{P''(c)}{2!}(x-c)^2 + ... + \frac{P^n(c)}{n!}(x-c)^n$$

Fórmula de Taylor de $P(x)$ según potencias de x - c ó alrededor de x = c

Sin demostración: La idea es pensar que:

$P(x) = a_n (x - c)^n + ... + a_1 (x - c) + a_0$, con $a_n \neq 0$.

Observar que $P(c) = a_0$, derivar y especializar en c los sucesivos polinomios derivados.

Lo siguiente es un resultado que da además de la definición una manera de determinar la multiplicidad de un valor a como raíz de un polinomio.

Es fundamental desde el punto de vista teórico más que practico.

♦ Teorema 9.8.5 :

Sea $P(x) \in K[x]$, para $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y sea $a \in K$ raíz de $P(x)$.

a es raíz de multiplicidad m , $m > 1$, de $P(x)$

si y sólo si

$P(a) = P'(a) = P''(a) = ... = P^{(m-1)}(a) = 0 \wedge P^{(m)}(a) \neq 0$.

Demostración:

Recordemos que el teorema del Algoritmo de la División asegura que el cociente y resto de una división son únicos.

Sea $P(x) \in K[x]$, $a \in K$, raíz de $P(x)$ con multiplicidad m, $m > 1$, entonces por definición de raíz múltiple sabemos que

$$(x-a)^m \mid P(x) \quad y \quad (x-a)^{m+1} \nmid P(x)$$

Por lo tanto $P(x) = (x-a)^m.C(x) + R(x)$ con $R(x) = O(x)$

Considerar el desarrollo de Taylor de $P(x)$ alrededor de a :

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{P^m(a)}{m!}(x-a)^m + ... + \frac{P^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Y sacando factor común $(x-a)^m$ se tiene:

$$P(x)=P(a)+\frac{P'\ (a)}{1!}(x-a)^1+\frac{P''\ (a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{P^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}(x-a)^{m-1}+$$

$$+(x-a)^m\left[\frac{P^{(m)}(a)}{m!}+\frac{P^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}(x-a)\ \ +\cdots+\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-m}\right]$$

Por lo tanto el resto de la división de $P(x)$ por $(x-a)^m$ es:

$$R(x)=P(a)+\frac{P'(a)}{1!}(x-a)+\frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{P^{m-1}(a)}{m-1!}(x-a)^{m-1}$$

Y este resto es 0(x).

Cada termino de $R(x)$ es un polinomio que tiene un grado menos que el siguiente, por tanto el único termino de grado m-1 es el polinomio

$\frac{P^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}(x-a)^{m-1}$ luego si $P^{(m-1)}(a)\neq 0$ se contradice que $R(x)=O(x)$.

Y así analizando cada termino descendiendo en los grados, cada polinomio derivado evaluado en a debe ser 0 sino se contradice que $R(x)=O(x)$.

Es decir, resulta que $P(a) = P\,'(a) = ... = P^{(m-1)}(a) = 0$

Si $P^{(m)}(a)=0$, entonces $P(x)=(x-a)^{m+1}\left(\frac{P^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}+....+\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-m-1}\right)$

Pero entonces

$(x-a)^{m+1}\mid P(x)$

Absurdo, porque contradice la hipótesis. Luego $P^{(m)}(a)\neq 0$.

Queda como ejercicio la recíproca.

♦

EJERCICIO 9.8.6

Demostrar la otra implicación del teorema anterior: usar Taylor en potencias de x-a y usar las hipótesis y el teorema del algoritmo de la división.

♦ Corolario 9.8.7

Sean $P(x)\in K[x]$, $K=\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y $a\in K$ raíz de $P(x)$.

a es raíz de multiplicidad m , $m>1$, de $P(x)$ si y sólo si a es raíz de multiplicidad $m-1$ de $P\,'(x)$.

EJERCICIO 9.8.8

Demostrar el corolario anterior: aplicar a $T(x)$ el Teorema 9.8.5 siendo $P'(x)=T(x)$

EJERCICIO 9.8.9

Demostrar el siguiente teorema como corolario del teorema 9.6.1

♦ Teorema 9.8.9:

Sea $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, $P(x) = a_n . x^n + a_{n-1} . x^{n-1} + ... + a_1 .x + a_0$ tal que $a_j \in \mathbb{R}$ para todo *j*, $j = 0,...,n$. Si $z \in \mathbb{C}$ es raíz de multiplicidad *m* de $P(x)$ también lo es su conjugado.

8. Factorización

Por los resultados anteriores podemos concluir que: Todo polinomio de $\mathbb{C}$ $[x]$ se factores según sus raíces. Siendo b es el coeficiente principal de $P(x)$ se tiene

$$b\prod_{j=1}^{s}(\mathrm{x}-a_j)^{m_j} = P(x)$$

.

EJEMPLO 9.8.1

El polinomio $P(x)= x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 32x + 64$

se factorea $P(x) = (x - 4)^2 (x^2 + 4)$ en $\mathbb{R}[x]$

Esto está significando que 4 es raíz doble. El polinomio $x^2 + 4$ es irreducible sobre $\mathbb{R}$.

Son raíces de $x^2 + 4$ los complejos 2i y -2i .

La factorización por irreducibles en $\mathbb{C}$ $[x]$ es $P(x) = (x - 4)^2 .(x + 2i) .(x - 2i)$.

EJERCITACIÓN ADICIONAL

1. Probar las siguientes propiedades del producto de polinomios en $K[x]$. (Donde $K = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ó un anillo conmutativo cualquiera)

a) $P(x) . Q(x) = Q(x) . P(x)$

b) $P(x) . (Q(x) . R(x)) = (P(x) . Q(x)) . R(x)$

2. Analizar si los siguientes polinomios de $K[x]$, son invertibles (donde se indica)

a) $P(x) = 2x^2 + 3$ K anillo

b) $P(x) = 3x^2 - 1$; K=$\mathbb{R}$

c) $P(x)$ = 4 ; en K= $\mathbb{Z}$

d) $P(x)$ = 4 ; en K= $\mathbb{Q}$

e) $P(x) = x$; en K = $\mathbb{C}$

f) $P(x)$ = 1 + 2i ; en K = $\mathbb{C}$

g) En general. ¿Cuáles son los polinomios invertibles de $K[x]$?

3) Probar la propiedad distributiva del producto en la suma de $K[x]$

4) Determinar todos los polinomios $p(x)$ de $\mathbb{R}[x]$ que verifican:

$$p^2(x) + x = xp(x) + 1$$

$$p^2(x) = x^2(p(x) + x + 1)$$

5)¿Cómo son $p(x)$ y $q(x)$ polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$? si

$$p^2(x) + q^2(x) = 0$$

6) Sea K un cuerpo, probar que no existen polinomios no nulos $p(x)$, $q(x)$ en $K[x]$ tales que

$$p^2(x) + xq^2(x) = 0$$

7) Probar las siguientes propiedades de la divisibilidad de polinomios de $K[x]$, K cuerpo.

a) La divisibilidad es reflexiva y transitiva.

b) Si $P(x) \mid Q(x)$, y $P(x) \mid R(x)$; entonces $P(x) \mid m(x) \,.\, Q(x) + n(x) \,.\, R(x)$, cualesquiera sean $m(x)$ y $n(x) \in K[x]$.

c) Si $P(x) \mid Q(x)$, y $P(x) \mid Q(x) + R(x)$, entonces $P(x) \mid R(x)$.

d) Si $P(x) \mid Q(x)$ y gr($P(x)$) = gr($Q(x)$), entonces existe b $\in K$ tal que $P(x)$ = b . $Q(x)$.

8) Analizar la validez en $K[x]$, K cuerpo, para polinomios $P(x)$, $R(x)$ y $Q(x)$:

$P(x) \mid R(x)$ y $Q(x) \mid R(x)$, entonces $P(x) \,.\, Q(x) \mid R(x)$

9) Sean $p(x) = x^2 + 9, \quad q(x) = x^3 + 8, \quad h(x) = x^2 - 5x + 6, \quad t(x) = x^2 - 3.$

a) ¿Cuáles de los polinomios dados son irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$?.

b) ¿Ídem sobre $\mathbb{R}[x]$?.

c) ¿Ídem sobre $\mathbb{C}[x]$?.

10) Para los siguientes pares de polinomios:

i. $P(x) = x^5 - 4x^4 - 3x + 1 \quad Q(x) = 3x^2 + 2x + 1$. Ii. $p(x) = x^4 - 2x^3 + 1 \quad q(x) = x^2 - x + 2$

Calcular el *mcd* y *mcm*. Y expresar el mcd en cada caso como combinación polinómica

11) Si *P(x)* y *Q(x)* son polinomios de $\mathbb{R}$ [*x*], con todos los coeficientes en $\mathbb{Z}$ y *P(x)* | *Q(x)*, demostrar que el coeficiente principal de *P(x)* divide al coeficiente principal de *Q(x)*, y además *P*(0) | Q(0).

12) Sean *P(x)* $\in \mathbb{R}$ [*x*], con todos los coeficientes en $\mathbb{Z}$ y $r = \frac{s}{t} \in \mathbb{Q}$ con (s, t) = 1 tales que

P(r) = 0, entonces $s \mid P(0)$ y *t* divide al coeficiente principal de *P(x)*.

13) Determinar las raíces racionales de: *P(x)*=$12x^4 - 6x^2 + x + 5$ y *Q(x)*= $x^5 + 2x^2 - x$.

14) Probar que $(2x+3)$ y $(2x+1)$ son factores de $4x^5 + 4x^4 - 13x^3 - 11x^2 + 10x + 6$ sin hacer la división.

15) Hallar el valor de k para el cual $kx^4 + 3kx^3 + x + 3$ tiene como factor a *(x - 2).*

16) Sean *f(x), g(x)* $\in$ *K*[*x*], *K* cuerpo, *f(x)* y *g(x)* de grado positivo. Sea *H(x)* = (*f(x), g(x)*).
De un método para obtener una factorización prima de *H(x)* a partir de la de *f(x)* y *g(x)*.
Probar que $H^n(x) = (f^n(x), g^n(x))$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

17) Sabiendo que 1 es raíz de $p(x) = x^{3n} - 2nx^3 - 2x \in \mathbb{R}$ [*x*], con n $\in \mathbb{N}$. Calcular su multiplicidad

18) Sea *P(x)* $\in$ *K*[*x*], *K* cuerpo.

a) Demostrar que si $(x-a)$ | *P(x)* y $(x-a)$ | *P'(x)*, entonces $(x-a)^2$ | *P(x)*.

b) Demostrar que (*P(x)*, *P'(x)*) = 1 si y sólo si *P(x)* tiene todas sus raíces simples.

19) Sea *P(x)* = $x^n + a \in \mathbb{R}$ [*x*], a $\neq$ 0. Probar que toda raíz de *P(x)* es simple.

20) Sea *K* cuerpo, *P(x)* $\in$ *K*[*x*]. Si *P(x)* es irreducible sobre *K* entonces (*P(x)*, *P'(x)*) = 1.

21) Sean *p(x)* y *q(x)* $\in$ *K*[*x*], *q(x)* irreducible sobre *K*[*x*]. Entonces
$q^2(x) \mid p(x) \quad \Leftrightarrow \quad q(x) \mid p(x) \wedge q(x) \mid p'(x)$. ¿Si se elimina la hipótesis de *q(x)* irreducible, que ocurre?.

22) Determinar la multiplicidad de las siguientes raíces :

a) 3 de *P(x)* = $(x^3 - 27)(x^2 - 9)$

b) –2 de *P(x)* = $3x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 24x + 18$

c) i de *P(x)* = $3x^6 + 9x^4 + 9x^2 + 3$

23) Si *P(x)*, *Q(x)* $\in$ *K*[*x*], *K* cuerpo y existen $c_0,\ c_1,\ ....,\ c_n \in K$ tales que
$P(c_i) = Q(c_i)$ con $n \geq$ max {gr(*P(x)*), gr(*Q(x)*)}, entonces *P(x)* = *Q(x)*.

24) a) Demostrar que un polinomio *P(x)* = $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}$ [*x*] es irreducible si y sólo si $b^2 < 4ac$

b) Sea $P(x) = x^2 - 2$ en $\mathbb{Q}$ $[x]$. Es irreducible en $\mathbb{Q}$ $[x]$?.

c) Analice si en $\mathbb{Q}$ $[x]$ vale a).

25) Criterio de irreducibilidad en $\mathbb{Q}$ $[x]$ (de Eisenstein)

$$Sea\ P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i . x^i \text{ con los } a_i \in \mathbb{Z}, \quad gr(P(x)) > 0$$

$$Sea\ p\ un\ primo\ tal\ que\quad i)\ p\ no\ divide\ a\ a_n$$

$$ii)\ p\ divide\ a\ a_k \quad \forall k,\ 0 \le k < n$$

$$iii)\ p^2\ no\ divide\ a\ a_0$$

entonces $P(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}$ $[x]$.

26) Demostrar que $P(x) = 3x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 14$ es irreducible en $\mathbb{Q}$ $[x]$

27) Demostrar que todo polinomio $x^n - p$, p primo es irreducible en $\mathbb{Q}$ $[x]$ (para todo n y todo p).

28) Sea $P(x) = x^4 - 4x + 1 \in \mathbb{C}$ $[x]$. Sin calcular las raíces de $P(x)$, probar que todas sus raíces son simples. (Idea: Suponga que α es una raíz de multiplicidad ≥ 2 y use lo que sabe de $P'(\alpha)$).

29) Considerar $P(x) = x^n - nx + n - 1$ en $\mathbb{R}$ $[x]$, con $n \geq 1$.

Calcular la multiplicidad de 1 como raíz de $P(x)$.

Demostrar que si $\beta \in \mathbb{R} - \{1\}$ es raíz de $P(x)$, entonces β es raíz simple de $P(x)$.

30) Sea K cuerpo. Si $P(x) \in K[x]$ Probar que $g(x) = \dfrac{P(x)}{d(x)}$ siendo $d(x) = (P(x), P'(x))$, tiene las mismas raíces que $P(x)$ pero todas simples.

31) Sin hallar las raíces, encontrar otro polinomio que tenga las mismas raíces de $p(x)$, pero todas simples:

a) $p(x) = x^5 - 13x^4 + 68x^3 - 176x^2 + 220x - 10$

b) $p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$

32) a) Encontrar b, $c \in \mathbb{R}$ para que $1+i$ sea una raíz de $P(x) = x^3 + bx^2 + cx + 6$

b) Hallados b, c escribir $P(x)$ como producto de polinomios primos en $\mathbb{C}$ $[x]$ y en $\mathbb{R}$ $[x]$

33) a) Construir un polinomio mónico de mínimo grado que tenga raíces: $2 - 5i$ doble, $1 - i\sqrt{5}$ triple, $3 + i$ simple.

b) Igual que en a) y además que el polinomio tenga coeficientes reales.

34) a) Hallar el polinomio mónico de grado mínimo que admita a 2, -1 y -3 como raíces dobles y a -7 como raíz simple.

b) Hallar el polinomio de $\mathbb{R}$ $[x]$ de grado mínimo, con coeficiente principal -3 que admita a 1 + 2*i* como raíz doble, a *i* como raíz simple y a -3 como raíz triple.

c) Hallar el polinomio de $\mathbb{C}$ $[x]$ de grado mínimo, con coeficiente principal -3 que admita a 1 + 2*i* como raíz doble, a *i* como raíz simple y a -3 como raíz triple.

35) Probar que $p(x)=\sum_{i=0}^{n} x^i$ tiene todas sus raíces simples.

36) Probar que $p(x)=\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}$ tiene todas sus raíces simples.

Adicionales en con K = $\mathbb{Z}_p$

37) Enumerar todos los polinomios de grado menor o igual que 5 de: $\mathbb{Z}_3[x] \quad y \quad \mathbb{Z}_2[x]$.

38) En $\mathbb{Z}_3[x]$ hallar el cociente y el resto de la división de *P(x)* = x^3+x^2+1 por x + 1.

39) Probar que en *K* de característica p, los polinomios $P(\ x^p\ )$ son reducibles.

40) Criba para determinar polinomios irreducibles en cuerpos finitos *K* (por ejemplo $\mathbb{Z}$ p, con p primo)

Los polinomios de grado 1 son irreducibles en *K*[x].

Analizar: si *P(x)* $\in$ *K*[x] es reducible en *K*[x], entonces *P(x)* es divisible por un polinomio irreducible de grado a lo sumo $\frac{gr(p(x))}{2}$.

Sólo hay un número finito de polinomios de grado dado. Enumerar los irreducibles mónicos de grado 1, luego los de grado 2, los de grado 3, etc., siguiendo hasta llegar a los de grado $\frac{gr(p(x))}{2}$ y así comprobar si *P(x)* es irreducible o no.

41) Hallar los polinomios irreducibles de $\mathbb{Z}_2[x]$ de grado ≤ 5. Análogo para $\mathbb{Z}_3[x]$.

CAPÍTULO 10
Matrices

Uno de los objetivos del Algebra es encontrar condiciones para que existan soluciones y algoritmos para resolver ecuaciones. En este Capítulo estudiaremos los sistemas de ecuaciones lineales que son modelo de muchas situaciones problemáticas.

Los sistemas de ecuaciones lineales aumentaron particularmente su importancia con la creación de la Geometría Analítica que permitió reducir el estudio de la posición relativa de rectas o planos al estudio de sistemas de ecuaciones lineales.

Cómo resolvemos la distribución de una herencia entre varios herederos, o cómo se distribuyen los alumnos en las aulas para la toma de un examen, etc., si tales circunstancias están sujetas a otras condiciones, conducen al planteo de varias ecuaciones con varias incógnitas y en algunas situaciones son ecuaciones lineales.

(Son ecuaciones lineales aquellas en que las incógnitas están elevadas a la potencia 1).

Por ejemplo: "El señor González tiene dos hijos para repartir su fortuna de \$2500000. El mayor recibirá el doble que el menor. ¿Cuánto recibirá cada uno?"

Si indicamos por x: la cantidad de \$ que recibirá el hijo mayor.
por y: la cantidad de \$ que recibirá el hijo menor.

Las condiciones descriptas llevan al planteo de:

$$\begin{cases} x + y = 2500000 \\ x = 2y \end{cases}$$

que es **un sistema de ecuaciones**, no es otra cosa que una cierta cantidad de ecuaciones (en este caso dos) con cierta cantidad de incógnitas (en este ejemplo dos).

Una **solución** para un sistema de ecuaciones ***es* un juego de valores numéricos** (en el ejemplo un par) de las incógnitas, que **resuelve simultáneamente todas las ecuaciones.**

Resolver un sistema de ecuaciones es encontrar soluciones del mismo. Puede suceder que no existan soluciones, que exista una sola o que haya más de una.

Para encarar el estudio general de los sistemas de ecuaciones lineales haremos primeramente el estudio de unos *objetos algebraicos,* llamados **matrices**, que facilitarán las cosas y que además de aplicarse en los sistemas de ecuaciones sirven para representar entre otros distintos fenómenos físicos, económicos y geométricos.

Las matrices permitirán justificar entre otras cosas los métodos de sumas y restas y determinantes seguramente ya conocidos y aplicados para resolver los sistemas dos por dos.

1. Cálculo Matricial Básico (primeras definiciones)

La teoría de matrices requiere la definición de unos objetos (las matrices) formados a su vez con elementos de un conjunto *K*. De acuerdo *que se elija como K,* las matrices tendrán distintas posibilidades y propiedades. En este curso se tomará *K* como un cuerpo conmutativo (por ejemplo $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ o algún $\mathbb{Z}_p$, con p primo) y en aquellas ocasiones que se considere otro conjunto numérico se aclarará.

Recordar que un cuerpo es una terna (*K*, +, .) , que por abuso de notación sólo se indica por *K*.

La suma + sobre *K* cumple las propiedades de ser cerrada, asociativa, existe el neutro (el nulo que indicamos por 0 o 0_K), todo elemento tiene opuesto y es conmutativa.

La multiplicación . sobre *K* cumple las propiedades de ser cerrada, asociativa, existe el neutro (la unidad que indicamos por 1 o 1_K), todo elemento no nulo tiene inverso multiplicativo y es conmutativa.

Además la multiplicación se distribuye en la suma.

También es posible considerar como *K* algún conjunto donde estén definidos una suma y un producto y además con "buenas" propiedades.

La teoría que pretendemos desarrollar se limitará a definir operaciones algebraicas (suma entre matrices, producto de matriz por un número y producto entre matrices) y estudiar las propiedades de esas operaciones en estos objetos, muchas propiedades son similares a las que se verifican sobre los números complejos.

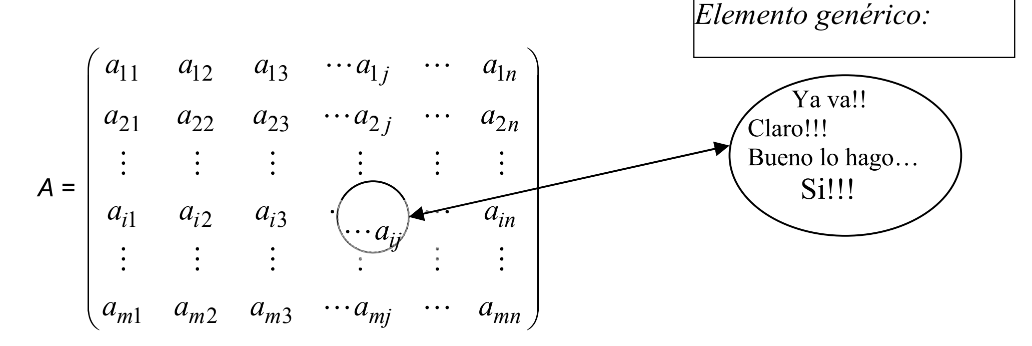
Una **matriz** de ***m* filas** y ***n* columnas** es un conjunto de *m* x *n* elementos del cuerpo *K* dispuestos en un cuadro, formando *m* filas y *n* columnas.

Para poder indicar la fila y columna que ocupa un elemento se utilizan dos subíndices, el primero indica la fila y el segundo la columna.

Las matrices las designaremos por letras mayúsculas.

Para indicar que los *m* x *n* elementos forman una matriz los encerramos entre paréntesis.

Una matriz genérica es la siguiente:



$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notación:

Para referirse brevemente a una matriz se indicará $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ o simplemente

" A es m x n".

Cuando no importa precisar el orden o tipo (número de filas y columnas) o él se sobrentiende, se dice "la matriz *A*".

Al conjunto de matrices m x n de elementos de K se lo acostumbra a anotar $K^{m \times n}$.

También es costumbre indicar a los elementos de una matriz con la letra minúscula correspondiente a la mayúscula que se utiliza para designar la matriz, seguida de dos subíndices. Esto es, si *B* es la matriz, su elemento genérico lo designamos por b_{ij} o b_{kp},

Recuerde que los índices "son mudos" y los pares de subíndices indican fila y columna.

Si *T* es otra matriz, como designa sus elementos???



EJEMPLO 10.1.1:

Sean las siguientes matrices:

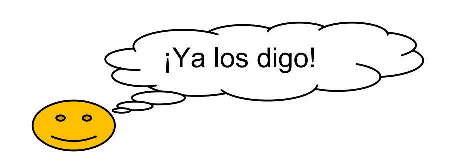
$$A = \begin{pmatrix} 2+i & 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & 1 & -4 \\ 0 & -i & -3+3i \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -3-i \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 0 & 4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

A es una matriz 3 x 3, que por tener igual número de filas que de columnas se dice **cuadrada.** Escribimos que $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$

$a_{11} = 2+i \quad a_{22} = 1 \quad a_{33} = -3+3i$, ellos son los elementos de la **diagonal principal** de A.

Las matices cuadradas (m x m) desplegadas forman un cuadrado, por eso se habla de diagonales. Observar que los elementos sobre la diagonal que va del extremo superior izquierdo al inferior derecho, tienen igual índice de fila que de columna. A ésta se la llama **diagonal principal**. La otra **diagonal** es la **secundaria**.



Otros elementos de A son $a_{23} = $-4; $a_{12} = 0$; etc.

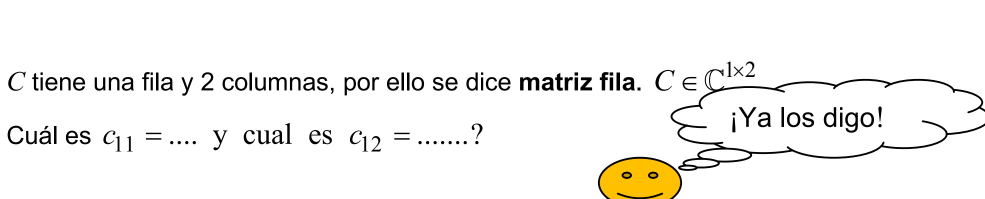
B tiene 4 filas y una columna, por ello se dice **matriz columna**. Esta se puede considerar como $B \in \mathbb{C}^{4\times1}$ ó $B \in \mathbb{R}^{4\times1}$

Tiene un elemento no nulo que es el $b_{21} = 1$ y podemos afirmar que

$b_{ij} = 0$ para todo i y para $j = 1$ tal que $1 \le i \le 4 \ \wedge\ j=1 \wedge\ i \ne 2$

C tiene una fila y 2 columnas, por ello se dice **matriz fila.** $C \in \mathbb{C}^{1\times2}$

Cuál es $c_{11} = ...$ y cual es $c_{12} = ...?$



D es cuadrada y tiene la particularidad que todos sus elementos son 0, por eso se dice **matriz nula**, como es 2 x 2, es **la nula 2 x 2.** Entonces $D \in \mathbb{C}^{??}$ ó $D \in \mathbb{R}^{??}$?

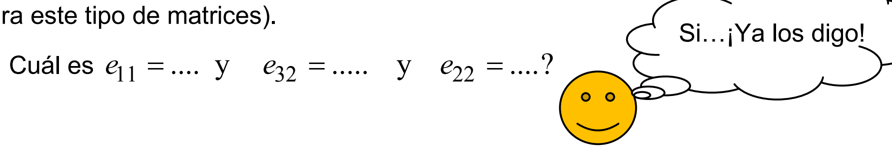
Esto lo podemos expresar como

$d_{ij} = 0$ para todo i y para todo j tal que $1 \le i \le 2 \ \wedge\ 1 \le j \le 2$

E es 3 x 2, es una **matriz rectangular** (no cuadrada) pues el número de filas es distinto del número de columnas. La matriz E es elemento de qué conjunto??

(De la geometría elemental se sabe que los rectángulos tienen diagonales pero no se define para este tipo de matrices).

Cuál es $e_{11} = ...$ y $e_{32} = ...$ y $e_{22} = ...?$



➢ *¿Qué es la igualdad de matrices?*

Para que dos matrices A y B sean iguales se debe verificar:

- **Que sean de igual tipo.**

Esto es: el número de filas de A igual al número de filas de B e igualmente para columnas.

Esto significa que se habla de **la igualdad en** $K^{m\times n}$ para m y n fijos.

- **Que los elementos sean respectivamente iguales.**

Esto es que si $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ y $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i, $1 \le i \le m$ y para todo j , $1 \le j \le n$

Es decir que

Dadas las matrices

$$A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \quad B=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le s\\1\le j\le p}}$$

$$A=B \quad \text{si y solo si} \quad \begin{cases} m=s \quad \wedge \quad n=p \\ a_{ij}=b_{ij} \quad \text{para todo } i, \quad 1\le i\le m \ \text{ y para todo } j,\ 1\le i\le n \end{cases}$$

Si lo imaginamos visualmente significa que al superponer A con B, coincidan sus elementos.

❋ *Suma de matrices*

Esta operación se **define para matrices de igual orden o tipo**.

Esto es de igual número de filas e igual número de columnas.

Fijemos esto en m x n. Es decir trabajaremos con elementos de $K^{m\times n}$

¿Cuál es la pretensión?

- Que sumando dos matrices de $K^{m\times n}$ se obtenga una matriz de $K^{m\times n}$.
- Que esa operación tenga "buenas propiedades". Esto es, que llegue a tener las propiedades que cumple la suma definida en los conjuntos numéricos: $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ ó $\mathbb{Z}_p$.

Son además las que verifica la suma definida en $K[x]$, para $K=\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ ó $\mathbb{Z}_p$

Dadas las matrices $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ y $B=\left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ llamamos **suma de *A* y *B*** y lo anotamos $A+B$ a una matriz $C=\left(c_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ cuyo elemento genérico es dado por:

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \qquad \text{para cada } 1\le i\le m \ \wedge \text{para cada } 1\le j\le n$$

Observar que se suman los elementos que están en igual posición (fila y columna) en ambos sumandos para obtener la matriz suma.

Comentario formal: se usa el mismo símbolo + para indicar la suma de matrices de $K^{m\times n}$ y para indicar la suma en K, pero eso no debe traer confusión pues el contexto determinará de que se habla.

"*Visualicemos*" nuevamente: si superponemos las matrices a sumar, sumamos los elementos que "se tocan" y así obtenemos la matriz suma.

EJEMPLO 10.1.2:

1) Sumar las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 3\\ -4 & 3 & 1\end{pmatrix} \quad A+B=\begin{pmatrix}1+(-2) & 3+4 & -1+3\\ 2+(-4) & 0+3 & 5+1\end{pmatrix}$$

luego

$$A+B=\begin{pmatrix}-1 & 7 & 2\\ -2 & 3 & 6\end{pmatrix}$$

2) Sumar las matrices

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1-i\\ -6i & 1 & 8\\ 0 & -2+3i & 5\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}5 & 2 & 4+4i\\ 3+i & 6 & 4-i\\ 0 & 2 & -2i\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}3+5 & 0+2 & (1-i)+(4+4i)\\ -6i+(3+i) & 1+6 & 8+(4-i)\\ 0+0 & (-2+3i)+2 & 5+(-2i)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 2 & 5+3i\\ 3-5i & 7 & 12-i\\ 0 & 3i & 5-2i\end{pmatrix}$$

$$B+A=\begin{pmatrix}5+3 & 2+0 & (4+4i)+(1-i)\\ (3+i)+(-6i) & 6+1 & (4-i)+8\\ 0+0 & 2+(-2+3i) & -2i+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 2 & 5+3i\\ 3-5i & 7 & 12-i\\ 0 & 3i & 5-2i\end{pmatrix}$$

¿Que observa??

¿Valdrá en general que $A+B=B+A$? ¡Justifique su opinión!



EJEMPLO 10.1.3

¿Cuáles de las siguientes matrices son sumables? Halle la suma en esos casos:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3-2i & 0\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}4-i\\ 3+i\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix}3-i\\ 4\\ -6\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}3 & \sqrt{2} & -1\\ \frac{1}{2} & -3 & 7\\ -4 & 8 & 0\end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -3+2i & 0\end{pmatrix} \quad G=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 0\\ -3+2i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Para que las matrices se puedan sumar se tiene que verificar que sean de igual tipo.

Por lo tanto son sumables: A con F ya que ambas son 2 x 2 y por otra parte C, E y G que son 3 x 3.

Si operamos:

$$C+E=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&\sqrt{2}&-1\\ \frac{1}{2}&-3&7\\-4&8&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+3&0+\sqrt{2}&0+(-1)\\0+\frac{1}{2}&0+(-3)&0+7\\0+(-4)&0+8&0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&\sqrt{2}&-1\\ \frac{1}{2}&-3&7\\-4&8&0\end{pmatrix}$$

$$A+F=\begin{pmatrix}2&-4\\3-2i&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&4\\-3+2i&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2&-4+4\\(3-2i)+(-3+2i)&0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

¿Qué le sugieren estos dos ejemplos?

¿Cómo es C ? ¿Qué ocurre cuando se suma con otra matriz? ¿Qué propiedad tiene?

¿Cómo llamaría a F o a A? ¿Qué son una respecto de la otra? ¿Cómo anotaría a F, a A?

Queda para que complete las sumas de C con G y de E con G.

➢ *Propiedades de la suma de matrices*

- Por la definición dada si $A\in K^{m\times n}$ y $B\in K^{m\times n}$ entonces $A+B\in K^{m\times n}$, esto significa que la suma de matrices es **cerrada** en $K^{m\times n}$.
- Si A, B y C son elementos de $K^{m\times n}$ entonces $(A+B)+C=A+(B+C)$ luego vale que la suma de matrices es **asociativa** en $K^{m\times n}$.
- Dadas $A\in K^{m\times n}$ y $B\in K^{m\times n}$ entonces $A+B=B+A$ luego vale que la suma de matrices es **conmutativa** en $K^{m\times n}$.
- Existe el **neutro** en $K^{m\times n}$, la matriz nula de $K^{m\times n}$ que indicaremos por O siendo $O=\left(o_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ tal que $o_{ij}=0$ para todo i, $1\le i\le m$ y para todo j, $1\le j\le n$ y para toda $A\in K^{m\times n}$ entonces $A+O=A$.
- Para toda matriz $A\in K^{m\times n}$ existe una matriz $B\in K^{m\times n}$ tal que $A+B=O$ esto es para toda $A\in K^{m\times n}$, existe la **opuesta** en $K^{m\times n}$ y para indicar su relación con A la indicaremos por - A.

Es claro que para cada $K^{m\times n}$ existe una matriz nula hay veces que puede resultar necesario especificar de que nula se habla por ello en determinadas circunstancias se precisa anotando $O_{m \times n}$.

Esto es $O_{2\times 3}$ y $O_{2\times 2}$ indican las matrices: $O_{2\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad O_{2\times2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 10.1.4

a) Verificar la propiedad asociativa de la suma de matrices para tres matrices a elección en $\mathbb{C}^{3\times2}$.

b) Verificar la propiedad conmutativa de la suma de matrices para dos matrices que Ud. elija en $\mathbb{R}^{4\times4}$.

c) Demostrar esas propiedades de la suma de matrices en $K^{m\times n}$.

d) Demostrar las restantes propiedades de la suma de matrices en $K^{m\times n}$.

Solución de una parte de c):

La **propiedad conmutativa**:

Sean $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ y $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ consideremos la suma de A con B

$A + B = C = \left(c_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ cuyo elemento genérico es dado por:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \text{para cada } 1 \le i \le m \quad \wedge \text{ para cada } 1 \le j \le n$$

Como vemos cada c_{ij} es suma de dos números de K y en K vale la propiedad conmutativa de la suma luego:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} \qquad \text{para cada } 1 \le i \le m \quad \wedge \text{ para cada } 1 \le j \le n$$

Pero el último miembro de la igualdad indica el elemento genérico de la suma de las matrices B y A en ese orden por la definición dada de la suma de matrices.

Como dos matrices son iguales si coinciden en sus elementos genéricos resulta que $A + B = B + A$.

Observar que en la demostración se usó además de la definición de suma en $K^{m\times n}$ la propiedad conmutativa en K, similarmente ocurrirá con las otras propiedades: la validez se desprende de la definición de la suma en $K^{m\times n}$ y de la propiedad respectiva en K.

✵ *Multiplicación de escalar por matriz*

Se llaman **escalares** a los elementos de K.

De alguna manera las matrices generalizan los conceptos de vectores en el plano y el espacio, por eso es que se llaman escalares a los números para diferenciarlos de los otros objetos llamados vectores. Además es habitual considerar el achicamiento o estiramiento producido al multiplicar un vector por un número, esta operación es la que generalizaremos seguidamente.

¿Cuál es la pretensión?

- Que dado un número en K y una matriz de $K^{m\times n}$ obtener por resultado de la operación una matriz de $K^{m\times n}$.

Sea una matriz $A \in K^{m\times n}$ y un elemento $\alpha \in K$, si $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ se define

$$\alpha \,.\, A = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \text{ donde para cada } i, 1 \le i \le m \text{ y para cada } j, 1 \le j \le n$$

$$b_{ij} = \alpha \,.\, a_{ij}$$

Esto es, cada elemento de A se multiplica por α.

OBSERVACIÓN: hay trabajos que definen la multiplicación de escalar por matriz como de matriz por escalar esto es

$$A \,.\alpha = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \text{ donde para cada } i, 1 \le i \le m \text{ y para cada } j, 1 \le j \le n$$

$$b_{ij} = a_{ij} \,.\alpha$$

Pero por la conmutatividad de K, resulta que $\alpha \,.\, A = A \,.\, \alpha$

Otra observación formal: Para indicar la multiplicación de escalar por matriz se ha usado también el **.** que simboliza la multiplicación entre elementos de K, pero el contexto hará comprender de cual producto se trata.

EJEMPLO 10.1.5

Dados $A = \begin{pmatrix} 2-i & 0 \\ 2 & 1+i \end{pmatrix}$ $\quad \alpha = 3$ calcular el producto:

$$\alpha \,.\, A = \begin{pmatrix} 3.(2-i) & 3.0 \\ 3.2 & 3.(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-3i & 0 \\ 6 & 3+3i \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 10.1.6

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1-i & 2i \end{pmatrix}$ $\alpha = 1 + i$ calcular el producto: (recordar que $i^2 = -1$)

$$\alpha \,.\, A = \begin{pmatrix} (1+i).2 & (1+i).(-3) & (1+i).4 \\ (1+i).0 & (1+i).(1-i) & (1+i).2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2i & -3-3i & 4+4i \\ 0 & 2 & -2+2i \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 10.1.7

Dada $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5+2i \end{pmatrix}$ observamos que los elementos no nulos están sobre la **diagonal principal** (esto es una matriz cuadrada, puede interpretarse por ello como un “cuadrado” y como tal tiene dos diagonales, la principal es la que va del elemento de subíndices 11 al de subíndices 44, en este caso. Por eso es una **matriz diagonal**.

Particularmente en el siguiente caso, es una diagonal con todos los elementos iguales, por eso se llama **matriz escalar** (nombre que se justificará luego).

De acuerdo a la definición es claro que: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se anota como $I_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por lo cual A = 4. $I_{4\times 4}$

En general una **matriz escalar** es de la forma:

$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ con $\lambda \in K$ que es expresable como $\lambda.\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es muy especial, le pondremos nombre: la **identidad de tipo *n* x *n* (o de orden *n*),** tal que sus elementos son el 1 de K en la diagonal principal y el 0 de K fuera de ésta. Esta matriz se puede describir como sigue:

$$I_n = \left(e_{i\,j}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \text{ tal que } e_{i\,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \ne j \end{cases}$$

EJEMPLO 10.1.8

Sea $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ -3 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 7\\ 1 & -9 & 3\end{pmatrix}$ hallar -1. A ; 0. A ; 2. A

-1. $A=\begin{pmatrix}-1.(-2) & -1.0 & -1.1\\ -1.(-3) & -1.2 & -1.0\\ -1.3 & -1.0 & -1.7\\ -1.1 & -1.(-9) & -1.3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & -2 & 0\\ -3 & 0 & -7\\ -1 & 9 & -3\end{pmatrix}$ es decir .... - A.

$0.A=0.\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ -3 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 7\\ 1 & -9 & 3\end{pmatrix}=\cdots=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ ¿está de acuerdo? Es la $O_{4\times 3}$

$2.A=\begin{pmatrix}2.(-2) & 2.0 & 2.1\\ 2.(-3) & 2.2 & 2.0\\ 2.3 & 2.0 & 2.7\\ 2.1 & 2.(-9) & 2.3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 2\\ -6 & 4 & 0\\ 6 & 0 & 14\\ 2 & -18 & 6\end{pmatrix}$

Claramente 1. $A= A$

Además compruebe que 2. A = (1+1). $A = A + A$

➢ *Propiedades de la multiplicación de escalar por matriz*

- Por la definición dada si $A\in K^{m\times n}$ y $\alpha\in K$ entonces $\alpha\,.\,A\in K^{m\times n}$.
- Dada $A\in K^{m\times n}$ entonces 1 . $A=A$

Hay dos clases de "distributividad":

- Dados $A\in K^{m\times n}$, $B\in K^{m\times n}$ y $\alpha\in K$ entonces $\alpha\,.\,(A+B)=\alpha\,.\,A+\alpha\,.\,B$ luego vale que la multiplicación por el escalar se distribuye en la suma de matrices.

- Dados $A\in K^{m\times n}$, $\alpha\in K$ y $\beta\in K$ entonces $(\alpha+\beta)\,.\,A=\alpha\,.\,A+\beta\,.\,A$ luego vale que la multiplicación de una matriz por una suma de escalares se distribuye en la suma de escalares.

Se verifica una especie de asociatividad:

- Dados $A \in K^{m\times n}$, $\alpha \in K$ y $\beta \in K$ entonces $(\alpha.\beta).A = \alpha.(\beta.A)$.

Observar con atención los distintos usos del símbolo "**.**" en la propiedad anterior.

EJERCICIO 10.1.9

a) Verificar las propiedades para al menos dos casos por propiedad.

b) Demostrar al menos dos propiedades de la multiplicación de escalar por matriz.

Lo ayudamos en b):

Sean $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{m\times n}$ y $\alpha \in K$ entonces $\alpha.(A+B) = \alpha.A + \alpha.B$

Sea $A+B$ = $C = \left(c_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ donde

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \text{para cada } 1 \le i \le m \ \wedge \text{para cada } 1 \le j \le n$$

$\alpha.(A+B) = \alpha.C$ es decir es

$\alpha.c_{ij} = \alpha.(a_{ij} + b_{ij})$ para cada $1 \le i \le m \ \wedge$ para cada $1 \le j \le n$

Como vale la propiedad distributiva de la multiplicación en K en la suma en K, se tiene

$\alpha.c_{ij} = \alpha.a_{ij} + \alpha.b_{ij}$ para cada $1 \le i \le m \ \wedge$ para cada $1 \le j \le n$ (*)

Por otra parte si se trabaja con el segundo miembro de la igualdad a demostrar: $\alpha.A + \alpha.B = T + F$ donde $\alpha.A = T = (t_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ y $\alpha.B = F = (f_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ por tanto $t_{ij} = \alpha.a_{ij}$ y $f_{ij} = \alpha.b_{ij}$ para cada $1 \le i \le m \ \wedge$ para cada $1 \le j \le n$ (**) ,

y además

$\alpha.A + \alpha.B = T + F$ = G = $(g_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ tal que cada $g_{ij} = t_{ij} + f_{ij}$ (***)

Luego comparando (*) y (***) y teniendo en cuenta (**) resulta la igualdad pretendida.

EJERCICIO 10.1.10

Realizar los siguientes cálculos: 2. B ; $i.\,B$; 3. A + (2 - i). B ; $A +\ 4\,i\,B$

para los casos:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3i \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ \sqrt{2} & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -\sqrt{2} & 2 & 0 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 10.1.11

Hallar X tal que $4.X = -3.A + 2.B$ para:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ \sqrt{2} & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -\sqrt{2} & 2 & 0 \end{pmatrix}$

❋ *Una definición importante: La trasposición y la matriz traspuesta*

Dada una matriz A se le asocia otra matriz si se intercambian ordenadamente las filas con las columnas.

Precisando, para una matriz $A \in K^{m\times n}$, $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ se define como

la **traspuesta de A** a la matriz de $K^{n\times m}$ que se anota A^t dada por:

$$A^t = \left(a^*_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}} \text{ donde para cada } i, 1 \le i \le n \text{ y para cada } j, 1 \le j \le m$$

$$a^*_{ij} = a_{ji}$$

La trasposición de matrices es una función $^t : K^{m\times n} \to K^{n\times m}, \quad A \quad \mapsto A^t$, a cada matriz A se le asigna su traspuesta.

Lo que hace esta operación es colocar ordenadamente las filas como columnas, así se pasa de una matriz *m* x *n* a otra *n* x *m*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 10.1.12

Dada $A = \begin{pmatrix} 2-i & 0 \\ 2 & 1+i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ como es 2 x 2, su traspuesta es también 2 x 2:

$$A^t = \begin{pmatrix} 2-i & 2 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 10.1.13

a) Sea $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 0 & 1-i & 2i\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times3}$ entonces $A^t\in\mathbb{C}^{3\times2}$ y es $A^t=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & 1-i\\ 4 & 2i\end{pmatrix}$

b) Si $B=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times1}$ entonces se tiene $B^t=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{1\times4}$

EJEMPLO 10.1.14

Sean, como en un ejemplo anterior:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1-i\\ -6i & 1 & 8\\ 0 & -2+3i & 5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}5 & 2 & 4+4i\\ 3+i & 6 & 4-i\\ 0 & 2 & -2i\end{pmatrix}$$

Se ha calculado $A+B$:

$$A+B=\begin{pmatrix}8 & 2 & 5+3i\\ 3-5i & 7 & 12-i\\ 0 & 3i & 5-2i\end{pmatrix}$$

Si se traspone $A+B$ se obtiene:

$$(A+B)^t=\begin{pmatrix}8 & 3-5i & 0\\ 2 & 7 & 3i\\ 5+3i & 12-i & 5-2i\end{pmatrix}$$

Por otra parte, si trasponen A y B y se suman:

$$A^t=\begin{pmatrix}3 & -6i & 0\\ 0 & 1 & -2+3i\\ 1-i & 8 & 5\end{pmatrix}\qquad B^t=\begin{pmatrix}5 & 3+i & 0\\ 2 & 6 & 2\\ 4+4i & 4-i & -2i\end{pmatrix}$$

$$A^t+B^t=\begin{pmatrix}8 & 3-5i & 0\\ 2 & 7 & 3i\\ 5+3i & 12-i & 5-2i\end{pmatrix}$$

¿Qué observa? ☺

EJEMPLO 10.1.15

Dados $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ 0 & 1-i & 2i\end{pmatrix}$ $\qquad\alpha=1+i$

ya se ha calculado $\alpha\,.\,A=\begin{pmatrix}2+2i & -3-3i & 4+4i\\ 0 & 2 & -2+2i\end{pmatrix}$.

Trasponiendo se tiene: $(\alpha\ .\ A)^t = \begin{pmatrix} 2+2i & 0 \\ -3-3i & 2 \\ 4+4i & -2+2i \end{pmatrix}$

Si se traspone A y se multiplica por el escalar:

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1-i \\ 4 & 2i \end{pmatrix} \qquad \alpha.A^t = \begin{pmatrix} 2+2i & 0 \\ -3-3i & 1-i \\ 4+4i & -2+2i \end{pmatrix}$$

¿Qué observa?

EJERCICIO 10.1.16

a) Verificar:

1) $(A+B)^t = A^t + B^t$

2) $(\alpha.A)^t = \alpha.A^t$

3) $(A^t)^t = A$

Para las matrices y escalares siguientes:

1) y 3) con $A = \begin{pmatrix} 2 & -4i & 5 \\ -9 & 2 & -2+i \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 6+4i & 1 \\ 7+2i & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2) con $\alpha = \frac{-2}{3} - \frac{1}{3}i$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6+i & 2 & 3 \\ -1 & 3-i & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\beta = -\frac{1}{2} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Demuestre al menos una de las propiedades enunciadas en a).

c) ¿Cuál es la traspuesta de $O \in K^{m \times n}$? Ejemplifique lo que afirma.

d) Si $\mathrm{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonal, ¿cuál es su traspuesta? Ejemplifique.

e) ¿Qué pasa con la traspuesta de $I_n \in K^{n \times n}$, siendo I_n la matriz identidad de orden n ?

Ejemplifique para algunos n y demuestre en general.

Se hará alguna parte de b), ¿Qué tal la 2) ?:



Sean $A \in K^{m \times n}$, $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$, la matriz

$A^t = \left(a^*_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$ donde para cada $i, 1 \le i \le n$ y para cada $j, 1 \le j \le m$

$$a^*_{ij} = a_{ji}$$

$\alpha . A = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = B$ donde para cada $i, 1 \le i \le m$ y para cada $j, 1 \le j \le n$

$b_{ij} = \alpha . a_{ij}$

$(\alpha . A)^t = B^t$ donde para cada $i, 1 \le i \le m$ y para cada $j, 1 \le j \le n$

$b_{ij}^* = (\alpha . a_{ij})^* = b_{ji} = \alpha . a_{ji}$ (1) por definicion de la multiplicación por escalar y traspuesta.

Por otra parte:

$\alpha . A^t = C = \left(c_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$ donde para cada $i, 1 \le i \le n$ y para cada $j, 1 \le j \le m$

$c_{ij} = \alpha . a^*_{ij} = \alpha . a_{ji}$ (2) por la definición de la multiplicación por escalar y traspuesta.

Comparando (1) y (2) se tiene la igualdad buscada.

2. Multiplicación entre Matrices

Otra operación entre matrices es la multiplicación.

La definición que seguidamente se dará pareciera antojadiza pero es debido a las aplicaciones que la teoría de matrices tiene, una de las cuales será aprovechada en este Curso: la resolución de los sistemas de ecuaciones. También es aplicable en el capítulo de transformaciones lineales.

Históricamente se asigna a Arthur Cayley el haber introducido la multiplicación matricial precisamente para esta aplicación a mediados del siglo XIX.

Sean $A \in K^{m \times n}$ y $B \in K^{n \times p}$ dos matrices tales que (como se destaca) el número de columnas de A es igual al número de filas de B.

Con ellas se define una matriz $C \in K^{m \times p}$, llamada **producto de A por B**.

Se anota $C = A . B$

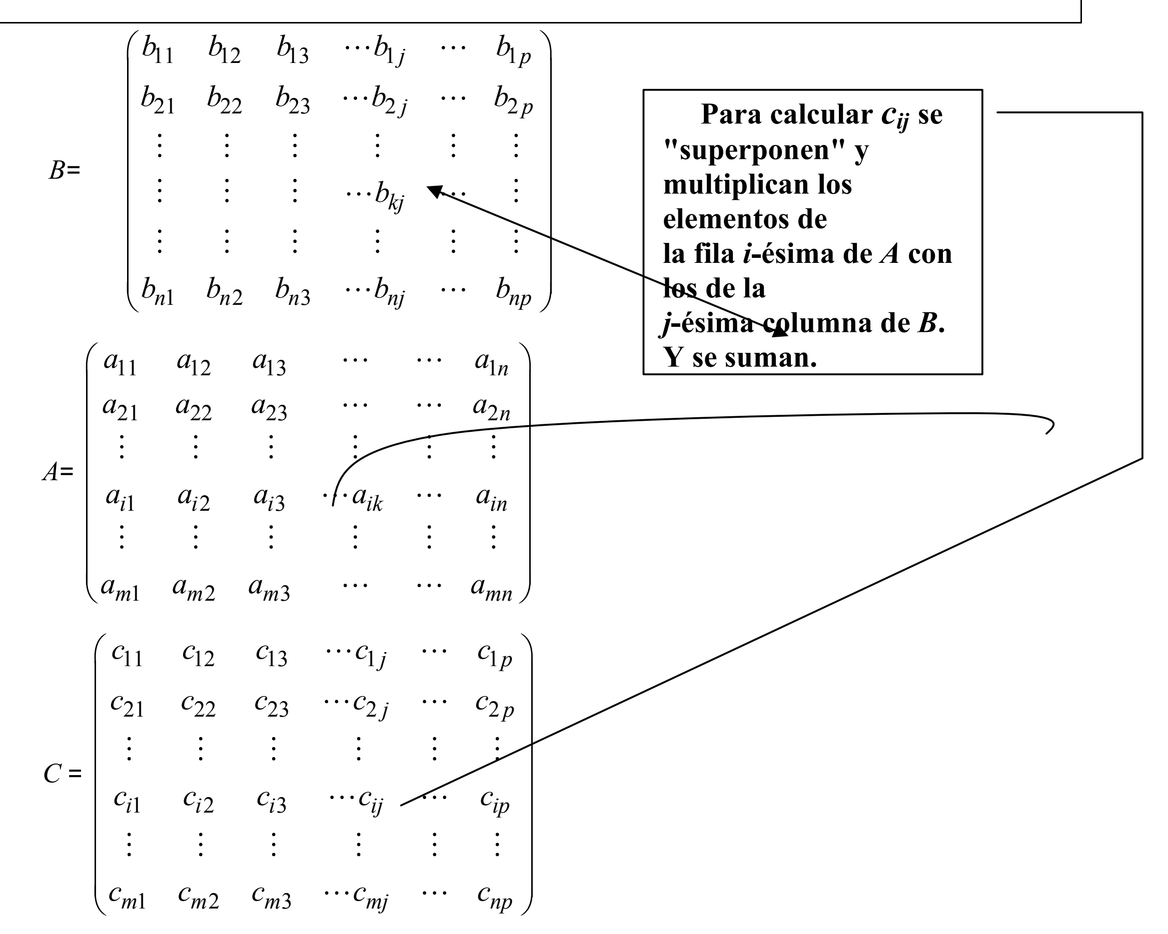
Esta operación es definible entre elementos de distintos conjuntos (muy particulares) y el producto resulta en otro conjunto.

Si $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ y $B=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ la matriz $C=A\,.B$

está definida por:

$C=(c_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le p}}$ tal que el elemento genérico es dado por:

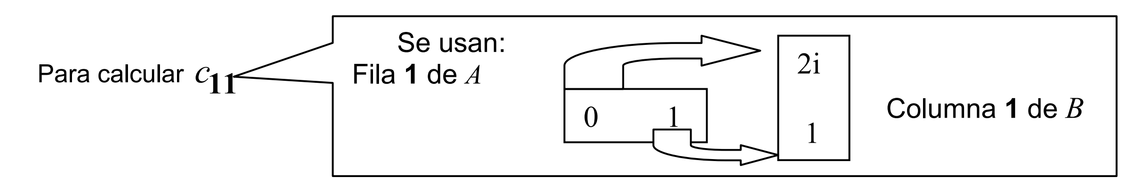
$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}$$



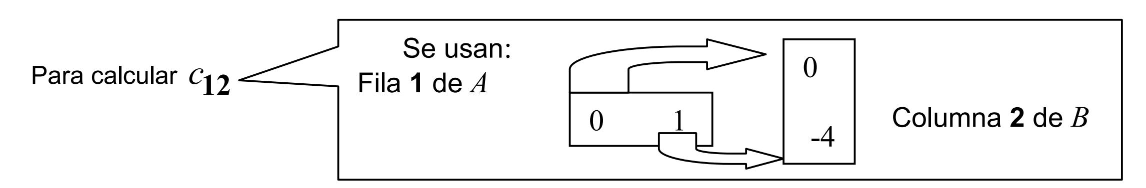
EJEMPLO 10.2.1

Calcular el producto de las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\3 & -2\\4 & 5\\0 & 6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2i & 0 & 3\\1 & -4 & -i\end{pmatrix}$

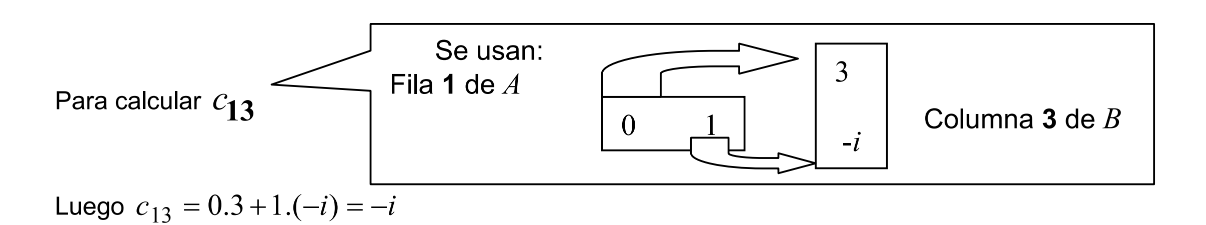
La matriz $A\in\mathbb{C}^{4\times 2}$ y $B\in\mathbb{C}^{2\times 3}$ por lo cual es posible calcular $C=A.B$ que es elemento de $\mathbb{C}^{4\times 3}$



Luego $c_{11} = 0.2i + 1.1 = 1$



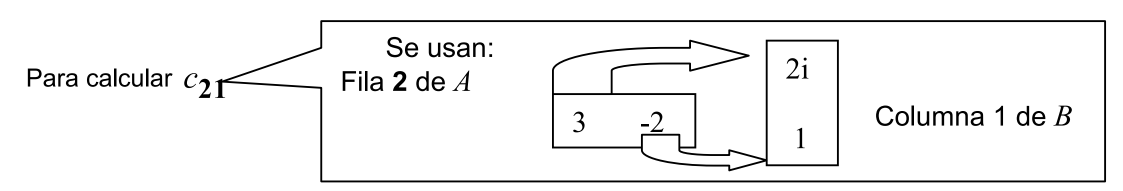
Luego $c_{12} = 0.0 + 1.(-4) = -4$



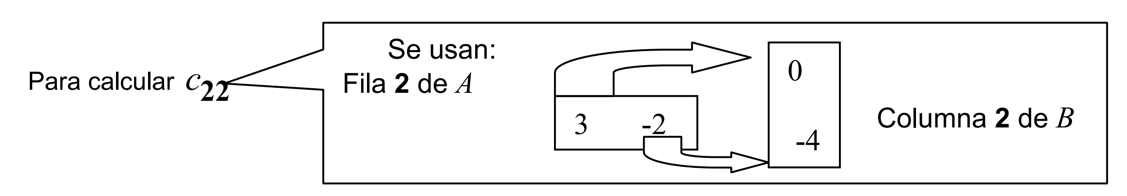
Luego $c_{13} = 0.3 + 1.(-i) = -i$

Por el momento se ha calculado la primera fila de *C.*

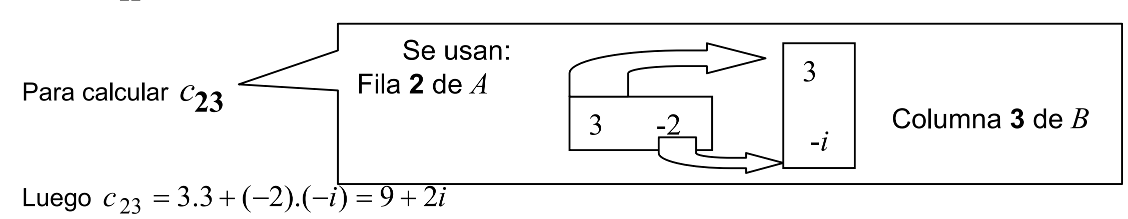
Para calcular la segunda fila de *C*, se trabaja con la segunda fila de *A* y con cada una de las columnas de *B*:



Luego $c_{21} = 3.2i + (-2).1 = -2 + 6i$

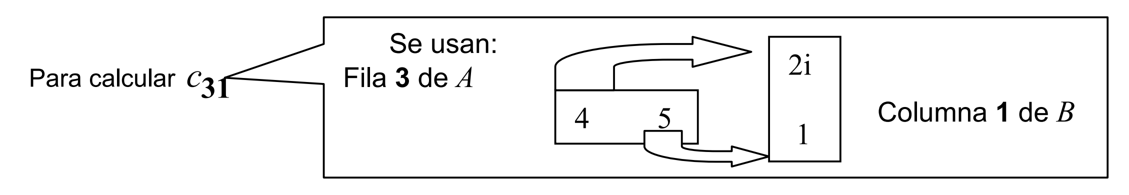


Luego $c_{22} = 3.0 + (-2).(-4) = 8$

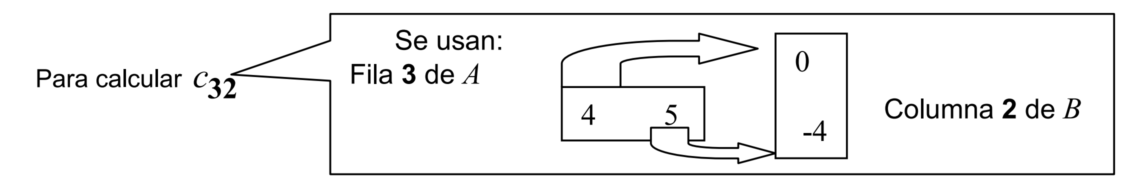


Luego $c_{23} = 3.3 + (-2).(-i) = 9 + 2i$

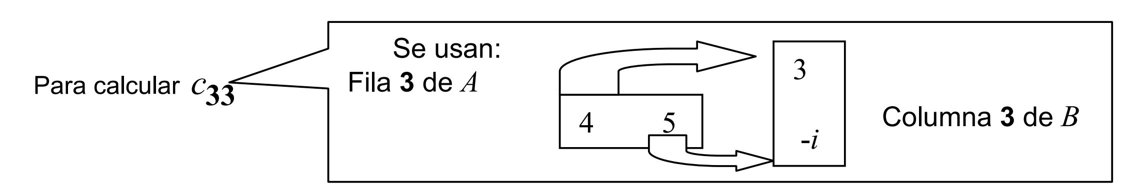
Por el momento se han calculado la primera y segunda fila de C.



Luego $c_{31} = 4.2i + 5.1 = 5 + 8i$

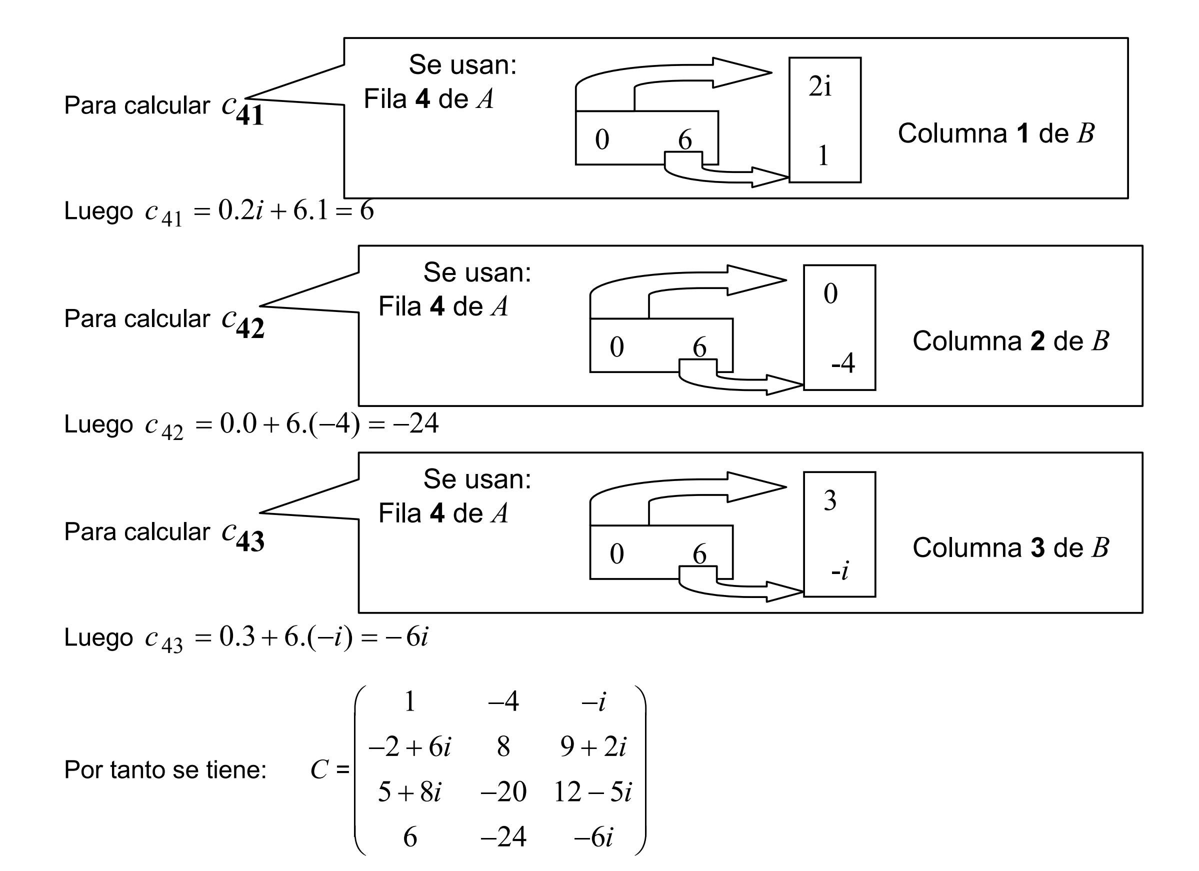


Luego $c_{32} = 4.0 + 5.(-4) = -20$



Luego $c_{33} = 4.3 + 5.(-i) = 12 - 5i$

Para calcular la cuarta fila de C, se usa la cuarta fila de A y las columnas de B:



Luego $c_{41} = 0.2i + 6.1 = 6$

Luego $c_{42} = 0.0 + 6.(-4) = -24$

Luego $c_{43} = 0.3 + 6.(-i) = -6i$

Por tanto se tiene: $C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -i \\ -2+6i & 8 & 9+2i \\ 5+8i & -20 & 12-5i \\ 6 & -24 & -6i \end{pmatrix}$

¿Es posible multiplicar B por A? Como $A \in \mathbb{C}^{4\times 2}$ y $B \in \mathbb{C}^{2\times 3}$ el número de columnas de B (3) es distinto del número de filas de A (4), luego *no está definida* esa multiplicación.

Por esta observación podemos concluir que **el producto de matrices NO es conmutativo**.

Cuando como en esta situación no es posible realizar la multiplicación entre dos matrices se dice que ellas **no son multiplicables**.

En el caso que la multiplicación sea posible se dice que las matrices **son multiplicables**.

EJEMPLO 10.2.2

Sean $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Por ser ambas 2x2, es posible calcular $A.B$ y $B.A$

$$A.B = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.3+(-4).(-2) & 6.1+(-4).4 \\ 2.3+8.(-2) & 2.1+8.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & -10 \\ -10 & 34 \end{pmatrix}$$

$$B.A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.6+1.2 & 3.(-4)+1.8 \\ -2.6+4.2 & -2.(-4)+4.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -4 \\ -4 & 40 \end{pmatrix}$$

Como se observa están definidos $A.B$ y $B.A$ pero $A.B \neq B.A$.

"El orden de los factores altera el producto" chau refrán….



EJERCICIO 10.2.3

Dadas A y A^t cualesquiera, ¿es calculable $A.\ A^t$?

a) Dadas A y A^t cualesquiera, ¿es calculable $A^t.A$?

b) Verifique lo afirmado en a) y b) para las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2+i \\ 0 \\ \frac{i}{3} \\ -4 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 10.2.4:

a) Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3+i\\ 0 & 1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 2+i & -1-i\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}$$

Calcular $A.(B+C)$ y $A.B+A.C$. Qué observa?

Cómo llamaría a lo que observa?

b) Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -5 & 1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$ Calcular $A.B$, ¿ que observa???

c) Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0 & 0\\ -1 & 5 & 0 & 3-i\\ 1+i & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$ Calcular $A.B$, ¿que observa???

d) Demostrar: sean $A\in K^{m\times n}$ y $B\in K^{n\times p}$, si A tiene una fila nula entonces $A.B$ tiene una fila nula para toda B y si B tiene una columna nula entonces $A.B$ tiene una columna nula cualquiera sea A.

❋Siempre que los productos y las sumas estén definidos se satisface:

$$A.(B+C) = A.B + A.C$$

es decir, **la multiplicación de matrices es distributiva en la suma.** ¡Demostrarlo!

EJERCICIO 10.2.5

a) Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -4 & 3i & 0\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -i & 2+i\\ 3 & 0\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}4 & 0 & 8 & -1\\ 6 & 7 & 2 & 0\end{pmatrix}$

Verifique que $A.(B.C) = (A.B).C$

Es decir vale en este ejemplo y también en general la **asociatividad de la multiplicación de matrices.**

b) Demostrar que para cualquier terna de matrices multiplicables vale: $A.(B.C) = (A.B).C$

EJEMPLO 10.2.6

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$$A.B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2 + (-1).4 & 2.0 + (-1).0 \\ -6.2 + 3.4 & -6.0 + 3.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¡Un producto de matrices puede dar la matriz nula sin que los factores lo sean!



Sean $C = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$$C.B = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -12 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.2 + (-4).4 & 8.0 + (-4).0 \\ -12.2 + 6.4 & -12.0 + 6.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Atención! $\quad A.B = C.B$ con B NO nula y $A \neq C$

Este ejemplo ilustra claramente que el producto entre matrices es MUY distinto a los productos definidos entre los objetos de los conjuntos numéricos o de polinomios que seguramente son los ejemplos que el alumno conoce. Hay otros ejemplos que también sorprenden a los no matemáticos.

Se verá seguidamente una propiedad del producto de matrices que SI es similar a una propiedad del producto de los conjuntos numéricos o de polinomios:

EJERCICIO 10.2.7

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 3i & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -i & 2+i \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular *A*. I_3 e I_3 .*A*. ¿Qué observa?

b) Calcular *B*. I_2 e I_3 .*B*. ¿Qué observa?

Porqué piensa que se llama **matriz identidad de orden *n*** a la matriz escalar n x n , con los únicos elementos no nulos están en la diagonal y ellos son 1:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (e_{i\,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \quad \text{tal que} \quad e_{i\,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \ne j \end{cases}$$

Cuando se desprende del contexto es usual no poner el subíndice que indica el orden de la identidad.

EJERCICIO 10.2.8

a) Probar que si $A \in K^{m \times n}$ entonces $A.I_n = A = I_m.A$

b) Probar que si $A \in K^{n \times n}$ entonces $A.I_n = A = I_n.A$

c) ¿Cuánto vale $I_n.I_n$, para cualquier orden n?

Vamos a ayudar con a):

Sea $A \in K^{m \times n}$ y sea $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (e_{i\,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ con $e_{i\,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \ne j \end{cases}$

Sea C = $A.I_n = \left(c_{i\,j}\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ tal que cada elemento genérico:

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.e_{kj}$, analizando la definición de la identidad y de la sumatoria, es de observar que el índice que varía en la sumatoria es el índice de la columna de los elementos de A y el de la fila de I_n , por lo tanto los elementos que aporta en esta suma la matriz identidad son todos nulos salvo el que se encuentra en la diagonal, es decir que el índice de fila es igual al de columna. Como el que varia es k, debe ser $k = j$ por lo cual

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.e_{kj} = a_{i\,j}.e_{j\,j} = a_{i\,j}.1 = a_{i\,j}.$$

Por tanto hemos comprobado que el elemento genérico de C es igual al elemento de genérico de A, es decir $A.I_n = A$.

Le queda demostrar la otra igualdad: $I_m.A = A$, es similar!!!!

EJERCICIO 10.2.9

a) Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 3i & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -i & 2+i \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calcular $E.\,A$ y $E\,.B$.

b) ¿Qué observa en lo hallado en a)? ¿Qué nombre se ha puesto a las matrices como E ? ¿le queda claro el porqué?

EJERCICIO 10.2.10

Considere el conjunto $K^{n \times n}$.

a) ¿Es posible definir la suma entre dos de sus elementos?

b) ¿Qué propiedades tiene esa operación? Haga una lista.

c) ¿Es posible definir la multiplicación entre dos elementos cualesquiera del conjunto?

d) ¿Qué propiedades tiene esa operación? Haga una lista.

e) Piense en todos los conjuntos que conoce que tienen definidas en ellos dos operaciones con las mismas propiedades que la suma y la multiplicación de matrices. Diga cuales son.

¿Recuerda cómo se llama esa estructura algebraica?



3. La Potenciación de Matrices

Al tener definida la multiplicación entre matrices es natural generalizar convenientemente la operación de potencia.

Tiene la misma limitación en su definición como en los números y en los polinomios, la potencia de exponente 0 del elemento nulo no está definida, en la teoría de matrices tampoco.

Para una matriz $A \in K^{n \times n} \wedge A \neq O_{n \times n}$ y $k \in \mathbb{N}$ se define

$$A^k = \begin{cases} I_n & \text{si} \quad k = 0 \\ A.A^{k-1} & \text{si} \quad k \geq 1 \end{cases}$$

Si $A = O_{n \times n}, \quad k \geq 1, \quad A^k = A$,

es decir ${O_{n \times n}}^k = O_{n \times n} \qquad \text{para} \quad k \in \mathbb{N} - \{0\}$

¿Por qué A tiene que ser cuadrada para definir la potencia de A?



EJERCICIO 10.3.1

Sean $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 4 & -2 & 8\\ -2 & 3 & 10\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 4 & -3\\ 9 & -2 & 5\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

a) Calcular A^2, A^3, B^2, B^4

b) Comprobar que $A.B \neq B.A$

c) Verificar que $(A+B).(A-B) \neq A^2 - B^2$

d) Analizar que $(A.B)^2 \neq A^2.B^2$

e) Comprobar que $(A+B)^2 \neq A^2 + 2.A.B + B^2$

EJERCICIO 10.3.2

a) Compruebe con las matrices

$A=\begin{pmatrix}2 & 3i\\ 1-i & 0\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}7 & i\\ 0 & 2-i\end{pmatrix}$ $\quad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ las siguientes igualdades:

$i)$ $A.(3.B)=3.A.B$ $\qquad ii)$ $A.B^2=(A.B).B$

$iii)$ $A.(B.A)=(A.B).A$ $\qquad iv)$ $(4.I).A=4.A$ $\qquad v)$ $I^2=I$

b) Conjeture si valen en general (para matrices cualesquiera) las igualdades anteriores. ¿Cómo las enunciaría?



EJERCICIO 10.3.3

Dadas las matrices

$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -4 & 3i & 0\\ 1 & 3 & -2\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -i & 2+i\\ 3 & 0\end{pmatrix}$

Compruebe las siguientes igualdades:

a) $\left(A^t\right)^2=\left(A^2\right)^t$ $\qquad$ b) $\left(A.B\right)^t=B^t.A^t$

Para las matrices dadas podría realizar $A^t.B^t$? Justifique.

EJERCICIO 10.3.4

a) Sea $I\in\mathbb{C}^{2\times 2}$ demostrar por inducción que para todo $n\in\mathbb{N}$ entonces $I^n=I$

b) Vale para identidades de cualquier orden lo demostrado en a)?

c) Vale para identidades $I\in K^{n\times n}$? Justifique.



4. Matrices Invertibles

Al ver que existe una matriz identidad la pregunta que podría plantearse naturalmente es:

¿Será que para toda matriz no nula existe otra matriz que multiplicadas entre sí el producto es la identidad?

Claramente hay que ser muy cuidadoso. Qué se entiende por "*multiplicadas entre sí*", pues ya se ha destacado que el producto NO siempre está definido. Es factible que en un determinado orden si esté definido, pero no en el otro. Un buen remedio para ello es considerar un conjunto de matrices cuadradas, pero aún allí no es conmutativa la multiplicación.

EJEMPLO 10.4.1

Sea $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4i & 1 \end{pmatrix}$ y sea $B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$ Calculemos $A.B$ y $B.A$:

$$A.B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4i & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -2i & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2.\frac{1}{2}+0.(-2i) & 2.0+01 \\ 4i.\frac{1}{2}+1.(-2i) & 4i.0+1.1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B.A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -2i & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4i & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}.2+0.4i & \frac{1}{2}.0+01 \\ -2i.2+1.4i & -2i.0+1.1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para este par de matrices vale que $A.B = B.A=I$

Dada $A\in K^{n\times n}$ se dice **invertible** si existe $B\in K^{n\times n}$ tal que $A.B.=B.A=I$ **(*)**

B se dice **inversa de *A***

Una tal matriz B que cumpla **(*) es única.** Por lo cual se anota A^{-1}. (Ya lo probaremos…)

EJEMPLO 10.4.2

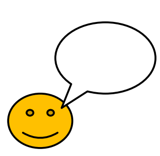
Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ¿existe B tal que $A.\ B = B.\ A = I$?

Para que ambas multiplicaciones estén definidas también B debe ser 2x2.

Se considera por lo cual $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y se pretende demostrar que $B\in\mathbb{C}^{2\times 2}$, cumpliendo que conmute con A y que ese producto sea la identidad:

$$A.B=\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+ic & b+id\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B.A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & ai\\ c & ci\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$



Claramente esto es imposible. (¿De acuerdo??)



Por lo tanto no toda matriz no nula de $\mathbb{C}^{2\times 2}$ es invertible.

Un poco más adelante se encontrarán condiciones para la existencia de inversa de matrices y métodos para calcular.

EJEMPLO 10.4.3

Demostrar que dada $A \in K^{n\times n}$ si existe una matriz que cumple **(*)**, ésta es única.

Por lo tanto si se verifica que para una matriz A hay una matriz B que cumple **(*)**, ésta es **la inversa de A.**

Para demostrar que hay solamente una matriz que cumple (*), supondremos que hay dos y demostraremos que son iguales:

Dada $A \in K^{n\times n}$, sean B y C tales que $A.B = B.A = I$ (*) y también $A.C = C.A = I$ (*)'

Usando que $B = B.\ I$, sea $B = B.\ I = B.\ (A.C)$ por (*)', la multiplicación de matrices es asociativa, por tanto:

$B = B.\ (A.C) = (B.\ A).C$ y por (*) se tiene:

$B = (B.\ A).C = I.C = C,$ por propiedad de la identidad.

Luego, es lo que queríamos demostrar que hay una única matriz que verifica (*).

Observación: Es demostrable (con herramientas de Algebra Lineal) que dada $A \in K^{n\times n}$ si existe $B \in K^{n\times n}$ tal que $A.\ B = I$, entonces B es la inversa de A. (Es decir hay que comprobar solamente una sola parte de la definición)

EJERCICIO 10.4.4

a) Dado $n > 0$, sea I la identidad de orden n, ¿es I invertible?

b) Cuál es su inversa?

c) Si $A \in K^{n\times n}$ es invertible, ¿cuál es la inversa de A^{-1} ?

EJERCICIO 10.4.5

a) Probar que si $A \in K^{n\times n}$ y $B \in K^{n\times n}$ son invertibles entonces $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

b) Demuestre la generalización de a) para un número cualquiera de matrices, esto es:

si $A_j \in K^{n\times n}$, para $1 \le j \le h$ son invertibles entonces $\left(\prod_{j=1}^{h} A_j\right)^{-1} = \prod_{j=1}^{h} A_{h-j+1}^{-1}$

c) Probar que si $A \in K^{n\times n}$ es invertible entonces A^t es invertible y $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$

Solución de a):

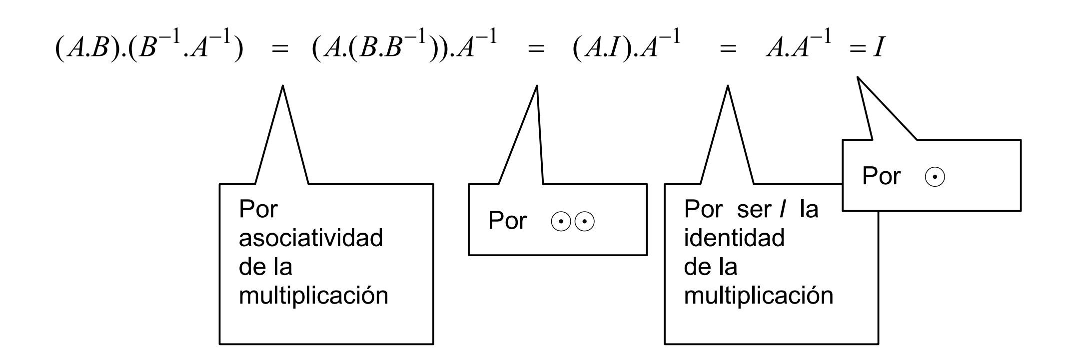
Si A y B son invertibles entonces existen A^{-1} y B^{-1} tales que:

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I \qquad \odot$$

$$B.B^{-1} = B^{-1}.B = I \qquad \odot\odot$$

Si se prueba que $B^{-1}.A^{-1}$ opera como la inversa de $A.B$ (es decir, cumple **(*)** de la definición) ella es su inversa por ejercicio y observación anterior.

$$(A.B).(B^{-1}.A^{-1}) = (A.(B.B^{-1})).A^{-1} = (A.I).A^{-1} = A.A^{-1} = I$$



Queda para justificar que también $(B^{-1}A^{-1}).(AB) = I$. (Hágalo para practicar, pues por la observación que con Algebra Lineal es suficiente probar una sola igualdad, y ya está)

EJERCICIO 10.4.6

Sean $A \in K^{n\times n}, B \in K^{n\times n}$, $C \in K^{n\times n}$ y O es la matriz nula de $K^{n\times n}$.

Si A es invertible entonces:

a) $A.B = O$ entonces $B = O$

b) $C.A = O$ entonces $C = O$

c) $A.B = A.C$ entonces $B = C$

d) Observar que para $A \in K^{n\times n}$, si A es invertible

Como puede generalizar las igualdades demostradas en a), b) y c). Es decir pensar en que conjunto de matrices pueden estar en cada parte B y C.

Lo ayudaremos en b):

Sean $A \in K^{n\times n}$, $C \in K^{n\times n}$ y O es la matriz nula de $K^{n\times n}$.

Si A es invertible entonces:

$C.A = O = (o_{i\,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ tales que $o_{i\,j} = 0$ para todo i y para todo j de 1 a n

Por ser A invertible, $A.A^{-1} = I$, por lo tanto veremos como lo usamos:

$(C.A).A^{-1} = O.A^{-1}$ (no debe multiplicar a izquierda por la inversa de A, pues recordar que la multiplicación no es conmutativa)

Como el producto de matrices si es asociativo: $C.(A.A^{-1}) = O.A^{-1} = O$ la última igualdad se da por el EJERCICIO 10.2.4 parte d), y entonces $C.(A.A^{-1}) = C.I = C = O$.

CAPÍTULO 11
Sistemas de ecuaciones lineales

Se entiende que ya se saben resolver sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas. Se darán definiciones para generalizar ese proceder. Además se aplicarán las nociones estudiadas sobre las Matrices para justificar los métodos de resolución.

1. Definiciones básicas

Recordemos la forma de los sistemas con algunos ejemplos:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}.x - y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

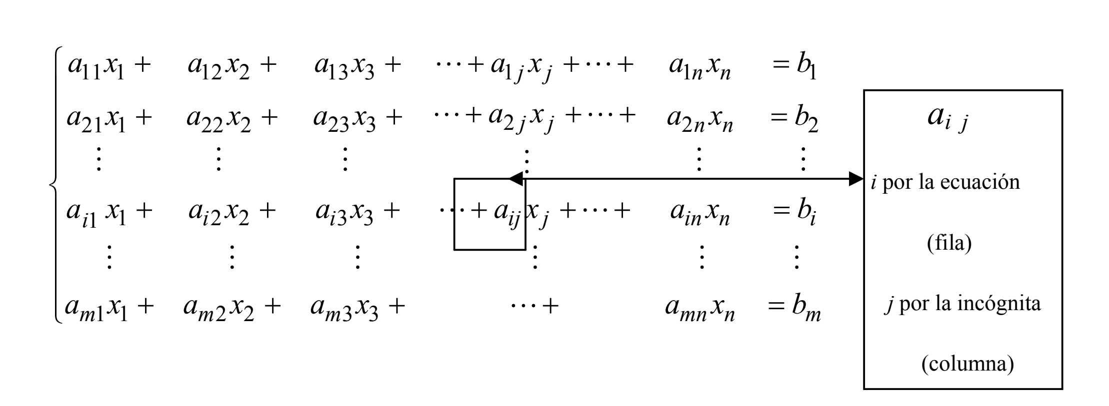
En estos sistemas se han representado las incógnitas por *x, y* y *x, y* y *z,* como es costumbre para los sistemas de pocas incógnitas.

Esta costumbre se basa en que un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede estar expresando la búsqueda de la intersección de dos rectas del plano y las coordenadas en el plano es habitual indicarlas por *x* e *y*.

Las ecuaciones lineales de tres variables con coeficientes reales son la expresión analítica de planos del espacio usual (el espacio euclídeo de tres dimensiones con sistema de referencia de coordenadas *x, y, z*). Sistemas de ecuaciones de ese tipo son interpretables como la búsqueda de la intersección de planos (tantos como ecuaciones).

Cada uno de los sistemas del ejemplo es interpretable geométricamente: el primero, determinar la intersección de dos rectas del plano y el segundo, determinar la intersección de dos planos.

Un **sistema de *m* ecuaciones con *n* incógnitas** es **lineal** cuando puede llevarse a la forma:



donde $x_1, \cdots, x_n$ son **las incógnitas** y $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{mn}, b_1, \cdots, b_m$ representan **elementos de *K*,** siendo K **un cuerpo conmutativo** (por lo general serán números racionales, reales, complejos ó los otros conocidos).

Los $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{mn}$ se llaman **coeficientes del sistema** y los $b_1, \cdots, b_m$ se llaman **términos independientes del sistema**.

➢ *¿Qué es solucionar un sistema de m ecuaciones con n incógnitas?*

Es hallar n valores $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$ de K tal que al sustituir con ellos las incógnitas (de igual subíndice) en el sistema, cada una de las ecuaciones se satisfaga, esto es las igualdades se verifiquen.

¿Será posible resolver todo sistema? ¿Cuántas n-uplas de K serán solución de un sistema dado? Estos son los puntos que se estudiarán. Para ello será muy útil lo estudiado de matrices.



Recordatorio

A continuación recordaremos el método se sumas y restas en sistemas 2 x 2 como introducción al conocido método eliminación de Gauss para sistemas generales de m ecuaciones con n incógnitas.

El **método de sumas y restas** se basa en dos observaciones.

•La primera es que si un par de números x^* e y^* verifican una ecuación, por ejemplo:

2 $x - y$ = 1, también verifican la nueva ecuación que resulta de multiplicar ambos miembros en la ecuación por un ***número distinto de cero***. Esto se debe a la monotonía de la multiplicación en K.

$a = b$
$a.c = b.c$

En el ejemplo, si la ecuación $2x - y = 1$ se multiplica por 2 resulta $2 \cdot (2x - y) = 2 \cdot 1$ es decir $4x - 2y = 2$. Compruébelo para $x^* = 1$ e $y^* = 1$

•La segunda observación es que si se tienen dos ecuaciones que son verificadas por dos números x^* e y^* se puede obtener una tercera ecuación verificada por ambos, sumando miembro a miembro (o restando) las dos ecuaciones iníciales. Esto se debe a la monotonía de la suma en K.

$a = b$
$c = d$
$a + c = b + d$

Por ejemplo si x^* e y^* verifican las ecuaciones del sistema

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 5y = -2 \end{cases}$$

restando miembro a miembro las ecuaciones resulta:

$$(x + y) - (2x + 5y) = 4 - (-2)$$

$-x - 4y = 6$ es la nueva ecuación que también verifican x^* e y^*.

Comprobarlo con $x^* = 22/3$ e $y^* = -10/3$ para las tres ecuaciones, las dos del sistema originalmente dado y esta nueva.

Naturalmente también se puede sumar miembro a miembro.

El **método de sumas y restas** consiste en modificar una de las ecuaciones usando la primera observación y sumar (o restar) miembro a miembro con la otra ecuación para obtener una nueva ecuación pero con una sola incógnita.

En el ejemplo: $\begin{cases} x - 5y = 4 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$

En el primer paso se elige una ecuación; en este caso (no es obligatorio) optamos por la primera: $x - 5y = 4$; de esta ecuación optamos por elegir la variable x (tampoco es obligatorio, podría ser la y). La idea es multiplicar ambos miembros de la ecuación elegida por un número que iguale los coeficientes de las x de las dos ecuaciones.

Como en la segunda ecuación el coeficiente de x es 3 y en la primera es 1, multiplicamos ambos miembros de la primera ecuación por 3.

La ecuación se transforma en: $3(x - 5y) = 3.4$

es decir $3x - 15y = 12$

Ahora se tiene un sistema con las dos ecuaciones

$$\begin{cases} 3x - 15y = 12 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$$

Hemos conseguido tener $3x$ en ambas ecuaciones. Restando miembro a miembro la segunda a la primera resulta:

$$(3x - 15y) - (3x + y) = 12 - 8$$

Tal como lo planeamos "desaparece" x de la primera ecuación

$0\,x - 15\,y - y = 4$ y resulta el sistema

$$\begin{cases} -16y = 4 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$$

De la primera ecuación es elemental hallar y^*:

$$y^* = -1/4$$

Para hallar el valor de x^* hacemos algo similar.

Recordemos las ecuaciones originales:

$$\begin{cases} x - 5y = 4 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$$

Multiplicando por 5 la segunda ecuación:

$$\begin{cases} x - 5y = 4 \\ 15x + 5y = 40 \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro la primera ecuación a la segunda, resulta:

$$\begin{cases} x - 5y = 4 \\ 16.x = 44 \end{cases}$$

es inmediato hallar x^* de la segunda: $x^* =$ 44/16 es decir $x^* =$ 11/ 4

Hemos hallado la solución del sistema, es el par de números $x^* = 11/4$ e $y^* = -1/4$

Otra situación es la de **infinitos pares que son solución**. Un ejemplo es el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Nótese que la segunda ecuación es la primera multiplicada por dos.

Es un sistema 2 x 2, pero en la práctica es como tener una ecuación ya que ambas imponen iguales condiciones a las variables salvo el aspecto formal. Ambas dan la misma información.

Si aplicamos sumas y restas para solucionarlo, multiplicamos por 2 la primera ecuación y restamos miembro a miembro ésta a la segunda:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ (2x + 2y)-(2x + 2y)= 2 - 2 \end{cases}$$

es decir $\begin{cases} 2.x + 2.y = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$

En este caso son solución todos los pares de números reales que sumen 1.

Es imprescindible determinar la intención que se persigue al resolver un sistema, ¿importan las soluciones complejas en general, solamente las reales o del K en que están los coeficientes? Esto estará claro en el contexto del planteo y resolución del sistema.

Analice la diferencia en el ejemplo anterior. Ayúdese representando en cada caso el conjunto solución (soluciones reales o soluciones complejas).

Hay sistemas que presentan la situación especial de **ausencia de solución**. Un sistema que resulta sin solución, por simple observación es:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

No es posible que dos números sumen 1 y 2 simultáneamente.

Aplicando sumas y restas, al pretender eliminar una de las incógnitas, restando miembro a miembro la primera ecuación a la segunda se llega a:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 0 = 1 \qquad \text{(es una igualdad falsa)} \end{cases}$$

Luego, **ningún par de números puede verificar simultáneamente ambas igualdades.**

La interpretación geométrica subyacente

Cada ecuación de un sistema lineal de dos ecuaciones con coeficientes reales y dos incógnitas representa una recta.

Resolver el sistema significa hallar un par de números reales que cumplan las dos ecuaciones, es decir las coordenadas de un punto del plano que pertenezca a las dos rectas (que esté en la intersección).

¿Cuál es la situación de dos rectas del plano?

Dos rectas pueden ser paralelas y distintas, luego no habrá solución.

Dos rectas pueden ser paralelas e iguales, luego habrá más de una solución (las coordenadas de todo punto que esté sobre la recta).

Dos rectas pueden cortarse, luego habrá solución única (las coordenadas del punto de intersección).

EJERCICIO 11.1.1

Resuelva e interprete geométricamente. Represente geométricamente las ecuaciones.

1. $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x = 3 + y \\ 2x - 3 = y \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 4y = 2 \\ x - 8y = 1 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ -6x + 2y = 0 \end{cases}$

EJERCICIO 11.1.2

Piense en tres planos del espacio usual. ¿Cuáles son las posibles posiciones relativas?

Qué puede decir de las posibilidades al solucionar un sistema lineal 3 x 3 con coeficientes reales.

- ***Algunos problemas sencillos cuya resolución lleva a plantear sistemas de ecuaciones***.

EJERCICIO 11.1.3

Resolver los siguientes problemas. Plantear el sistema y resolver por sumas y restas:

1. Un par de zapatos y un pullover cuestan $ 98. Si el pullover cuesta $16 más que los zapatos, ¿cuánto cuesta el pullover?
2. Un vendedor de artículos de pesca vende 2 riles y 5 cañas en $270. Al día siguiente, vende 4 riles y 2 cañas en $220. ¿Cuál es el precio de cada artículo?
3. Un avión pequeño puede cargar 950 kilos de equipaje distribuidos en dos compartimentos. En un vuelo el avión va totalmente cargado y un compartimento lleva 150 kilos más que el otro. ¿Cuánto equipaje hay en cada uno?
4. Una parte de $12000 se invirtió al 6% de interés y el resto al 7,5%. Si los ingresos anuales por dichas inversiones fueron de $810, ¿cuánto se invirtió a cada tasa?
5. Un campesino tiene que alimentar los animales que siguen una dieta estricta con dos mezclas alimenticias.

Mezcla	Proteínas	Carbohidratos
Mezcla A	15%	5%
Mezcla B	12%	9%

Cada animal debe recibir 15 gramos de proteínas y 7,5 de carbohidratos. ¿Cuántos gramos debe usar de cada mezcla para lograrlo?

6. La edad del padre es el triple de la del hijo. Dentro de 5 años el padre será 30 años mayor que el hijo. ¿Cuantos años tienen?
7. La gráfica de $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ pasa por los puntos $(1, k_1)$, $(2, k_2)$, $(3, k_3)$.

Hallar *a, b* y *c* para los casos $k_1 = -2$ $k_2 = 1$ $k_3 = 6$

$k_1 = 8$ $k_2 = -5$ $k_3 = 4$

2. Los sistemas con otra mirada: *MATRICIAL…*

Se verá algún ejemplo para comprender el porqué del estudio de matrices.

¡Veamos!

Dado

$$\begin{cases} x - 5y = 4 \\ 3x + y = 8 \end{cases} \quad \text{(S)}$$

se lo puede representar como la siguiente igualdad matricial:

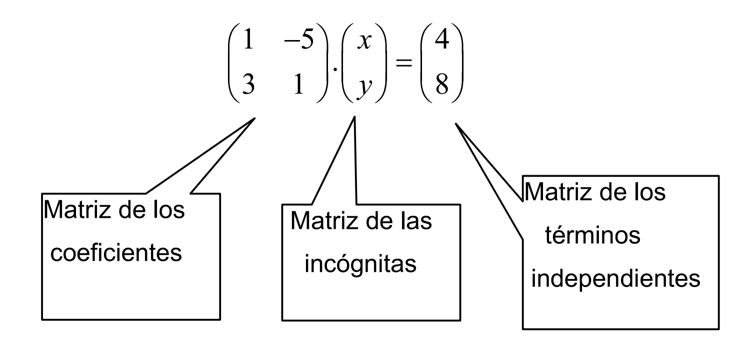
$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \text{(M)}$$

pues el producto del primer miembro es la matriz 2 x 1:

$$\begin{pmatrix} 1x + (-5)y \\ 3x + 1y \end{pmatrix}$$

y la igualdad matricial planteada en (M) (dos matrices son iguales si son iguales elemento a elemento....) conduce a (S).

Es así que:



La matriz de los coeficientes se designará por A, la matriz de las incógnitas por X y la de los términos independientes por B.

Los elementos de la primera columna de A son los coeficientes de la primera incógnita y la segunda columna de A tiene los coeficientes de la segunda incógnita.

El elemento de la fila 1 de B es el término independiente de la primera ecuación y el elemento de la fila 2 de B es el término independiente de la segunda ecuación.

Se tiene entonces:

$$A.\, X = B$$

Esta vinculación, destacada para este caso particular, que se extiende naturalmente a cualquier sistema es causal de que el cálculo matricial sea aplicable en los sistemas lineales.

EJERCICIO 11.2.1

Escribir un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas como una igualdad matricial. Justifique porqué son equivalentes ambas formas.

Las operaciones realizadas para resolver el sistema del ejemplo por sumas y restas se interpretarán matricialmente:

En **(S)** | En **(M)**

Multiplicar la 1er. ecuación por 3: | Multiplicar la 1er. fila de A y de B por 3

$$\begin{cases} 3x - 15y = 12 \\ 3x + y = 8 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 3.1 & 3.(-5) \\ 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Restar la 2da. ec. a la 1er. ec.: | Restar la 2da. fila a la 1er. fila de A y de B

$$\begin{cases} -16y = 4 \\ 3x + y = 8 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 0 & -16 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Obtener una matriz con un único elemento no nulo en una de sus filas, al interpretarlo como sistema permite encontrar el valor de la incógnita que se corresponde con la columna que ese elemento ocupa. En el ejemplo el elemento no nulo es de posición fila 1 columna 2, por lo cual permite hallar y^* que es la 2da. incógnita.

¿Qué se hizo para hallar x^* ?

En **(S)** | En **(M)**

Multiplicar la 2da. ecuación por 5 | Multiplicar la 2da. fila de A y de B por 5

$$\begin{cases} x - 5y = 4 \\ 15x + 5y = 40 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5.3 & 5.1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5.8 \end{pmatrix}$$

Sumar la 1er. ec. a la 2da. ec. | Sumar la 1ra. fila a la 2da. fila de A y de B

$$\begin{cases} x - 5y = 4 \\ 16x = 44 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 16 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 44 \end{pmatrix}$$

Y a partir de esta igualdad matricial es posible determinar x^*.

Observar que la matriz X no se altera en la manipulación de las ecuaciones. Además las mismas operaciones sobre los elementos de las filas de la matriz de los coeficientes se realizan sobre esas mismas filas en la matriz de los términos independientes. Se parte de matrices A y de B y luego de realizadas las operaciones se llega a otras matrices del mismo tipo, pero seguramente distintas. Las soluciones del último sistema se aceptan como soluciones del

sistema original, basándose en las observaciones iniciales de monotonía de suma y multiplicación.

Las operaciones realizadas sobre estas matrices se pueden sistematizar. Se tiene por objetivo encontrar un método para solucionar sistemas, ello parece alcanzable al quedar con un único elemento no nulo por fila y columna de la matriz de los coeficientes. En ese caso habrá solución única. ¿Será siempre posible?

3. Operaciones elementales sobre las filas de una matriz

Examinando el ejemplo anterior:

¿Qué tipo de operaciones se han realizado para lograr el ideal de un único elemento no nulo por fila y columna de la matriz de los coeficientes?

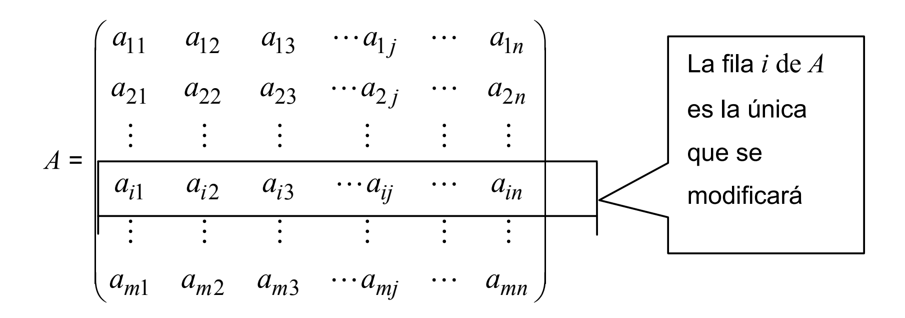
Se multiplicaron filas (o ecuaciones) por números no nulos y se sumó una fila (o ecuación) a otra.

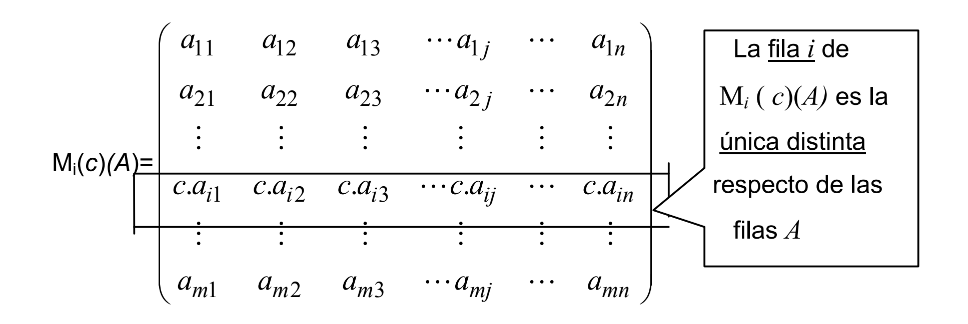
Para sistematizar se realizarán más definiciones.

Se llaman **operaciones elementales sobre las filas de una matriz** a los siguientes tres tipos de operaciones sobre las filas de una matriz A m x n:

1. **Multiplicar una fila de A por una constante c no nula.**

Para fijar ideas, la fila i de A se multiplica por c, $c \neq 0$, la matriz resultado de esta operación se indicará $M_i(c)(A)$





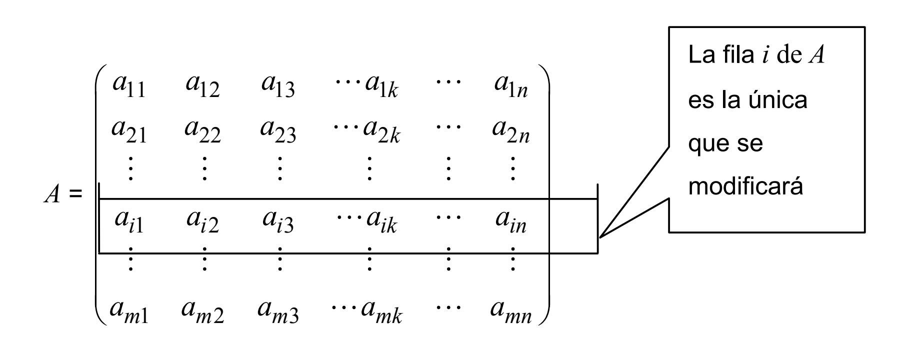
Dada $A = \left(a_{s\,p}\right)_{\substack{1\le s\le m\\ 1\le p\le n}}$ se obtiene $M_i(c)(A) = \left(a^*_{s\,p}\right)_{\substack{1\le s\le m\\ 1\le p\le n}}$

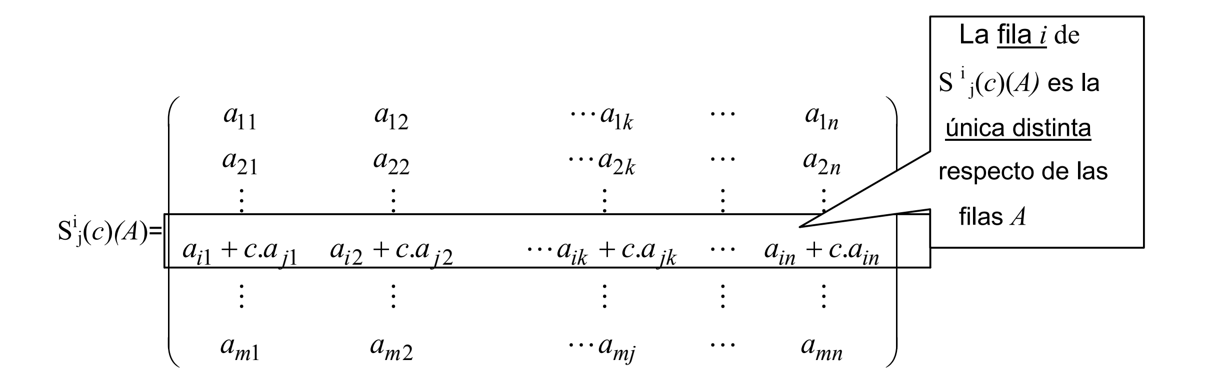
con $$a^*_{s\,p} = \begin{cases} c.a_{i\,p} & \text{si } s = i \\ a_{s\,p} & \text{si } s \neq i \end{cases}$$

¿Qué puede afirmar si c =1? 

2. Sumar a una fila de A un múltiplo de otra fila de A

Para fijar ideas, a la fila i de A se suma la fila j multiplicada por c, la nueva matriz resultado de esta operación se indica $S^i_j(c)(A)$.





Dada $A = \left(a_{s\,p}\right)_{\substack{1\le s\le m \\ 1\le p\le n}}$ se obtiene $S^{i}{}_{j}(c)(A) = \left(a^{*}_{s\,p}\right)_{\substack{1\le s\le m \\ 1\le p\le n}}$

con $a^{*}_{s\,p} = \begin{cases} a_{i\,p} + c.a_{j\,p} & \text{si } s = i \\ a_{s\,p} & \text{si } s \ne i \end{cases}$

Para pensar:

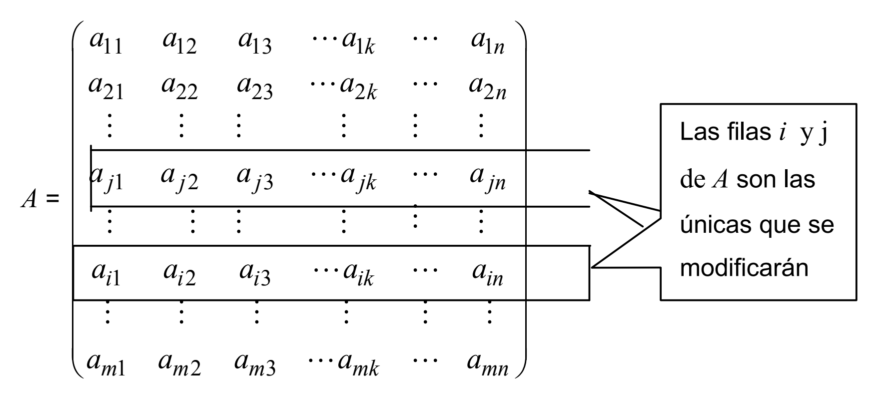
Para que ésta operación sea interesante al menos A debe tener 2 filas, sino ¿en que se transforma? ¿Con qué limitaciones?

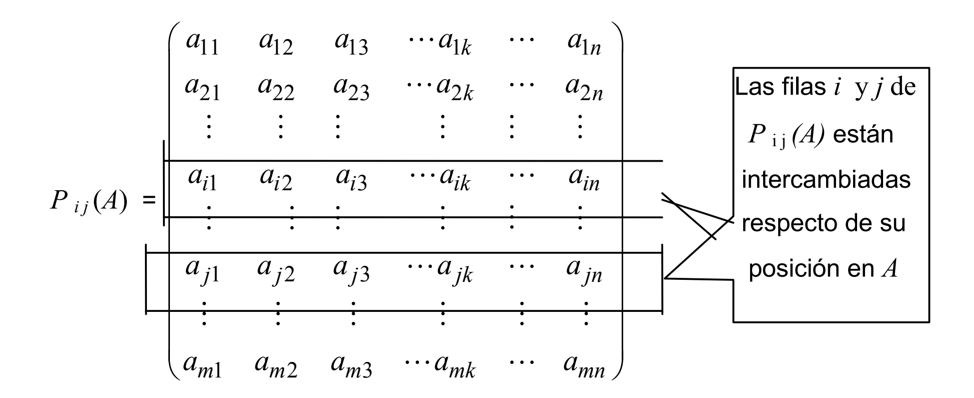
¿Qué ocurre si c = 0?

3. Intercambiar dos filas de A

Para fijar ideas, la fila i de A se intercambia con la fila j de A, el resultado de esto se indicará $P_{i\,j}(A)$

Esta operación está definida si el número de filas de A es mayor que 1. ¿Por qué?





Dada $A = \left(a_{s\,p}\right)_{\substack{1\le s\le m\\1\le p\le n}}$ se obtiene $P_{i\,j}(A) = \left(a^{*}_{s\,p}\right)_{\substack{1\le s\le m\\1\le p\le n}}$

con $$a^{*}_{sp} = \begin{cases} a_{ip} & \text{si } s = j \\ a_{jp} & \text{si } s = i \\ a_{sp} & \text{si } s \ne i \wedge s \ne j \end{cases}$$

En el ejemplo desarrollado para resolver el sistema no se usó operación de tipo 3 pero son útiles en otros casos.

EJEMPLO 11.3.1

Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix}$, calculemos $P_{24}(A)$, $S^5{}_3(7)(A)$ y $M_1(-3)(A)$

Al calcular $P_{2\,4}(A)$, el resultado de la operación es una matriz del mismo tipo que A, donde todas sus filas coinciden con las de A salvo la 2 y 4 que resultan intercambiadas:

$$P_{24}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ -3 & 1 & 7 \\ -4 & 5 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

Al calcular $S^5{}_3(7)(A)$, resulta de la operación una matriz del mismo tipo que A, donde todas sus filas coinciden con las de A salvo la 5, cuyos elementos son para cada columna, la suma del elemento de la fila 5 más 7 multiplicado por el elemento de la fila 3:

$$S^5{}_3(7)(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2+7.(-3) & -7+7.1 & -1+7.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 6 \\ -19 & 0 & 48 \end{pmatrix}$$

Calculando $M_1(-3)(A)$ resulta una matriz del mismo tipo que A, donde todas sus filas coinciden con las de A salvo la fila 1, cuyos elementos son el resultado de multiplicar por -3 los de la fila 1 de A:

$$M_1(-3)(A) = \begin{pmatrix} -3.2 & -3.0 & -3.3 \\ -4 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -9 \\ -4 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Matrices elementales

Dada la matriz I_m identidad de orden m es posible realizar sobre ella operaciones elementales sobre sus filas.

Si se realiza una única operación elemental sobre las filas de I_m se obtiene una **matriz elemental.**

¡Estas matrices son importantes en las justificaciones del tema de sistemas de ecuaciones! Ya que la multiplicación matricial esta asociada a resolución de sistemas.

Por la definición, las matrices elementales son m x m. ¿Por qué? 

Dependen sobre que identidad se trabaje!!! Cual es el tipo de la elemental…..

EJEMPLO 11.4.1

Sea $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Para $P_{13}(I_4)$ se deben intercambiar las filas 1 y 3 de $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ¡Intercambiar!

Resulta: $P_{13}(I_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Observar que esta matriz tiene todas sus filas no nulas.

Todos los elementos no nulos son 1. En las filas de la identidad no afectadas por la operación sus elementos no nulos están en la diagonal (obvio!) .

El "1" de la primera fila "se desplazó" a la tercera fila por la misma columna y el "1"de la tercera fila hizo lo propio a la primera fila.

La descripción formal los elementos de la matriz

$$P_{13}(I_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (e_{sp})_{\substack{1\le s\le 4 \\ 1\le p\le 4}}$$

Es dado por $e_{sp} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad s = p \wedge s \neq 1 \wedge s \neq 3 \\ 1 & \text{si} \quad s = 1 \wedge p = 3 \\ 1 & \text{si} \quad s = 3 \wedge p = 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

¿Cómo es la matriz que se obtiene multiplicando una fila de la identidad por una constante no nula?

Si calculamos:

$M_2(-1+i)(I_4)$ se debe multiplicar por $-1+i$ la fila 2 de $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Multiplicar por *-1+i*

$$M_2(-1+i)(I_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observar que esta matriz tiene también todas sus filas no nulas.

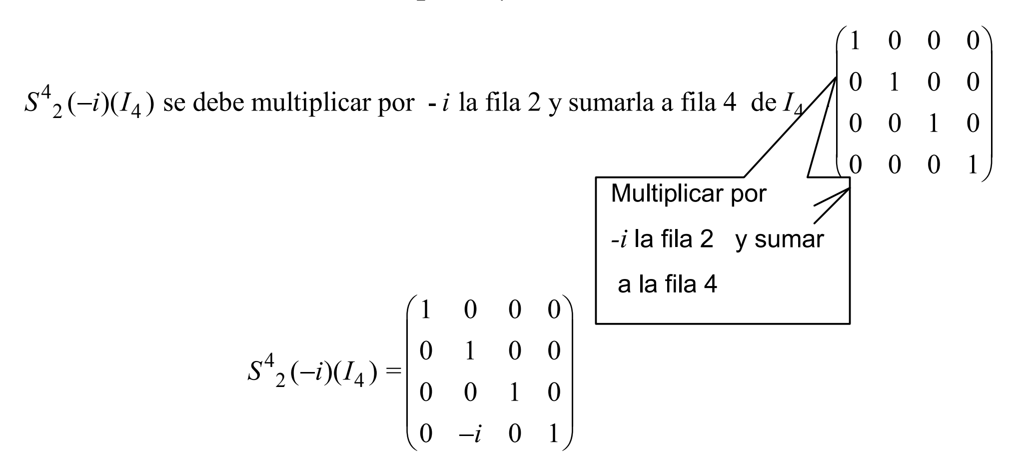
Todos los elementos no nulos están en la diagonal. En las filas de la identidad no afectadas por la operación sus elementos no nulo son 1 (obvio!) . El "1" de la segunda fila al multiplicarlo por *-1+ i* resulta ese valor (es claro, por la tabla del 1...).

Describiendo formalmente los elementos de la matriz

$$M_2(-1+i)(I_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (e_{sp})_{\substack{1\le s\le 4 \\ 1\le p\le 4}}$$

con $e_{sp} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad s = p \wedge s \neq 2 \\ -1+i & \text{si} \quad s = p \wedge s = 2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

Por último se analizará la matriz $S^4{}_2(-i)(I_4)$, para calcular



Observar que esta matriz también es de filas no nulas.

En las filas de la identidad no afectadas por la operación sus elementos no nulos son 1 y están en la diagonal (obvio!).

El "1" de la segunda fila al multiplicarlo por $-i$ resulta ese valor (por la tabla del 1...) y al sumarlo con el 0 de la fila 4 columna 2, el resultado es $-i$, los restantes elementos de la fila 2 son 0, luego no afectan al sumarse elemento a elemento con la fila 4.

La descripción formal está dada por:

$$S^4{}_2(-i)(I_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 1 \end{pmatrix} = (e_{sp})_{\substack{1 \le s \le 4 \\ 1 \le p \le 4}}$$

$$e_{sp} = \begin{cases} 1 & \text{si } \; s = p \\ -i & \text{si } \; s = 4 \wedge p = 2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Dada la matriz identidad de orden m se conviene en designar:

$$E_{ij} = P_{ij}(I_m) \qquad E^i{}_j(c) = S^i{}_j(c)(I_m) \qquad E_i(c) = M_i(c)(I_m) \quad c \neq 0$$

EJERCICIO 11.4.2

a) Escribir las matrices $E^3{}_2(5)$, E_{32}, E_{24}, $E_1(-4-i)$ para los casos $m = 5$ y $m = 6$

b) Describir para cualquier m, las matrices $E_i(c)$ con $c \neq 0$, E_{ij} y $E^i{}_j(c)$.

Lo ayudamos con una parte de b):

Se analizará como es $E_i(c) = (e_{s\,p})_{\substack{1\le s\le m\\ 1\le p\le m}}$ con $c \neq 0$, esta matriz es $M_i(c)(I_m)$, definida como la matriz que resulta al multiplicar la fila i-ésima de la identidad por $c \neq 0$.

Miremos (aproximadamente, por los …) el aspecto de ella:

$$I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underleftarrow{i-\text{ésima fila}} \qquad E_i(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underleftarrow{i-\text{ésima fila}}$$

Por lo tanto los elementos genéricos están dados por $e_{s\,p} = \begin{cases} 1 & s = p \neq i \\ c & s = p = i \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

Haga un trabajo similar para los otros casos de elementales.

EJERCICIO 11.4.3

a) Usar lo calculado en el ejercicio anterior para calcular $E_{32}\,.\,A$, $E^3{}_2\,(5)\,.A$ y $E_1\,(-4-i)\,.A$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2i & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4i & 1 & 1-2i \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

¿??

Observar que la elemental debe ser de tipo 3 x 3, pues 3 es el número de columnas de A.

b) Calcular $P_{32}\,(A)$; $S^3{}_2(5)(A)$ y $M_1(-4-i)(A)$ comparar con la parte a) ¿Qué puede decir?

5. Camino a la resolución de sistemas: más de teoría de matrices

De acuerdo al ejercicio anterior se observa que dada esa A, resulta:

$$E_{32}\,.\,A = P_{32}(A)\ ;\quad E^3{}_2\,(5)\,.A = S^3{}_2\,(5)(A) \ \text{ y } \ E_1\,(-4-i)\,.A = M_1(-4-i)(A)$$

Este resultado no es puntual. Además de valer en el ejemplo vale para toda matriz $A \in K^{m\times n}$ y cada operación elemental según lo establece el siguiente teorema:

♦TEOREMA ***(Elemental)*** 11.5.1

Para toda matriz $A \in K^{m\times n}$ es equivalente realizar sobre A una operación elemental que premultiplicar A por la matriz elemental correspondiente a esa operación. Es decir:

a) $E_{ij} . A = P_{ij}(A)$; b) $E^{i}{}_{j}(c) . A = S^{i}{}_{j}(c)(A)$; c) $E_{i}(c) . A = M_{i}(c)(A)$ $\quad c \neq 0$

Demostración:

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \cdots a_{jk} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m\times n}$$

Se va a probar a):

En la definición de la operación se analizó el resultado de aplicar P_{ij} a la matriz A:

$$P_{ij}(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \cdots a_{jk} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir que para $A = \left(a_{sp}\right)_{\substack{1\le s\le m \\ 1\le p\le n}}$ se obtiene $P_{ij}(A) = \left(a^{*}_{sp}\right)_{\substack{1\le s\le m \\ 1\le p\le n}}$

con $a^{*}_{sp} = \begin{cases} a_{ip} & \text{si } s = j \\ a_{jp} & \text{si } s = i \\ a_{sp} & \text{si } s \neq i \wedge s \neq j \end{cases}$ (❋)

Se va a realizar el producto $E_{ij} . A.$

Sea $E_{ij} . A = C = (c_{sp})_{\substack{1\le s\le m \\ 1\le p\le n}}$ que por definición de producto de matrices cada

$c_{sp} = \sum_{k=1}^{m} e_{sk} . a_{kp}$. Teniendo en cuenta las características de la matriz E_{ij}, hay en ella tres tipos de filas: la *i*-ésima, la *j*-ésima y cualquier fila diferente de estas dos.

En la fila i-ésima, el elemento no nulo es un 1 en posición $i\,j$, en la fila j-ésima, el elemento no nulo es un 1 en posición $j\,i$, en las otras filas el elemento no nulo es 1 en posición $s\,s$.

Por lo tanto: $c_{i\,p} = \sum_{k=1}^{m} e_{i\,k}.a_{k\,p} = e_{i\,j}.a_{j\,p} = 1.a_{j\,p} = a_{j\,p}$

$$c_{j\,p} = \sum_{k=1}^{m} e_{j\,k}.a_{k\,p} = e_{j\,i}.a_{i\,p} = 1.a_{i\,p} = a_{i\,p}$$

y para $s \neq i$ y $s \neq j$, $c_{s\,p} = \sum_{k=1}^{m} e_{s\,k}.a_{k\,p} = e_{s\,s}.a_{s\,p} = 1.a_{s\,p} = a_{s\,p}$.

Comparando los elementos de la matriz C con los obtenidos en (❋), son iguales elemento a elemento, por lo cual vale la igualdad propuesta.

Para probar b):

En la definición de la operación se analizó el resultado de aplicar $S^i{}_j(c)$ a la matriz A:

$$S^i_j(c)(A)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+c.a_{j1} & a_{i2}+c.a_{j2} & \cdots a_{ik}+c.a_{jk} & \cdots & a_{in}+c.a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Así que $A = \left(a_{s\,p}\right)_{\substack{1\le s\le m\\ 1\le p\le n}}$ se obtiene $S^i{}_j(c)(A) = \left(a^*_{s\,p}\right)_{\substack{1\le s\le m\\ 1\le p\le n}}$

con $a^*_{s\,p} = \begin{cases} a_{i\,p} + c.a_{j\,p} & \text{si } s = i \\ a_{s\,p} & \text{si } s \neq i \end{cases}$ (❋❋)

Se va a realizar el producto $E^i{}_j(c).A$.

Sea $E^i{}_j(c).A = C = (c_{s\,p})_{\substack{1\le s\le m\\ 1\le p\le n}}$ que por definición de producto de matrices cada

$c_{s\,p} = \sum_{k=1}^{m} e_{s\,k}.a_{k\,p}$. Teniendo en cuenta las características de la matriz $E^i{}_j(c)$, hay en ella dos tipos de filas: la i-ésima y cualquier fila diferente de esta.

En la fila i-ésima, hay sólo dos elementos no nulos que son un 1 en posición $i\,i$ y c en posición $i\,j$, en las otras filas un solo elemento no nulo que es 1 en posición $s\,s$.

Por lo tanto: $c_{i\,p} = \sum_{k=1}^{m} e_{i\,k}.a_{k\,p} = e_{i\,i}.a_{i\,p} + e_{i\,j}.a_{j\,p} = 1.a_{i\,p} + c.a_{j\,p} = a_{i\,p} + c.a_{j\,p}$

y para $s \neq i$, $c_{s\,p} = \sum_{k=1}^{m} e_{s\,k} . a_{k\,p} = e_{s\,s} . a_{s\,p} = 1 . a_{s\,p} = a_{s\,p}$.

Comparando los elementos de la matriz C con los obtenidos en (❋ ❋), son iguales elemento a elemento, por lo cual vale la igualdad propuesta.

Para probar c):

Con definición de la operación se analizó el resultado de aplicar $M_i(c)$ con $c \neq 0$ a la matriz A:

$$M_i(c)(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c.a_{i1} & c.a_{i2} & c.a_{i3} & \cdots c.a_{ij} & \cdots & c.a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Es que para $A = \left(a_{s\,p}\right)_{\substack{1 \leq s \leq m \\ 1 \leq p \leq n}}$ se obtiene $M_i(c)(A) = \left(a^*_{s\,p}\right)_{\substack{1 \leq s \leq m \\ 1 \leq p \leq n}}$

con $a^*_{s\,p} = \begin{cases} c.a_{i\,p} & \text{si } s = i \\ a_{s\,p} & \text{si } s \neq i \end{cases}$. (❋❋❋)

Se va a realizar el producto $E_i(c) . A$:

Sea $E_i(c) . A = C = (c_{s\,p})_{\substack{1 \leq s \leq m \\ 1 \leq p \leq n}}$ que por definición de producto de matrices cada

$c_{s\,p} = \sum_{k=1}^{m} e_{s\,k} . a_{k\,p}$. Teniendo en cuenta las características de la matriz $E_i(c)$, hay en ella dos tipos de filas: la i-ésima y cualquier fila diferente de ésta.

En la fila i-ésima, hay un elemento no nulo que es c en posición $i\,i$ y en las otras filas el elemento no nulo es 1 en posición $s\,s$.

Por lo tanto: $c_{i\,p} = \sum_{k=1}^{m} e_{i\,k} . a_{k\,p} = e_{i\,i} . a_{i\,p} = c . a_{i\,p}$

y para $s \neq i$, $c_{s\,p} = \sum_{k=1}^{m} e_{s\,k} . a_{k\,p} = e_{s\,s} . a_{s\,p} = 1 . a_{s\,p} = a_{s\,p}$.

Comparando los elementos de la matriz C con los obtenidos en (❈ ❈❈), son iguales elemento a elemento, por lo cual vale la igualdad propuesta.

♦

EJEMPLO 11.5. 2

Calcular $E_{32}.E_{32}$ para el caso m = 5.

De acuerdo al resultado anterior este producto equivale a realizar sobre E_{32} la operación elemental correspondiente, esto es: permutar la fila 2 con la fila 3 de E_{32}.

$$E_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hay que permutar!

¿Qué resultará?

$$E_{32} \,.\, E_{32} = P_{32}(E_{32}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿está claro???

¿Qué se puede concluir? ¿Cuál es la inversa de E_{32} ?



EJEMPLO 11.5.3

Calcular $E_1((-4-i)^{-1}) \,.\, E_1(-4-i)$ para el caso m = 5.

Por los resultados anteriores esto equivale a multiplicar por (- 4 - i)$^{-1}$ la fila 1 de $E_1(-4-i)$:

$$E_1(-4-i) = \begin{pmatrix} -4-i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hay que multiplicar la fila 1 por el inverso de -4 -i

¿Qué resultará?

$$E_1((-4-i)^{-1}).E_1(-4-i) = M_1((-4-i)^{-1})(E_1(-4-i)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Está claro??

¿Tiene inversa $E_1(-4-i)$? ¿Cuál es?



EJEMPLO 11.5.4

Calcular para m = 5, $E^3{}_2(-5)$. $E^3{}_2(5)$.

Aplicando los resultados del teorema se tiene que este producto equivale a sumar a la fila 3 de $E^3{}_2(5)$ la fila 2 multiplica por -5.

$$E^3{}_2(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hay que sumar a la fila 3 la fila 2 multiplicada por -5.

¿Qué resultará?

$$E^3{}_2(-5).\ E^3{}_2(5) = S^3{}_2(-5)(\ E^3{}_2(5)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ¡Es claro!

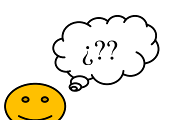
¿Es invertible $E^3{}_2(5)$?

Si el producto de una matriz cuadrada por otra es la identidad, una es la inversa de la otra, por definición de inversa y observaciones posteriores.

¡Luego éstas elementales de los ejemplos anteriores son invertibles!

EJERCICIO 11.5.5

a) Haga el mismo análisis que en los ejemplos previos para las matrices $E^3{}_4(3+2i)$, $E_2(\frac{2}{3})$, E_{14} para el caso de m = 6



b) ¿Cuál es la inversa de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$? Justifique. (piense que matriz es….)

c) ¿Cuál es la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, por qué?

d) Identifique la matriz y halle su inversa: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 11.5.6:

Demostrar que toda matriz elemental es invertible y su inversa es una elemental del mismo tipo. (Idea: guiarse por los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores y el Teorema Elemental.)

Dadas las matrices A y B de $K^{m\times n}$, se dice que **A es equivalente por filas con B** si B se obtiene luego de aplicar a A un número finito de operaciones elementales por filas.

De acuerdo el ***Teorema Elemental***, esta definición se expresa matricialmente por:

$B = E_k.E_{k-1}.\cdots.E_1.A$ donde las matrices E_j son elementales para $1 \le j \le k$

(Como la multiplicación de matrices es asociativa se puede no poner paréntesis…, pero es importante el orden, pues la multiplicación no es conmutativa)

Esta relación definida entre matrices *m* x *n* tiene las siguientes propiedades:

1) A es equivalente por filas con A

Pues vale que $I.\ A=A$ y la identidad I (de qué orden?) se puede interpretar por ejemplo, como el producto de una matriz elemental y su inversa, luego de aplicar dos operaciones elementales a A, se obtiene A.

2) Si A es equivalente por filas con B, entonces B es equivalente por filas con A

Si A es equivalente por filas con B vale que

$B = E_k.E_{k-1}.\cdots.E_1.A$ por tener inversa cada una de las elementales, se tiene que la inversa de $E_k.E_{k-1}.\cdots.E_1$ existe, y además $(E_k.E_{k-1}.\cdots.E_1)^{-1}$ es el producto de las inversas de los factores con el orden cambiado.

Por tanto $(E_k.E_{k-1}.\cdots.E_1)^{-1} = E_1^{-1}.E_2^{-1}.\cdots.E_{k-1}^{-1}.E_k^{-1}$ además cada uno de los factores es una matriz elemental , luego se tiene

$$(E_k.E_{k-1}.\cdots.E_1)^{-1}B = (E_k.E_{k-1}.\cdots.E_1)^{-1}(E_k.E_{k-1}.\cdots.E_1).A$$

$E_1^{-1}.E_2^{-1}.\cdots.E_{k-1}^{-1}.E_k^{-1}.B = A$, lo que significa que B es equivalente por filas con A.

Esta simetría de la equivalencia por filas entre matrices hace que ante la expresión: "A es equivalente por filas con B" se considere indistintamente que B se obtuvo de A luego de un número finito de operaciones elementales o que A se obtuvo de B luego de un número finito de operaciones elementales, ya que la inversa de una operación (o matriz) elemental es elemental.

3) Si A es equivalente por filas con B y B es equivalente por filas con C entonces A es equivalente por filas con C.

La justificación de esta propiedad queda como ejercicio (Idea: escriba las igualdades matriciales que tiene por hipótesis y piense como es una cantidad finita más otra cantidad finita….)

A **es equivalente por filas con** B (por 1), 2) y 3) es una relación de equivalencia dentro del conjunto de matrices $K^{m\times n}$) se designa por

$$A \sim_f B \text{ o simplemente } A \sim B$$

Este símbolo se usa para expresar las relaciones este tipo, o también los símbolos $\approx$ o $\simeq$ que son una deformación gráfica de la igualdad. La justificación de este comentario tiene raíces profundas que quedan para averiguar o para aceptar en lo ya visto en el tema relaciones de equivalencia.

EJEMPLO 11.5.7

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2i & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4i & 1 & 1-2i \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ se realizarán algunas operaciones elementales sobre A para obtener una matriz B equivalente por filas con A.

Observar que al realizar una operación elemental sobre una matriz la matriz que se obtiene es una equivalente por filas. Por el Teorema Elemental se van a aplicar operaciones elementales y queda como ejercicio el escribir la matriz elemental correspondiente y comprobar que equivale a realizar el producto matricial en cada caso.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\ i&2i&0\\ 1&-2&0\\ 4i&1&1-2i\\ 0&1&3\end{pmatrix}\sim_f\begin{pmatrix}1&0&-1\\ 0&2i&i\\ 1&-2&0\\ 4i&1&1-2i\\ 0&1&3\end{pmatrix}\sim_f\begin{pmatrix}1&0&-1\\ 0&2i&i\\ 0&-2&1\\ 4i&1&1-2i\\ 0&1&3\end{pmatrix}\sim_f$$

↑ 2da.fila $-i$.1ra.fila

↑ 3ra.fila -1.1ra.fila

$$\sim_f\begin{pmatrix}1&0&-1\\ 0&2i&i\\ 0&-2&1\\ 0&1&1+2i\\ 0&1&3\end{pmatrix}\sim_f\begin{pmatrix}1&0&-1\\ 0&1&3\\ 0&-2&1\\ 0&1&1+2i\\ 0&2i&i\end{pmatrix}\sim_f\begin{pmatrix}1&0&-1\\ 0&1&3\\ 0&0&7\\ 0&1&1+2i\\ 0&2i&i\end{pmatrix}\sim_f$$

↑ 4ta.fila $-4i$.1ra.fila

↑ 2da.fila por 5ta.fila

↑ 3ra.fila $-(-2)$.2da.fila

$$\sim_f\begin{pmatrix}1&0&-1\\ 0&1&3\\ 0&0&7\\ 0&0&-2+2i\\ 0&2i&i\end{pmatrix}\sim_f\begin{pmatrix}1&0&-1\\ 0&1&3\\ 0&0&7\\ 0&0&-2+2i\\ 0&0&-5i\end{pmatrix}\sim_f\begin{pmatrix}1&0&-1\\ 0&1&3\\ 0&0&1\\ 0&0&-2+2i\\ 0&0&-5i\end{pmatrix}\sim_f$$

↑ 4ta.fila -1.2da.fila

↑ 5ta.fila - $2i$.2da.fila

↑ $\frac{1}{7}$.3ra.fila

$$\sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2+2i \\ 0 & 0 & -5i \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2+2i \\ 0 & 0 & -5i \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5i \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↑ 1ra.fila +1.3ra.fila ↑ 2da.fila - 3.3ra.fila ↑ 4ta.fila -(-2+2i).3ra.fila ↑ 5ta.fila -(-5i).3ra.fila

Se ha obtenido que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ i & 2i & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4i & 1 & 1-2i \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$

Como así también A lo es a cada una de las matrices intermedias…..

EJEMPLO 11.5.8

Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ se hallará una matriz B equivalente por filas con A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim_f$$

↑ 3ra.fila −3.1ra.fila ↑ 1ra.fila −2.2da.fila ↑ 3ra.fila −(−4).2da.fila

$$\sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

↑ (-1).3ra.fila ↑ 1ra.fila +1.3ra.fila ↑ 2da.fila −2.3ra.fila

EJEMPLO 11.5.9

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ se hallará B una matriz equivalente por filas con A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{3ra. fila +} \\ \text{2.1ra.fila}}}}}{\sim_f} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\frac{1}{2}\text{.2da.fila}}}}{\sim_f} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{1ra.fila} \\ -3\text{.2da.fila}}}}}{\sim_f} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} \sim_f$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{3ra. fila +} \\ \text{9.2da.fila}}}}}{\sim_f} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

En estos tres ejemplos se ha trabajado sobre distintas matrices A, con el objetivo de llevarlas en cada caso a una matriz lo "más similar posible" en su forma a la matriz identidad.

El mismo objetivo se tiene cuando el fin perseguido es con estas operaciones resolver sistemas de ecuaciones y si el sistema queda luego de las operaciones en la forma:

$$\begin{cases} 1x + 0y = 3 \\ 0x + 1y = \dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 3x_3 = -3 \\ 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$$

Y en esta forma las soluciones salen de manera muy natural, como se analizó en los ejemplos desarrollados en **1.** y cuando en **2.** se vio la conexión entre sistemas y matrices.

Pero como se verá más adelante este trabajo es fructífero para el cálculo de la inversa de una matriz (obvio que cuadrada)

Se analizará que cualquier matriz de $K^{m\times n}$ es posible de llevar a una matriz de estas características.

Vamos a hacer una definición para saber de que hablamos cuándo se dice lo "más similar posible" en su forma a la matriz identidad…

Una matriz $A \in K^{m\times n}$ se dice **escalonada y reducida por filas,** si cumple las siguientes condiciones:

- Si tiene r filas no nulas, son las r primeras.

- Los **elementos principales** de cada fila no nula son **1_K**.

Se llama **elemento principal** al primer elemento no nulo de una fila, esto es el no nulo que está en la columna de posición más hacia la izquierda de la fila.

Es decir: $a_{ij} (=1_K)$ es principal de la fila i si $(\forall k)(\, k < j$ entonces $a_{ik} = 0)$

- Además **los elementos principales se dan de izquierda a derecha**, esto es si una fila es anterior a otra en el orden natural, la columna donde está el principal de la fila de menor numeración es anterior al de la otra. Esto es:

$a_{ij} (=1_K)$ es principal de la fila i y $a_{hk} (=1_K)$ es principal de la fila h,
si $i < h$ entonces $j < k$

- En **la columna donde hay elemento principal de alguna fila, el resto de los elementos es 0_K.**

Luego, si $a_{ij} (=1_K)$ es principal de la fila i, entonces $(\forall k)(\, k \neq i$ entonces $a_{kj} = 0_K)$

Por lo cual el aspecto de una matriz escalonada y reducida por filas genérica es:

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots a_{1k} \cdots 0 \cdots & 0 & \cdots a_{1n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots a_{2k} \cdots 0 \cdots & 0 & \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \ \vdots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ 0 \ \cdots 1 \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \quad \cdots & 1 & \cdots a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \quad \cdots & 0 & \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \quad \cdots & \cdots & \cdots 0 \end{pmatrix}$$

Las filas no nulas son las r primeras

El bloque de 0 son las últimas n-r filas

EJEMPLO 11.5.10

a) Son ejemplo de matrices escalonadas y reducidas por filas TODAS las matrices nulas (de cualquier tipo). Piense porque.

b) Son ejemplo de matrices escalonadas y reducidas por filas TODAS las identidades (de cualquier orden). Piense porque.

c) Las matrices B de los ejemplos 11.5.7, 11.5.8 y 11.5.9.

EJEMPLO 11.5.11

Las siguientes son escalonadas y reducidas por filas:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}1 & -3i & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad F=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Observar que las columnas anteriores (si es que existen) al primer elemento principal es un bloque de columnas nulas, como en los ejemplos A, B y E.

EJERCICIO 11.5.12

a) Escribir 3 matrices escalonadas y reducidas por filas no cuadradas, de distinto tipo.

b) Escribir todas las matrices escalonadas y reducidas por filas 2 x 2. ¿Cuántas son? ¿Cuáles de ellas tienen 2 filas no nulas?

c) Escribir todas las matrices escalonadas y reducidas por filas 3 x 3. ¿Cuántas son? ¿Cuáles de ellas tienen 3 filas no nulas?

d) Escribir matrices escalonadas y reducidas por filas 4 x 4 con 4 filas no nulas.

e) Escribir matrices escalonadas y reducidas por filas *n* x *n* con *n* filas no nulas.

f) Saque alguna conclusión de lo anterior.

EJEMPLO 11.5.13

Hallar una matriz reducida por filas y escalonada equivalente por filas con la matriz

Son los principales de "menor" columna...

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 4 & -8 & 1 & 5\\ 1 & 0 & 0 & 0 & -7\end{pmatrix}$$

Todas las filas de A son no nulas. En la primer columna hay dos elementos no nulos, como uno de ellos es 1, elegimos la fila a la cual pertenece (la 4) para permutar con la primera cuyo elemento de posición $_{11}$ es 0. Así se obtiene:

$$A \sim_f P_{14}(A)=A^*=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -7\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 4 & -8 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Para cumplir con la definición hay que transformar en 0 el elemento de posición $_{21}$ que es 2. Para ello se trabaja con la fila 1. Se suma a la fila 2, la fila 1 multiplicada por -2:

$$A^{*} \sim_f S^2{}_1(-2)(A^{*}) = A^{**} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 2-2.1 & 1-0 & 0-0 & 0-0 & 2-2.(-7) \\ 0 & 4 & -8 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 4 & -8 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Con el 1 de la segunda columna (que es principal de la segunda fila...), trabajamos transformando en 0 el resto de la columna, esto es el 4 de la fila 3, para ello sumamos a la fila 3 la fila 2 multiplicada por -4:

$$A^{**} \sim S^3{}_1(-4)(A^{**}) = A^{***} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0-0 & 4-4.1 & -8-0 & 1-0 & 5-4.(-7) \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 33 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Observar que a la izquierda del principal hay 0, luego al sumar múltiplos de esa fila no se alteran los elementos de las otras filas que estén en columnas anteriores.

Mirando atentamente se puede optar por "transformar" el -8 en 1 para obtener el principal de la fila 3 o permutar las filas 3 y 4. La primera opción involucra trabajar en las otras columnas con fraccionarios, que si se están realizando las operaciones "a mano" es preferible entonces la segunda opción. Por lo tanto:

$$A^{***} \sim_f P_{34}(A^{***}) = A^{****} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 33 \end{pmatrix}$$

¿Qué se debe hacer? "Barrer" la tercera columna utilizando el elemento principal de la 3er. fila. Se suma a la fila 4 la fila 3 multiplicada por 8:

$$A^{****} \sim_f S^4{}_3(8)(A^{****}) = A^{*****} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0+0 & 0+0 & -8+8.1 & 1+8.2 & 33+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 33 \end{pmatrix}$$

Con dos operaciones más se logra lo pedido; falta transformar en 1 el elemento principal de la fila 4 y luego "barrer" la columna 4:

$$A^{*****} \sim_f M_4(17^{-1})(A^{*****}) = A^{******} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 17.17^{-1} & 33.17^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 33/17 \end{pmatrix}$$

$$A^{******} \sim_f S^3{}_4(-2)(A^{******}) = A^{*******} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 2-2.1 & 0-2.33/17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 33/17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -66/17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 33/17 \end{pmatrix}$$

La última matriz es reducida por filas y escalonada.

Por la transitividad de la equivalencia por filas se tiene que:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -8 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \sim_f A^{*******} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -66/17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 33/17 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 11.5.14

a) Escriba cada una de las matrices elementales correspondientes a las operaciones elementales que afectaron sucesivamente a la matriz A del ejemplo anterior.

b) Escriba la igualdad matricial que justifica que $A \sim_f A^{*******}$.

♦ TEOREMA 11.5.15

Sea K un cuerpo conmutativo. Toda matriz $A \in K^{m\times n}$ es equivalente por filas a una matriz reducida por filas y escalonada.

Demostración:

Vamos a demostrar por inducción sobre el número de filas de A. Considerar el esquema

P(*t*): Si $A \in K^{t\times n}$ entonces A es equivalente por filas a una matriz reducida por filas y escalonada.

Se debe probar que $(\forall m)(\mathrm{P}(m))$ es verdadera.

Veamos que P(1) es verdadera:

Sea $A \in K^{1\times n}$ es decir con 1 fila.

Si A es nula no hay nada que probar.

Si A es no nula. Significa que la matriz A tiene una única fila y no nula.

Por lo tanto existe $a_{1k} \neq 0 \quad \wedge \quad 1 \leq k \leq n$, se elige entre ellos el de menor k (que es el elemento principal de la fila 1)

Se multiplica por el inverso de a_{1k} la fila de A, así se obtiene una matriz escalonada y reducida por filas equivalente por filas con A, pues se obtuvo a partir de A luego de un número finito de operaciones elementales (una sola).

Por tanto P(1) vale.

Se acepta como hipótesis inductiva que vale P(h).

Esto es, toda matriz $A \in K^{h \times n}$ es equivalente por filas a una reducida por filas y escalonada.

Se debe probar P($h+1$), es decir que si $A \in K^{(h+1) \times n}$ entonces es equivalente por filas a una reducida por filas y escalonada.

Consideremos $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le h+1 \\ 1 \le j \le n}}$.

Si A es nula no hay nada que probar. Vale por definición.

Sea A no nula.

Entonces existe $a_{uk} \neq 0$. De todos ellos (a lo sumo (h+1) x n) se elige el de menor k.

Supongamos que es $a_{ik_1} \neq 0$ el elemento principal de la fila i-ésima y de menor índice de columna.

Si este elemento no está en la fila 1 (es decir $i \neq 1$), mediante una operación elemental, permutar dos filas de la matriz A: la i-ésima fila con la fila 1, se lleva a la primera fila el principal de menor índice de columna. La matriz así obtenida es equivalente por filas con A, se tiene entonces $A \sim_f P_{1i}(A) = A^* = (a^*_{sj})_{\substack{1 \le s \le h+1 \\ 1 \le j \le n}}$.

Sino (i = 1) se considera $A^* = A$

Como $a^*_{1k_1} \neq 0$ se multiplica la fila 1 de A^* por el inverso de $a^*_{1k_1}$. Así se obtiene:

$$A^{**} = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & 1 & a^*_{1k_{1+1}}.(a^*_{1k_1})^{-1} & \cdots & a^*_{1n}.(a^*_{1k_1})^{-1} \\ 0 \cdots 0 & a^{**}_{2k_1} & a^{**}_{2k_{1+1}} & & a^{**}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ \vdots & a^{**}_{pk_1} & a^{**}_{pk_{1+1}} & \cdots & a^{**}_{pn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & a^{**}_{h+1k_1} & a^{**}_{h+1k_{1+1}} & \cdots & a^{**}_{h+1n} \end{pmatrix}$$

(Imagine como es la cosa si k_1 =1)

Puede ser que hubiera más de un elemento no nulo en la columna k_1, se elije cualquiera.

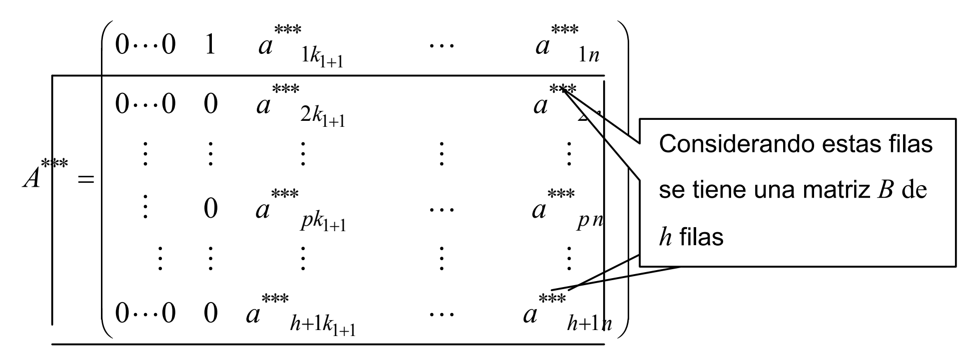
Con el 1 obtenido en la primera fila se "barre" esa columna

Se obtiene así una sucesión de matrices definidas por:

$$A^{**}_q = S^{q+1}{}_1(-a^{**}_{q+1\,k_1})(A^{**}_{q-1}) \quad \text{para} \quad q \ge 1 \text{ (y } q \le h+1\text{), siendo } A^{**}_0 = A^{**}.$$

Además si $a^{**}_{q+1\,k_1} = 0$ la matriz A^{**}_q es igual a la anterior A^{**}_{q-1}.

Al cabo de h operaciones elementales (a lo sumo) se obtiene una matriz:



Consideremos la submatriz B en A^{***} determinada por las filas 2 a h+1 de A^{***}. Por hipótesis inductiva es posible llevar B (que tiene h filas) a una matriz reducida por filas y escalonada equivalente. Las primeras columnas de B es un bloque de ceros, las operaciones que se realizan sobre las filas de B con ese objetivo no afectan ese bloque.

Por lo tanto se realizan las operaciones necesarias sobre esas filas de A^{***}, se llega a una matriz equivalente por filas con A^{***} y cuyo aspecto es:

$$A^{****} = \begin{pmatrix} 0\cdots 0 & 1 & a^{****}_{1k_{1+1}} & \cdots & a^{****}_{1p} & \cdots & a^{****}_{1n} \\ 0\cdots 0 & 0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & C & & \\ \vdots & 0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ 0\cdots 0 & 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

Siendo C la submatriz de A^{****} que resulta equivalente con A^{***} al trabajar sobre las filas de su submatriz B.

La submatriz C es reducida por filas y escalonada equivalente con las columnas no nulas de B.

¿Qué falta para terminar la demostración?

Si la submatriz C es no nula, habrá elementos principales en sus filas no nulas, que son 1 por definición. A lo sumo hay una cantidad M que es menor o igual que el mínimo entre el número de sus filas (h) y de sus columnas (n - (k_1 +1) + 1) De acuerdo??.

Luego para las columnas donde la submatriz C tenga elemento principal (1) se deben "barrer" los elementos de la fila 1 de A^{****} . Esto producirá una sucesión de matrices equivalentes dadas por:

$$A^{****}_{j} = S^{1}_{j+1}(-a^{****}_{1k+j})(A^{****}_{j-1}) \quad \text{para} \quad 1 \le j \le M, \text{ y } \ a^{****}_{1k+j} \ne 0,$$

siendo $A^{****}_{0} = A^{****}$

Ademas si $a^{****}_{1p} = 0$ la matriz A^{****}_{p-j} es igual a la anterior A^{****}_{p-j-1}.

Por fin!! 

Se ha llegado a una matriz reducida por filas y escalonada equivalente con A, siendo A de $h+1$ filas. Por lo tanto vale para $h+1$.

Luego se han cumplido las etapas que exige el método de demostraciones por inducción, por lo cual afirmamos que toda matriz $A \in K^{m\times n}$ es equivalente por filas a una matriz escalonada y reducida por filas.

♦

Dada la matriz A, la reducidas por filas y escalonada equivalente con A se designará A_R.

Se llama **rango de** A al número de filas no nulas de A_R.

Más adelante se verá la importancia de este número.



EJERCICIO 11.5.16

Hallar para cada una de las siguientes matrices la matriz reducida por filas y escalonada equivalente y decir cuál es el rango:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2i & 1 \\ 1-i & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -4i & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & i \\ i & -2 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 11.5.17

a) Hallar las matrices reducidas por filas y escalonadas equivalentes para las siguientes matrices y dar su rango:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2i & 1 \\ 1-i & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) ¿Alguna conclusión sobre las matrices escalonadas y reducidas por filas equivalentes a una matriz cuadrada?



Se tiene el siguiente **teorema** (cuya demostración resulta de pensar bien, no sea mal pensado!):

♦ TEOREMA 11.5.18

Sea K un cuerpo conmutativo. Para toda matriz $A \in K^{n \times n}$ (matriz cuadrada), la matriz equivalente por filas con A es A_R que tiene una fila nula o es la matriz I_n .

Demostración:

Al decir una fila nula, obvio que puede ser más de una….

Si A_R no tiene filas nulas, tiene n filas no nulas, piense cómo ubica n elementos 1, uno por fila y uno por columna de izquierda a derecha……

♦

Reflexione el porqué por operaciones elementales se puede anular una fila no nula de una matriz A (sea ella cuadrada o no)

???

¿Cuáles son las matrices de rango 0?

Ejemplifique!!!

6. Más sobre matrices invertibles

Las matrices cuadradas pueden ser invertibles y las matrices elementales ayudarán a determinar cuáles lo son.(Recordatorio: C es invertible si existe B tal que $A.\ B = B.\ A = I$)

Se sabe que las matrices elementales son invertibles (11.5.6) y que el producto de matrices invertibles es invertible.

El siguiente teorema da un criterio sencillo usando operaciones elementales o matrices elementales (conceptos relacionados) para determinar las matrices invertibles y además sugiere un método para calcular la inversa de una matriz.

♦ TEOREMA 11.6.1

Sea K un cuerpo conmutativo. Dada $A \in K^{n \times n}$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) A es invertible.

b) $A \sim_f I_n$

c) A es producto finito de matrices elementales.

Demostración:

Se demostrará haciendo una cadena cerrada de implicaciones: a) entonces b) entonces c) entonces a)

Así resultará la equivalencia de las tres afirmaciones.

Comenzando por, a) entonces b) :

Se tiene por hipótesis que A es n x n e invertible.

Por 11.5.17, A es equivalente por filas con A_R tal que A_R tiene una fila nula o $A_R = I_n$

Supongamos que $A \nsim_f I_n$. Por lo tanto, A_R tiene una fila nula. (Por 11.5.18)

Por definición de equivalencia por filas y sus propiedades existe un número finito k de matrices elementales (cada una se indica por E_t) y así $A_R = E_k.E_{k-1}.\cdots.E_1.A$ (*)

Usando que A tiene inversa, se multiplica a ambos miembros de la igualdad (*) por A^{-1} a derecha (recordar que la multiplicación de matrices NO es conmutativa):

$$A_R.A^{-1} = E_k.E_{k-1}.\cdots.E_1.A.A^{-1} \quad (**)$$

por ser el producto asociativo y propiedad de la identidad:

$$(**)' \quad A_R.A^{-1} = E_k.E_{k-1}.\cdots.E_1.A.A^{-1} = E_k.E_{k-1}.\cdots.E_1.I_n = E_k.E_{k-1}.\cdots.E_1$$

Sea B primer miembro de esta cadena de igualdades (**)´, es una matriz con una fila nula (ejercicio 10.2.4), achicando se tiene:

$$(***) \quad B = E_k.E_{k-1}.\cdots.E_1$$

Cada uno de los factores del segundo miembro de la expresión de B en (***) es invertible y por lo tanto el producto también.

Multiplicando la igualdad (***) miembro a miembro a derecha por la inversa del segundo miembro se tiene:

$$B.(E_k.E_{k-1}.\cdots.E_1)^{-1} = (E_k.E_{k-1}.\cdots.E_1).(E_k.E_{k-1}.\cdots.E_1)^{-1} = I_n$$

Por ser B una matriz con una fila nula, resulta que la matriz del primer miembro tiene una fila nula, absurdo pues es igual a la identidad de orden *n*, que tiene todas sus filas no nulas.

El absurdo proviene de suponer que $A \nsim_f I_n$. Luego vale que $A \sim_f I_n$.

Para b) entonces c):

La hipótesis es que $A \sim_f I_n$.

Por la definición de equivalencia por filas y sus propiedades: $A = E_k.E_{k-1}.\cdots.E_1.I_n$.

Por la propiedad de multiplicar por la identidad queda $A = E_k.E_{k-1}.\cdots.E_1$

Luego vale c).

Para c) entonces a):

La hipótesis es que A es producto finito de matrices elementales.

Luego vale que A es invertible, ya que cada elemental tiene inversa y el producto de matrices invertibles es una matriz invertible.

Por lo tanto se ha cumplido con el circuito de implicaciones propuesto y de este modo las tres afirmaciones resultan equivalentes.

♦

EJERCICIO 11.6.2:

¿Cuáles de las matrices del ejercicio 11.5.17 son invertibles?

✵ *Método para analizar la existencia de la inversa de A y hallarla.*

Claramente este interrogante sólo tiene sentido para matrices cuadradas $A \in K^{n \times n}$.

El teorema 11.6.1 asegura que dada A, A es invertible si $A \sim_f I_n$.

Esto se analizará haciendo operaciones elementales sobre A con el objetivo de llegar a A_R y comparando A_R con I_n

Mirando con espíritu crítico la demostración del teorema anterior podemos encontrar fácilmente la inversa de A obviamente en el caso que $A_R = I_n$

Por la definición de equivalencia por filas: $\boxed{I_n = E_k.E_{k-1}.\cdots.E_1.A}$

Como el teorema 11.6.1 asegura que A^{-1} existe, multiplicando a derecha (importante recordar que el producto de matrices NO es....) la igualdad precedente por A^{-1} se obtiene:

$$I_n.A^{-1} = E_k.E_{k-1}.\cdots.E_1.A.A^{-1} ,$$

por tanto, por propiedades de la identidad y producto entre una matriz y su inversa resulta:

$$A^{-1} = E_k.E_{k-1}.\cdots.E_1$$

Es decir la inversa de A resulta ser el producto de todas las matrices elementales que permiten llegar a la identidad I_n a partir de A.

➢ *El método*

- Disponemos un rectángulo o "matrición" formal (la matriz A seguida de I_n)

$$A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

- Se realizan sucesivas operaciones elementales sobre las filas del "matrición" con el objetivo de llevar el sector correspondiente a la matriz A a A_R , la escalonada y reducida por filas equivalente con A.

Esto produce en la parte correspondiente a I_n la acumulación del producto de las sucesivas elementales que permiten pasar de A a A_R

- Si $A_R = I_n$ (en el sector izquierdo del "matrición") la matriz A es invertible y su inversa $A^{-1}=E_k.E_{k-1}.\cdots.E_1$ ha quedado en el sector derecho del "matrición" , donde de partida estaba I_n

- Si A_R tiene una fila nula entonces A no es invertible por el teorema 11.6.1.

EJEMPLO 11.6.3

Analizar si las siguientes matrices son invertibles, y en caso afirmativo hallarlas:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&1\\2&6&9\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&-2&1\\2&1&9\end{pmatrix}$$

Formamos el matrición para la matriz A y comenzamos a operar sobre la columna 1, sumando a la fila 3 la fila 1 multiplicada por -2. Esta operación sobre A equivale a premultiplicar A por la elemental ${E^3}_1(-2)$.

En estos ejemplos se detallan todos los pasos formales para que se vea la idea subyacente atrás de las operaciones elementales y lo que se describió en la demostración del teorema. En la práctica uno realiza las operaciones elementales sin escribir las matrices elementales. ¡Ellas están detrás justificando nuestro proceder!

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\2&6&9&0&0&1\end{array}\right]\sim_f\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\2-2.1&6-0&9-2.3&0-2.1&0-0&1-0\end{array}\right]$$

Haciendo las cuentas indicadas se tiene:

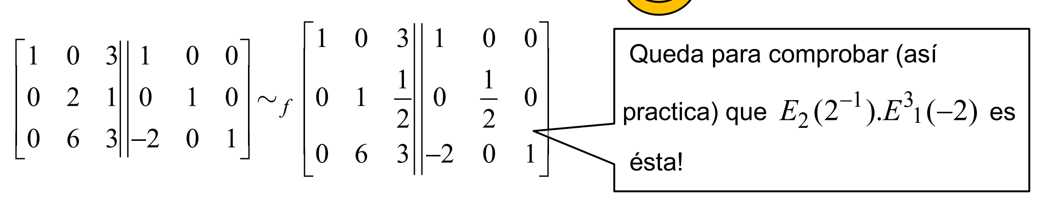
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\2&6&9&0&0&1\end{array}\right]\sim_f\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\0&6&3&-2&0&1\end{array}\right]$$

Esta es la elemental $E^3{}_1(-2)$, ¿de acuerdo?

Se debe transformar en 1 el elemento principal de la fila 2 (del sector de A...). Para ello se multiplica por 2^{-1} la fila 2. Del lado derecho quedará acumulado el producto de $E_2(2^{-1}).E^3{}_1(-2)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\0&6&3&-2&0&1\end{array}\right]\sim_f\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&0\\0&2.2^{-1}&1.2^{-1}&0&1.2^{-1}&0\\0&6&3&-2&0&1\end{array}\right]$$

haciendo las cuentas indicadas se obtiene:



$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\0&6&3&-2&0&1\end{array}\right]\sim_f\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&0\\0&1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&6&3&-2&0&1\end{array}\right]$$

Se debe "barrer" la columna 2.

Para lo cual se sumará a la fila 3 la fila 2 multiplicada por -6.

Esto equivale a premultiplicar por $E^3{}_2(-6)$.

Del lado derecho quedará el producto $E^3{}_2(-6)\ E_2(2^{-1}).E^3{}_1(-2)$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&0\\0&1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&6&3&-2&0&1\end{array}\right]\sim_f\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&0\\0&1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0-0&6-6.1&3-6.\frac{1}{2}&-2-0&0-6.\frac{1}{2}&1-0\end{array}\right]$$

¡Claro!

haciendo las cuentas indicadas:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&0\\0&1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&6&3&-2&0&1\end{array}\right]\sim_f\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&1&0&0\\0&1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&-2&-3&1\end{array}\right]$$

Queda para comprobar que $E^3{}_2(-6)\ E_2(2^{-1}).E^3{}_1(-2)$ es ésta!

Como la A_R tiene una fila nula, A no es invertible y su rango es 2.

Sea realizará un trabajo similar con B.

Se forma el matrición y se opera sobre la columna 1, sumando a la fila 3 la fila 1 multiplicada por -2.

Esta operación sobre B equivale a premultiplicar B por la elemental ${E^3}_1(-2)$, que se acumula en la parte que esta la identidad.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim_f \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2-2.1 & 1-0 & 9-2.3 & 0-2.1 & 0-0 & 1-0 \end{array}\right]$$

Haciendo las cuentas indicadas se tiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim_f \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Esta es la elemental ${E^3}_1(-2)$, ¿de acuerdo?

Se debe transformar en 1 el elemento principal de la fila 2 (del sector de B...). Para ello se multiplica por $(-2)^{-1}$ la fila 2 (también se pueden permutar las filas 2 y 3) .

Del lado derecho quedará acumulado el producto de $E_2((-2)^{-1}).{E^3}_1(-2)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim_f \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2.(-2)^{-1} & 1.(-2)^{-1} & 0 & 1.(-2)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

haciendo las cuentas indicadas se obtiene:

¡Y bueno!

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim_f \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Queda para comprobar (así practica!!!) que $E_2((-2)^{-1}).{E^3}_1(-2)$ es ésta!

Se barre la columna 2. Para ello se suma a la fila 3 la fila 2 multiplicada por -1.

Esto equivale a premultiplicar por ${E^3}_2(-1)$ del lado donde se había puesto B.

En la derecha quedará el producto ${E^3}_2(-1) . E_2((-2)^{-1}).{E^3}_1(-2)$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim_f \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0-0 & 1-1.1 & 3-1.\frac{-1}{2} & -2-0 & 0-1.\frac{-1}{2} & 1-0 \end{array}\right]$$

haciendo las cuentas indicadas:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim_f \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

¡Ya voy!

¡Queda para comprobar que $E^3{}_2(-1)\,.\,E_2((-2)^{-1}).E^3{}_1(-2)$ es ésta!

¿Qué se debe hacer todavía? Multiplicar por el inverso de 7/2 la fila 3 y luego barrer la tercer columna y así se obtendrá la identidad en el lado izquierdo, esto significa que B es invertible.

Por tanto, primero premultiplicamos por $E_3(2/7)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \sim_f \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0.\frac{2}{7} & 0.\frac{2}{7} & \frac{7}{2}.\frac{2}{7} & -2.\frac{2}{7} & \frac{1}{2}.\frac{2}{7} & 1.\frac{2}{7} \end{array}\right] \sim_f \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right]$$

En el bloque derecho de la última matriz queda el producto $E_3(2/7)\,.\;E^3{}_2(-1)\,.\,E_2((-2)^{-1}).E^3{}_1(-2)$ (verifíquelo)

¡Otra cuenta más!

Para barrer la tercera columna primero a la fila 1 le sumamos la fila 3 multiplicada por -3 y luego a la fila 2 le sumamos la fila 3 multiplicada por ½.

Estas operaciones equivalen a premultiplicar por $E^1{}_3(-3)$ y luego por $E^2{}_3(1/2)$, obteniendo así:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right] \sim_f \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1-3.\frac{-4}{7} & 0-3.\frac{1}{7} & 0-3.\frac{2}{7} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right] \sim_f$$ es decir:

$$\left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right] \sim_f \left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{-6}{7} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right]$$

Luego, por último:

$$\left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{-6}{7} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right] \sim_f \left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{-6}{7} \\ 0+0 & 1+0 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 0+\frac{-4}{7} & \frac{-1}{2}+\frac{1}{7} & 0+\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right]$$

que haciendo cuentas resulta:

$$\left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{-6}{7} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right] \sim_f \left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{-6}{7} \\ 0+0 & 1+0 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 0+\frac{-4}{7} & \frac{-1}{2}+\frac{1}{7} & 0+\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{-6}{7} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right] \sim_f \left[\begin{array}{ccc||ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{-6}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-4}{7} & \frac{-5}{14} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right]$$

Por lo tanto el rango de B es 3 y la inversa de B existe, es

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{-6}{7} \\ \frac{-4}{7} & \frac{-5}{14} & \frac{2}{7} \\ \frac{-4}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$ y es el producto:

$$B^{-1} = E^{2}{}_{3}(1/2) \,.\, E^{1}{}_{3}(-3) \,.\, E_{3}(2/7) \,.\, E^{3}{}_{2}(-1) \,.\, E_{2}((-2)^{-1}) . E^{3}{}_{1}(-2)$$

EJERCICIO 11.6.4

Hallar el rango y analizar si es que existen las inversas de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

???

EJERCICIO 11.6.5

¿ Qué relación hay entre el rango y la propiedad de ser invertible para matrices $A \in K^{n\times n}$?

7. Resolución de sistemas lineales de *m* ecuaciones con *n* incógnitas

Ya se tiene lo necesario para justificar el método de eliminación (o sumas y restas) que empleamos en la resolución de los sistemas 2 x 2 dados como ejemplo en el ***Recordatorio*** del apartado introductorio a los sistemas de ecuaciones.

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas se expresa matricialmente como

$$A.X = B$$

Siendo: $A \in K^{m\times n}$, $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ la **matriz de los coeficientes**

$X = \left(x_j\right)_{1\le j\le n}$ la **matriz de las incógnitas** (es formal)

$B \in K^{m\times 1}$, $B = (b_i)_{1\le i\le m}$ la **matriz de los términos independientes**

Resolver el sistema $A.X = B$

es hallar una matriz $X^* \in K^{n\times 1}$, $X^* = \left(x^*_j\right)_{1\le j\le n}$ tal que

$$A.X^* = B$$

Al resolver los sistemas del ejemplo se partió de un sistema y luego de un determinado número de operaciones se resolvió un sistema que formalmente no es el mismo (en su aspecto), pero se admitió que las soluciones del último sistema (el resuelto) son las soluciones del "original". Para justificar ese proceder para cualquier sistema, se demostrará un teorema luego de la siguiente definición:

Dos sistemas $A_1.X = B_1$ y $A_2.X = B_2$ **son equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución.

Esto es, toda solución de $A_1.X = B_1$ es también solución de $A_2.X = B_2$ y además toda solución de $A_2.X = B_2$ es solución de $A_1.X = B_1$.

Si $A_1.X = B_1$ y $A_2.X = B_2$ son equivalentes se indicará por

$$A_1.X = B_1 \quad \sim \quad A_2.X = B_2$$

La notación utilizada para esta relación quedará justificada pues las propiedades de la relación igualdad entre conjuntos, permiten demostrar que la relación

" $A_1.X = B_1$ y $A_2.X = B_2$ **son equivalentes** si **tienen el mismo conjunto solución**"

definida sobre el conjunto de sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas, cumple

- Todo sistema es equivalente a sí mismo:

Cualquiera sea el sistema $A_1.X = B_1$, $A_1.X = B_1$ es equivalente a $A_1.X = B_1$

- Hay simetría en la relación definida:

Si $A_1.X = B_1$ es equivalente a $A_2.X = B_2$, entonces $A_2.X = B_2$ es equivalente a $A_1.X = B_1$

- Vale la transitividad de esta relación:

Si $A_1.X = B_1$ es equivalente a $A_2.X = B_2$ y $A_2.X = B_2$ es equivalente a $A_3.X = B_3$, entonces $A_1.X = B_1$ es equivalente a $A_3.X = B_3$

Por lo tanto, la relación definida sobre los sistemas es una relación de equivalencia (es una relación reflexiva, simétrica y transitiva) ¡¡ por eso el nombre de sistemas equivalentes!! *Ah!*

EJERCICIO 11.7.1

Demostrar al menos una de las propiedades antes mencionadas, sobre los sistemas equivalentes.

♦ TEOREMA 11.7.2 **(Equivalencia de Sistemas)**

Sean $A_1.X = B_1$ y $A_2.X = B_2$ dos sistemas de m ecuaciones con n incógnitas tales que A_2 y B_2 se obtuvieron luego de aplicar una misma operación elemental sobre A_1 y sobre B_1 respectivamente. Entonces ambos sistemas son equivalentes.

Demostración:

Se debe probar que las soluciones de $A_1.X = B_1$ y $A_2.X = B_2$ son las mismas, es decir que toda solución de uno de ellos es solución del otro y recíprocamente.

Sea E la matriz que representa a la operación elemental aplicada sobre A_1 y sobre B_1 tal que:

$$A_2 = E.A_1 \quad \text{y} \quad B_2 = E.B_1 \qquad \text{(e)}$$

Dada $X^* \in K^{n\times 1}$ solución de $A_1.X = B_1$ esto es $A_1.X^* = B_1$ (1)

Si se multiplican ambos miembros de esta igualdad (1) por la matriz E (a izquierda) resulta:

$E.A_1.X^* = E.B_1$ y reemplazando por (e):

$A_2.X^* = B_2$ es decir X^* es solución de $A_2.X = B_2$.

Considerando ahora $X^{**} \in K^{n\times 1}$ solución de $A_2.X = B_2$, es decir $A_2.X^{**} = B_2$

Toda matriz elemental es invertible, entonces al multiplicar ambos miembros de esta igualdad por la inversa de la matriz elemental E (a izquierda) resulta:

$E^{-1}.A_2.X^{**} = E^{-1}.B_2$ pero, por la validez de (e) resulta $A_1.X^{**} = B_1$ es decir X^{**} es solución de $A_1X = B_1$.

♦

Si se realiza más de una operación elemental sobre $A_1.X = B_1$ para llegar a $A_2.X = B_2$, se tiene el siguiente resultado:

COROLARIO 11.7.3

Sean $A_1.X = B_1$ y $A_2.X = B_2$ dos sistemas de m ecuaciones con n incógnitas tales que $A_1 \sim_f A_2$ y $B_1 \sim_f B_2$. Si A_2 y B_2 se obtuvieron luego de aplicar las mismas operaciones elementales sobre A_1 y sobre B_1 respectivamente.

Entonces ambos sistemas $A_1.X = B_1$ y $A_2.X = B_2$ son equivalentes.



EJERCICIO 11.7.4:

Demostrar el Corolario. (Si se anima….)

(Idea: Casi igual que el teorema, use que las matrices elementales son invertibles y un producto finito de matrices invertibles es invertible, es para aplicar el método de inducción completa)

Este Corolario justifica el método que se conoce como eliminación gaussiana o método de Gauss-Jordan.

EJEMPLO 11.7.5

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_2 + x_3 + x_4 = 5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Se aplicarán operaciones elementales para llevar la matriz de los coeficientes A a su equivalente reducida por filas y escalonada.

Como se mostró antes si esas mismas operaciones elementales se realizan sobre la columna B de los términos independientes el sistema resultante será equivalente.

Para trabajar con ambas matrices a la vez se lo hace con la matriz ampliada o matriz orlada, que se construye colocando a la derecha de las columnas de A la columna que se corresponde con B.

En el ejemplo la matriz orlada resulta:

$$\left[A \middle| B\right] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Se trabajará con esta matriz con el objetivo de llevar A a su A_R

Se eliminarán los elementos de la 1er. columna de las filas 2 y 3, haciendo uso del principal de la fila 1:

$$\left[A|B\right]=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&2\\2&5&3&2&1\\3&-1&-2&1&-1\\0&3&1&1&5\end{array}\right)\sim_f\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&2\\2-2.1&5-2.1&3-2.1&2-2.1&1-2.2\\3&-1&-2&1&-1\\0&3&1&1&5\end{array}\right)$$

Es así:

$$\left[A|B\right]\sim_f\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&2\\0&3&1&0&-3\\3&-1&-2&1&-1\\0&3&1&1&5\end{array}\right)\sim_f\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&2\\0&3&1&0&-3\\3-3.1&-1-3.1&-2-3.1&1-3.1&-1-3.2\\0&3&1&1&5\end{array}\right)$$

Por tanto:

$$\left[A|B\right]\sim_f\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&2\\0&3&1&0&-3\\3&-1&-2&1&-1\\0&3&1&1&5\end{array}\right)\sim_f\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&2\\0&3&1&0&-3\\0&-4&-5&-2&-7\\0&3&1&1&5\end{array}\right)$$

Se multiplica la fila 2 por el inverso de 3 para obtener 1 como principal de esa fila:

$$\left[A|B\right]\sim_f\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&2\\0&3.3^{-1}&1.3^{-1}&0&-3.3^{-1}\\0&-4&-5&-2&-7\\0&3&1&1&5\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&2\\0&1&3^{-1}&0&-1\\0&-4&-5&-2&-7\\0&3&1&1&5\end{array}\right)$$

Así obtenido 1 como principal de la fila 2, se barre la columna 2; para la 1er. fila:

$$\left[A|B\right]\sim_f\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&2\\0&1&3^{-1}&0&-1\\0&-4&-5&-2&-7\\0&3&1&1&5\end{array}\right)\sim_f\left(\begin{array}{cccc|c}1&1-1.1&1-1.3^{-1}&1&2-1.(-1)\\0&1&3^{-1}&0&-1\\0&-4&-5&-2&-7\\0&3&1&1&5\end{array}\right)$$

$$\left[A|B\right]\sim_f\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&2\\0&1&3^{-1}&0&-1\\0&-4&-5&-2&-7\\0&3&1&1&5\end{array}\right)\sim_f\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2.3^{-1}&1&3\\0&1&3^{-1}&0&-1\\0&-4&-5&-2&-7\\0&3&1&1&5\end{array}\right)$$ para la 3er. fila:

$$\left[A|B\right]\sim_f\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2.3^{-1}&1&3\\0&1&3^{-1}&0&-1\\0&-4&-5&-2&-7\\0&3&1&1&5\end{array}\right)\sim_f\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2.3^{-1}&1&3\\0&1&3^{-1}&0&-1\\0&-4+4.1&-5+4.3^{-1}&-2&-7+4.(-1)\\0&3&1&1&5\end{array}\right)$$

$$\left[A|B\right]\sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2.3^{-1} & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3^{-1} & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & -7 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2.3^{-1} & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3^{-1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -11.3^{-1} & -2 & -11 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

para la 4ta. fila:

$$\left[A|B\right]\sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2.3^{-1} & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3^{-1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -11.3^{-1} & -2 & -11 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2.3^{-1} & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3^{-1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -11.3^{-1} & -2 & -11 \\ 0 & 3-3.1 & 1-3.3^{-1} & 1 & 5-3.(-1) \end{array}\right)$$

Haciendo las cuentas se tiene $\left[A|B\right]\sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2.3^{-1} & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3^{-1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -11.3^{-1} & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$

Se transformará en 1 el principal de la fila 3, multiplicando por el inverso de -11.3^{-1}, es decir -3.11^{-1}

$$\left[A|B\right]\sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2.3^{-1} & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3^{-1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -11.3^{-1}(-\frac{3}{11}) & -2.(-\frac{3}{11}) & -11.(-\frac{3}{11}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2.3^{-1} & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3^{-1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{11} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

Con la fila 3 se barre la columna 3:

$$\left[A|B\right]\sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3^{-1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{11} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3}-\frac{2}{3}.1 & 1-\frac{2}{3}.\frac{6}{11} & 3-\frac{2}{3}.3 \\ 0 & 1 & 3^{-1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{11} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

$$\left[A|B\right]\sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 7.11^{-1} & 1 \\ 0 & 1 & 3^{-1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{11} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 7.11^{-1} & 1 \\ 0 & 1 & 3^{-1}-3^{-1}.1 & 0-3^{-1}..\frac{6}{11} & -1-3^{-1}.3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{11} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

$$\left[A|B\right]\sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 7.11^{-1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2.11^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6.11^{-1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

Con el 1 de la 4ta. fila se barre la columna 4:

$$\left[A|B\right]\sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 7.11^{-1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2.11^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6.11^{-1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)\sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 7.11^{-1}-7.11^{-1}.1 & 1-7.11^{-1}.8 \\ 0 & 1 & 0 & -2.11^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6.11^{-1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -45.11^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & -2.11^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6.11^{-1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

$$\left[A|B\right]\sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -45.11^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & -2.11^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6.11^{-1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)\sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -45.11^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & -2.11^{-1}+2.11^{-1} & 0+2.11^{-1}.8 \\ 0 & 0 & 1 & 6.11^{-1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

$$\left[A|B\right]\sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -45.11^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 16.11^{-1}. \\ 0 & 0 & 1 & 6.11^{-1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)\sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -45.11^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 16.11^{-1}. \\ 0 & 0 & 1 & 6.11^{-1}-6.11^{-1}.1 & 3-6.11^{-1}.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

Y resulta:

$$\left[A|B\right]\sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -45.11^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 16.11^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -37.11^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

Reinterpretando esta matriz ampliada como ecuación matricial se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -45.11^{-1} \\ 16.11^{-1} \\ -37.11^{-1} \\ 8 \end{pmatrix}$$

Que por los resultados anteriores es un sistema equivalente al dado.

El producto del primer miembro es la matriz columna de las incógnitas.

La solución es única y es la matriz columna de 4 filas:

$$\begin{pmatrix} x^*_1 \\ x^*_2 \\ x^*_3 \\ x^*_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45.11^{-1} \\ 16.11^{-1} \\ -37.11^{-1} \\ 8 \end{pmatrix}$$

El método de resolución es fácil pero trabajoso. Es importante al menos ayudarse con una calculadora.

EJEMPLO 11.7.6

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 = 10 \\ 3x_2 + x_3 + x_4 = 5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Se empleará el mismo método de eliminación del ejemplo anterior. Construida la matriz ampliada:

$$\left[A | B \right] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & 8 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Se trabaja con el propósito de llevar las columnas correspondientes a A a la reducida por filas y escalonada equivalente.

Con el 1 principal de la 1ra. fila se barrerá la 1er. columna. Para ello es necesario eliminar el 2 de la segunda fila y el 5 de la tercera fila.

Se realizarán esas dos operaciones sobre esas filas de manera simultánea:

$$\left[A | B \right] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & 8 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2-2.1 & -1-2.1 & 3-2.2 & -1-2.2 & 4-2.5 \\ 5-5.1 & -1-5.1 & 8-5.2 & 0-5.2 & 10-5.5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Se obtiene así:

$$\left[A|B\right] \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & -6 & -2 & -10 & -15 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

se transforma en 1 el principal de la 2da. fila multiplicando por el inverso de -3:

$$\left[A|B\right] \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3^{-1} & 5.3^{-1} & 2 \\ 0 & -6 & -2 & -10 & -15 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Con el principal de la segunda fila se barre la 2da. columna, las tres operaciones necesarias se realizarán en simultaneo:

$$\left[A|B\right] \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3^{-1} & 5.3^{-1} & 2 \\ 0 & -6 & -2 & -10 & -15 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1-1.1 & 2-1.3^{-1} & 2-1.5.3^{-1} & 5-1.2 \\ 0 & 1 & 3^{-1} & 5.3^{-1} & 2 \\ 0 & -6+6.1 & -2+6.3^{-1} & -10+6.5.3^{-1} & -15+6.2 \\ 0 & 3-3.1 & 1-3.3^{-1} & 1-3.5.3^{-1} & 5-3.2 \end{array}\right)$$

Resulta:

$$\left[A|B\right] \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5.3^{-1} & 3^{-1} & 3 \\ 0 & 1 & 3^{-1} & 5.3^{-1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right)$$ siguiendo con el objetivo, se permutan las filas 3 y 4:

$$\left[A|B\right] \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5.3^{-1} & 3^{-1} & 3 \\ 0 & 1 & 3^{-1} & 5.3^{-1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right) \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5.3^{-1} & 3^{-1} & 3 \\ 0 & 1 & 3^{-1} & 5.3^{-1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

transformando en 1 el principal de la 3er. fila, multiplicando por el inverso de -4 esa fila:

$$\left[A|B\right] \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5.3^{-1} & 3^{-1} & 3 \\ 0 & 1 & 3^{-1} & 5.3^{-1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Para lograr la A_R reducida por filas escalonada equivalente con A, se debe barrer la cuarta columna, haremos las dos operaciones necesarias de manera simultánea:

$$\left[A|B\right]\sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5.3^{-1} & 3^{-1} & 3 \\ 0 & 1 & 3^{-1} & 5.3^{-1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5.3^{-1} & 3^{-1}-1.3^{-1} & 3-1.3^{-1} \\ 0 & 1 & 3^{-1} & 5.3^{-1}-1.5.3^{-1} & 2-1.5.3^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

¿Qué ocurre si reinterpretamos el sistema matricial?:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5.3^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 3^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -2^{-1} \\ -3 \end{pmatrix}$$

Si se efectúa la multiplicación indicada en el primer miembro, resulta que el elemento de la cuarta fila del producto se debe igualar con el de la cuarta fila del segundo miembro:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -3$$

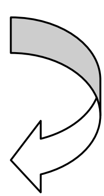
Lo que significa que ninguna 4-upla de elementos de K lo cumple.

El sistema NO tiene solución.

En general si al resolver por este método un sistema $A.X = B$, si por operaciones elementales sobre la matriz ampliada $\left[A|B\right]$ se llega a una matriz equivalente cuyo aspecto es:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \vdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

el **sistema no tiene solución si** $\boldsymbol{b_k \neq 0}$.



Pues esta línea significa cuando se reinterpreta como sistema:

$$0.x_1 + 0.x_2 + \cdots + 0.x_n = b_k$$

Es decir: $\boldsymbol{0 = b_k \neq 0}$ **lo que es absurdo.**

EJEMPLO 11.7.7

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 5x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_2 + x_3 + x_4 = 5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Se empleará el mismo método de eliminación. Construida la matriz ampliada:

$$\left[A|B\right] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & -5 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Por operaciones elementales se eliminarán los elementos de la 1ra. columna utilizando el 1 de la 1ra. fila:

$$\left[A|B\right] \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 3-3.1 & -1-3.3 & 1-3.(-1) & -1-3.(-2) & 3-3.1 \\ 5-5.1 & -5-5.3 & 3-5.(-1) & 0-5.(-2) & 5-5.1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$ resulta entonces:

$$\left[A|B\right] \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -10 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & -20 & 8 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$ Transformamos en 1 el elemento principal de la fila 2:

$$\left[A|B\right] \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -10.(-10)^{-1} & 4.(-10)^{-1} & 5.(-10)^{-1} & 0 \\ 0 & -20 & 8 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2.5^{-1} & -2^{-1} & 0 \\ 0 & -20 & 8 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Se barre la columna 2 con operaciones elementales convenientes:

$$\left[A|B\right] \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2.5^{-1} & -2^{-1} & 0 \\ 0 & -20 & 8 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3-3.1 & -1-3.(-2.5^{-1}) & -2-3.(-2^{-1}) & 1 \\ 0 & 1 & -2.5^{-1} & -2^{-1} & 0 \\ 0 & -20+20.1 & 8+20.(-2.5^{-1}) & 10+20.(-2^{-1}) & 0 \\ 0 & 3-3.1 & 1-3.(-2.5^{-1}) & 1-3.(-2^{-1}) & 5 \end{array}\right)$$

y haciendo las cuentas, se tiene:

$$\left[A|B\right] \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5^{-1} & -2^{-1} & 1 \\ 0 & 1 & -2.5^{-1} & -2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11.5^{-1} & 5.2^{-1} & 5 \end{array}\right)$$

¡ATENCION!

¿Es ésta situación como en el ejemplo anterior?

NO, pues también es 0 el elemento que corresponde a los términos independientes.

Interpretado como sistema conduce a la ecuación:

$0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 = 0$ o sea 0 = 0

Por lo cual continuamos. Permutando las filas 3 y 4:

$$\left[A|B\right] \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5^{-1} & -2^{-1} & 1 \\ 0 & 1 & -2.5^{-1} & -2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 11.5^{-1} & 5.2^{-1} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Se transforma en 1 el elemento principal de la fila 3:

$$\left[A|B\right] \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5^{-1} & -2^{-1} & 1 \\ 0 & 1 & -2.5^{-1} & -2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 11.5^{-1}.5.11^{-1} & 5.2^{-1}.5.11^{-1} & 5.5.11^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5^{-1} & -2^{-1} & 1 \\ 0 & 1 & -2.5^{-1} & -2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 25.22^{-1} & 25.11^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Para concluir se barre la columna 3 con el 1 de la fila 3 por dos operaciones elementales:

$$\left[A|B\right] \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5^{-1} & -2^{-1} & 1 \\ 0 & 1 & -2.5^{-1} & -2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 25.22^{-1} & 25.11^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim_f$$

$$\sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5^{-1} - 5^{-1}.1. & -2^{-1} - 5^{-1}.25.22^{-1} & 1 - 5^{-1}.25.11^{-1} \\ 0 & 1 & -2.5^{-1} + 2.5^{-1}.1 & -2^{-1} + 2.5^{-1}.25.22^{-1} & 0 + 2.5^{-1}.25.11^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 25.22^{-1} & 25.11^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Haciendo las cuentas:

$$\left[A|B\right] \sim_f \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -8.11^{-1} & 6.11^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & -22^{-1} & 10.11^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 25.22^{-1} & 25.11^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Ahora se interpreta como sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -8.11^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & -22^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 25.22^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.11^{-1} \\ 10.11^{-1} \\ 25.11^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 \qquad -\frac{8}{11}x_4 = \frac{6}{11} \\ \quad x_2 \quad -\frac{1}{22}x_4 = \frac{10}{11} \\ \qquad x_3 + \frac{25}{22}x_4 = \frac{25}{11} \\ \qquad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones.

Por la manera que se ha trabajado, conviene despejar de la manera:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{6}{11} + \frac{8}{11}x_4 \\ x_2 &= \frac{10}{11} + \frac{1}{22}x_4 \\ x_3 &= \frac{25}{11} - \frac{25}{22}x_4 \end{aligned} \qquad \text{(S)}$$

Al dar valores arbitrarios complejos a x_4, se obtienen los de x_1, x_2 y x_3.

Tiene infinitas soluciones en $\mathbb{C}$ pues para cualquier valor complejo que tome x_4 quedará determinada una 4-upla con los valores que resulten al sustituir en las condiciones (S).

Por ejemplo una solución es:

la 4-upla $x^*_1 = \frac{6}{11}, \quad x^*_2 = \frac{10}{11}, \quad x^*_3 = \frac{25}{11} \quad , x^*_4 = 0$

Otros ejemplos de solución del sistema son las 4-uplas:

$$x^*_1 = \frac{14}{11}, \quad x^*_2 = \frac{31}{22}, \quad x^*_3 = \frac{25}{22} \quad , x^*_4 = 1$$

$$x^*_1 = \frac{6}{11} + \frac{8}{11}i, \quad x^*_2 = \frac{10}{11} + \frac{1}{22}i, \quad x^*_3 = \frac{25}{11} - \frac{25}{22}i \quad , x^*_4 = i$$

EJEMPLO 11.7.8

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + \quad 6x_2 \quad = 0 \\ -x_1 - \quad 3x_2 \quad = 0 \\ x_1 + \quad 3x_2 \quad = 0 \end{cases}$$

La particularidad que se quiere destacar de este sistema es que los términos independientes son todos 0.

Por ello se llama **sistema homogéneo**.

Es un caso particular de sistemas de la forma:

$$A.X = 0$$

$$B = 0 \in K^{m\times 1}, \quad 0 = (o_i)_{1\le i\le m} \quad \wedge \quad o_i = 0, \text{ para todo } i \text{ tal } 1 \le i \le m$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se formará la matriz orlada. ¿ Qué ocurrirá con la columna de los términos independientes?



Se sumarán 0´s ó permutarán 0´s. Esos elementos no se modificarán.

¿Está de acuerdo? Piense bien y se dará cuenta....

Por esta razón si el sistema es homogéneo se trabaja sólo con *A* en lugar de la matriz ampliada [*A*|*O*].

En este ejemplo para tener un 1 como principal de la 1ra. fila se permutan las filas 1 y 3; luego se barre la primer columna sumando a la fila 2 una vez la fila 1 y restando a la fila 3 dos veces la fila 1:

$$[A] = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1+1.1 & -3+1.3 \\ 2-2.1 & 6-2.3 \end{pmatrix}$$ y haciendo cuentas se obtiene:

$$[A] \sim_f \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Reconstruyendo el sistema: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases}$

Las dos últimas ecuaciones no imponen condiciones sobre las incógnitas.

La primera ecuación

$x_1 + 3x_2 = 0$ es la que da la condición que deben cumplir los elementos de los pares solución

Hay infinitas soluciones en $\mathbb{C}$, todos los pares: $x^*_1 = -3.x^*_2$. Por ejemplo

$$x^*_1 = 0, \quad x^*_2 = 0;$$

$$x^*_1 = -3, \quad x^*_2 = 1; \qquad x^*_1 = -3i, \quad x^*_2 = i; \qquad x^*_1 = 6, \quad x^*_2 = -2$$

Es de destacar que el par $\boxed{x^*_1 = 0, \quad x^*_2 = 0}$ es solución.

Esta solución se puede desprender sin hacer las operaciones, por las características de los términos independientes es inmediato (seguro??).

Cualquiera sea el sistema homogéneo

$$A.X = 0$$

de m ecuaciones con n incógnitas, la ***n*-upla** tal que **todos sus elementos son 0 es una solución.**

El sistema puede admitir otras soluciones (como en el ejemplo).

La solución de todos **0** se llama **solución nula** o **solución trivial** (esto es porque siempre es solución)

EJERCICIO 11.7.9

Compruebe las afirmaciones hechas sobre las soluciones de los sistemas homogéneos.

EJERCICIO 11.7.10

Resuelva los siguientes sistemas por eliminación:

$$\begin{cases} x \quad + z - w = 0 \\ x - y - z \quad = -2 \\ x - y \quad - w = -3 \\ y + z - w = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 3y + 5z = 6 \\ 3x + 2y + 2z = 3 \\ -7x - 12y + 4z = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + 2z + w = 4 \\ 2x + 3y + 3z - w = 2 \\ 2x - 2y - 4z + 4w = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \quad + z - w = 0 \\ x - y - z \quad = 0 \\ x - y \quad - w = 0 \\ y + z - w = 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 11.7.11

a) Dé un sistema 2 x 2 con A de elementos en $\mathbb{R}$ con infinitas soluciones. ¿Puede decir algo sobre la matriz de los coeficientes?

b) Dé un sistema 2 x 2 con A de elementos en $\mathbb{C}$ con infinitas soluciones. ¿Puede decir algo sobre la matriz de los coeficientes?

c) Dé un sistema 2 x 2 con A de elementos en $\mathbb{R}$ con solución única. ¿Puede decir algo sobre la matriz de los coeficientes?

d) Dé un sistema 2 x 2 con A de elementos en $\mathbb{C}$ con solución única. ¿Puede decir algo sobre la matriz de los coeficientes?

e) Si cambia por n x n, qué respuesta puede dar a preguntas similares a las anteriores.

EJERCICIO 11.7.12

a) ¿Puede encontrar un sistema *m* x *n* con solución única?

b) Si un sistema es homogéneo ¿cuándo tiene solución única?

CAPÍTULO 12
Determinantes y sus aplicaciones

Se introducirá un concepto ligado a las matrices, sus ***determinantes,*** que en este Curso se aplicará en el cálculo de inversa de matrices, determinar si una matriz es invertible y además a la resolución de sistemas.

También el determinante dará otra posibilidad de definir rango de matrices, que permitirá obtener de una manera más eficiente el teorema fundamental sobre los sistemas de ecuaciones que es el teorema de Rouché-Frobenius que caracteriza los sistemas por su conjunto solución. La demostración del teorema se hará en este Curso en un capítulo posterior como aplicación de espacios vectoriales.

1. ¿Qué es un determinante?

El **determinante** es un "valor" asociado a una **matriz**.

¿Qué valor? *¿De qué manera se asocia*?

Dada una matriz A de n ***filas*** y ***n columnas*** de elementos de K, cuerpo conmutativo, el **determinante de** A es un elemento de K, único para cada matriz.

Esta función se puede expresar

$$\det : K^{n\times n} \to K \quad \text{es decir } \det(A) \in K$$

Notaciones:

para indicar el determinante de A se utilizan indistintamente *det(A)* , *D(A)* ó $|A|$

y si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ para referirse a su determinante se anota:

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Es así que dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3i+2 & 1 & 0 \\ 0 & 3i & 1 \end{pmatrix}$ $\quad det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3i+2 & 1 & 0 \\ 0 & 3i & 1 \end{vmatrix}$ pero ¿cuál es el valor $det(A)$?

De las muchas maneras de definir el determinante de una matriz se adopta la que se considera más sencilla y que permitirá concluir las propiedades que interesan en este Curso de manera rápida.

Para abordar la definición de $det(A)$, que es recursiva, habrá que introducir algunas definiciones complementarias.

- Dada una matriz de ***una fila y una columna***:

$$A = (a_{11}) \text{ entonces } det(A) = |a_{11}| = a_{11}$$

- Dada una matriz genérica de n fila y n columnas:

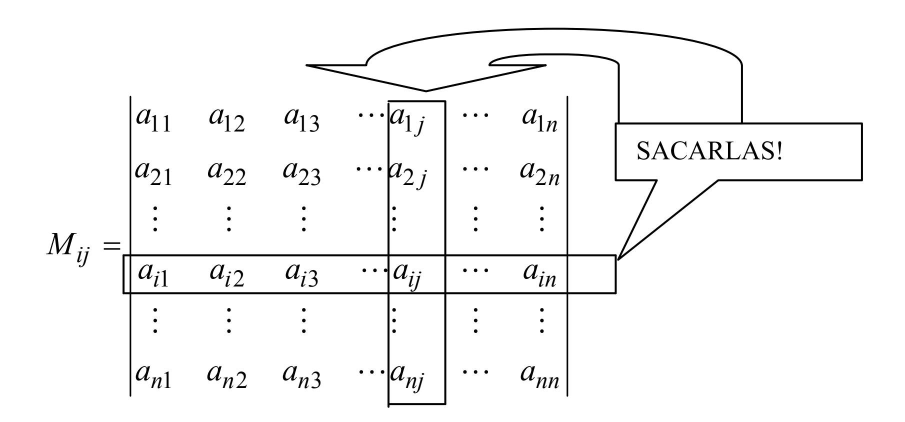
El elemento genérico:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

a_{ij}
i :la fila
j:la columna

Se llama **cofactor de** a_{ij} o **cofactor respecto de** a_{ij} y se anota A_{ij} al número $(-1)^{i+j}.M_{ij}$, *los exponentes de* -1 *indican la suma de la posición de fila y columna en que se encuentra el elemento* a_{ij} *dentro de la matriz.*

Siendo M_{ij} el determinante de la matriz que se obtiene de A si se suprimen la fila i y la columna *j* , es decir de una matriz de orden n-*1* (¿para lo cual cómo debe ser n ?). Por lo cual a M_{ij} se lo llama **menor**, que siendo precisos es el menor **correspondiente al elemento** a_{ij} **.**



Es así que:

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1\,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{n\,n} \end{vmatrix}$$

EJEMPLO 12.1.1

Si

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \qquad det(A)=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -i \end{vmatrix}$$

los menores son:

$$M_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -i \end{vmatrix}=\left|-i\right|=-i \qquad M_{12}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -i \end{vmatrix}=\left|-1\right|=-1$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -i \end{vmatrix}=\left|3\right|=3 \qquad M_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -i \end{vmatrix}=\left|2\right|=2$$

Por lo tanto los cofactores son:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=(-1)^{2}(-i)=-i \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=(-1)^{3}(-1)=1$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=(-1)^{3}.3=-3 \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=(-1)^{4}.2=2$$

- Dada $A \in K^{n\times n}, \quad n \geq 2$ se llama **determinante de A** al valor:

$$det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj} A_{sj}$$ para cualquier i y para cualquier *j*

Observar que la primer sumatoria se extiende sobre los índices de columna de los elementos de la fila i de A, por eso se dice que es el **desarrollo por la fila *i*.**

La segunda sumatoria se extiende sobre los índices de fila de los elementos de la columna *j* de A, se lo llama **desarrollo por la columna *j***.

Es así que el cálculo del determinante de una matriz A de orden n involucra el cálculo de n determinantes de matrices de orden *n-1*, los menores correspondientes a los elementos de la fila (o columna) por la cual se desarrolla *det(A)*.

Se ha planteado que esos desarrollos son iguales y que ese único valor es el determinante de A. Es demostrable por inducción sobre el número de filas o columnas... que ambos desarrollos coinciden (en el Curso se lo aceptará sin demostración, está en el Apéndice del capítulo).

EJEMPLO 12.1.2

a) Usando los cofactores calculados en el ejemplo anterior, calcular el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

Por la fila 1: $det(A) = \sum_{k=1}^{2} a_{1k} A_{1k} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = 2.(-i) + 3.1 = 3 - 2i$

b) Comprobar para esta matriz que por cualquier fila o columna el valor del desarrollo es único

c) Por la fila 2: $det(A) = \sum_{k=1}^{2} a_{2k} A_{2k} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} = -1.(-3) + (-i).2 = 3 - 2i$

Por la columna 1: $det(A) = \sum_{s=1}^{2} a_{s1} A_{s1} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} = 2.(-i) + (-1).(-3) = 3 - 2i$

Por la columna 2: $det(A) = \sum_{s=1}^{2} a_{s2} A_{s2} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} = 3.1 + (-i).2 = 3 - 2i$

EJEMPLO 12.1.3

Comprobar que está bien definido el determinante (es decir no depende de la fila o columna por la que se desarrolle) para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Por la fila 1:

$$det(A) = \sum_{k=1}^{2} a_{1k} .A_{1k} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k} .(-1)^{1+k} M_{1k} = a_{11}(-1)^{1+1}.M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}.M_{12}$$

calculando los menores,

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = |a_{22}| = a_{22} \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = |a_{21}| = a_{21}$$

reemplazando en el desarrollo definido:

$$det(A) = a_{11}(-1)^{1+1}.M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}.M_{12} = a_{11}(-1)^{1+1}.a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2}.a_{21} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

Por la fila 2:

$$det(A) = \sum_{k=1}^{2} a_{2k} .A_{2k} = \sum_{k=1}^{2} a_{2k} .(-1)^{2+k} M_{2k} = a_{21}(-1)^{2+1}.M_{21} + a_{12}(-1)^{2+2}.M_{22}$$

calculando los menores necesarios para este caso:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = |a_{12}| = a_{12} \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = |a_{11}| = a_{11}$$

reemplazando en el desarrollo:

$$det(A) = a_{21}(-1)^{2+1}.M_{21} + a_{22}(-1)^{2+2}.M_{22} = a_{21}(-1)^{2+1}.a_{12} + a_{22}(-1)^{2+2}.a_{11} = -a_{21}.a_{12} + a_{22}.a_{11}$$

Por la columna 1:

$$det(A) = \sum_{s=1}^{2} a_{s1} .A_{s1} = \sum_{s=1}^{2} a_{s1} .(-1)^{s+1} M_{s1} = a_{11}(-1)^{1+1}.M_{11} + a_{21}(-1)^{2+1}.M_{21}$$

usando los cálculos de los menores y reemplazando:

$$det(A) = a_{11}(-1)^{1+1}.M_{11} + a_{21}(-1)^{2+1}.M_{21} = a_{11}(-1)^{1+1}.a_{22} + a_{21}(-1)^{2+1}.a_{12} = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$$

Por la columna 2:

$$det(A)=\sum_{s=1}^{2} a_{s2}.A_{s2}=\sum_{s=1}^{2} a_{s2}.(-1)^{s+2}M_{s2}=a_{12}(-1)^{1+2}.M_{12}+a_{22}(-1)^{2+2}.M_{22}$$

usando los cálculos de los menores y reemplazando:

$$det(A)=a_{12}(-1)^{1+2}.M_{12}+a_{22}(-1)^{2+2}.M_{22}=a_{12}(-1)^{1+2}.a_{21}+a_{22}(-1)^{2+2}.a_{11}=-a_{12}.a_{21}+a_{22}.a_{11}$$

¿Qué se ha comprobado? Que es independiente por la fila o columna que se desarrolle:

$$det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}.a_{22}-a_{12}.a_{21}$$

y este valor concuerda con (el concepto que alguno de los alumnos puede haber estudiado antes…) la *forma práctica de cálculo de determinante para matrices 2 x 2:*

¡Yo lo sabía!

Multiplicar entre si los elementos de la diagonal principal y restar el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

EJEMPLO 12.1.4

Calcular el determinante de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 2 & 0 & -1 \\ 22+i & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Según la definición, es indistinto calcular el determinante de una matriz por cualquier fila o columna. Si se están realizando las cuentas a mano es importante elegir la fila o columna que tenga la mayor cantidad de 0, pues esa elección permitirá no calcular algunos menores.

En este ejemplo ese cálculo no es muy complicado ya que los menores son 2 x 2 y vimos que hay una regla práctica muy práctica, pero este no es el caso en órdenes superiores.

Por las características de esta matriz se elige la columna 2:



$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 2 & 0 & -1 \\ 22+i & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0.(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 22+i & 0 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2i \\ 22+i & 0 \end{vmatrix} + 5.(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2i \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Es así que los cálculos son muy sencillos, en un principio se tendrían que calcular tres menores 2 x 2, pero sólo uno será necesario calcular:

$$det(A) = 5.(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2i \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5.(-1).[1.(-1) - 2.2i] = -5.[-1 - 4i] = 5 + 20i$$

Observación: los exponentes de -1 en la definición de los cofactores de un elemento (suma de los índices de fila y columna) son sucesivamente pares e impares. Los correspondientes a los elementos de la diagonal son pares. En la práctica, una vez determinado el signo de un cofactor se usa el opuesto para el correspondiente al elemento vecino.

EJERCICIO 12.1.5

a) Verificar que el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ es

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{21}.a_{32}.a_{13} + a_{12}.a_{23}.a_{31} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{23}.a_{32}.a_{11}$$

(Idea: calcúlelo por la fila o columna que prefiera)

b) Idee una forma práctica de recordarlo.

El cálculo manual de los determinantes es trabajoso. Además en los elementos electrónicos al requerir del cálculo de varios productos, si el orden de la matriz es grande, utilizan mucha memoria de máquina. Pero hay una serie de propiedades que haciendo buen uso de ellas facilitan la tarea.

Seguidamente se enuncian propiedades que luego se aplicarán en los ejemplos.

Propiedades de los determinantes 12.1.6

Teorema 1:

♦ Sea $A \in K^{n\times n}$ entonces $det(A) = det(A^t)$

Es inmediata a partir de la definición.

Calculando el determinante de A por cualquier fila o cualquier columna se obtiene igual resultado y las filas de A son las columnas de su traspuesta y viceversa.

Teorema 2:

♦Sea $A \in K^{n\times n}$, si una fila (o columna) de A se multplica por $k \in K$, se obtiene la matriz A' y entonces $det(A') = k.\,det(A)$

Demostración:

Calcular el determinante de A' por la fila (o columna) que se multiplicó por la constante k.

Observemos como es A', para fijar ideas supongamos que la fila i-ésima de A es la multiplicada por la constante k, y todas las otras filas de A no se modifican:

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix} = \left(a'_{sp}\right)_{\substack{1\le s\le n \\ 1\le p\le n}} \quad \text{tal que } a'_{sp} = \begin{cases} a_{sp} & \text{si } s \ne i \\ k.a_{sp} & \text{si } s = i \end{cases}$$

$det(A') = \sum_{h=1}^{n} a'_{ih}.A'_{ih} = \sum_{h=1}^{n} k.a_{ih}.(-1)^{i+h} M'_{ih}$, como el menor M'_{ih} no tiene la fila *i*-ésima de A' ni su columna *h*-ésima, y siendo la única fila que difieren A y A' la *i*-ésima, luego

$$M'_{ih} = M_{ih}$$

por lo tanto por la definición de determinante y propiedades de la sumatoria

$$det(A') = \sum_{h=1}^{n} a'_{ih}.A'_{ih} = k.\sum_{h=1}^{n} a_{ih}.(-1)^{i+h} M_{ih} = k.\,det(A)$$

♦

Corolario 3:

♦ Sea $A \in K^{n \times n}$, si una fila (o columna) de A es nula, entonces $det(A) = 0$

(Idea de la demostración: calcular el determinante de A por la fila (o columna) nula o aplicar propiedad anterior para k = 0)

Teorema 4:

♦ Sea $A \in K^{n \times n}$ con $n \geq 2$. Si se intercambian dos filas (o columnas), se obtiene de A la matriz A' y entonces $det(A') = -\ det(A)$

Demostración:

Se realiza por inducción sobre el número de filas de A.

Formalicemos la propiedad a demostrar enunciando un esquema proposicional y probar que vale para todo n natural mayor o igual que 2.

P(*t*): Sea $A \in K^{t \times t}$ con $t \geq 2$. Si se intercambian dos filas (o columnas), se obtiene de A la matriz A' y entonces $det(A') = -\ det(A)$

La base de la inducción es 2. ¿De acuerdo?

P(*2*): Sea $A \in K^{2 \times 2}$. Si se intercambian dos filas (o columnas), se obtiene de A la matriz A' y entonces $det(A') = -\ det(A)$

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, como se sabe $det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$.

Si intercambiamos dos filas de A, resulta $A' = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$, y se sabe que

$$det(A') = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21}.a_{12} - a_{11}.a_{22}\,.$$

Por lo cual sólo resta mirar con atención ambos cálculos, y ver que *P*(*2*) es válida.

Luego prosigamos, aceptando que para cualquier *h* >*2,* vale *P*(*h*), esto es:

P(*h*): Sea $A \in K^{h \times h}$ con $h \geq 2$. Si se intercambian dos filas (o columnas), se obtiene de A la matriz A' y entonces $det(A') = -\ det(A)$

Ahora debemos probar *P*(*h+1*), es decir :

P(*h+1*):Sea $A \in K^{(h+1)\times(h+1)}$ con $h \geq 2$. Si se intercambian dos filas (o columnas), se obtiene de A la matriz A' y entonces $det(A') = -\ det(A)$.

Como el determinante de una matriz no cambia por cual fila se desarrolle, y como en este caso se tiene más de dos filas en A y en $A´$ se desarrollan los determinantes de ambas matrices por una fila m distinta de las dos que se han intercambiado.

Para fijar ideas, supongamos que son la i-ésima y la *j*-ésima las que se intercambiaron en A.

Por lo cual la matriz $A´$ es como A salvo que en su fila i están los elementos de la fila *j* de A y en su fila *j* los elementos de la fila i de A.

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & \cdots & a'_{1\,h+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & \cdots & a'_{i\,h+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{j1} & a'_{j2} & \vdots & \vdots & a'_{jh+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{h+1\,1} & a'_{h+1\,2} & \cdots & \cdots & a'_{h+1\,h+1} \end{pmatrix} = \left(a'_{s\,p}\right)_{\substack{1\leq s\leq h+1 \\ 1\leq p\leq h+1}} \text{ tal que}$$

$$a'_{s\,p} = \begin{cases} a_{s\,p} & \text{si } s \neq i \wedge s \neq j \\ a_{j\,p} & \text{si } s = i \\ a_{i\,p} & \text{si } s = j \end{cases}$$

Donde la matriz A es

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1h+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2h+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{h+11} & a_{h+12} & \cdots & a_{h+1h+1} \end{pmatrix} \text{ así } det(A) = \sum_{k=1}^{h+1} a_{m\,k} A_{m\,k}$$

Siendo $A_{m\,k} = (-1)^{m+k}\, M_{m\,k}$

Por la definición $det(A') = \sum_{k=1}^{h+1} a'_{mk} . A'_{mk}$. Siendo $A'_{m\,k} = (-1)^{m+k}\, M'_{m\,k}$

Analicemos detenidamente los elementos que están en las expresiones de ambos determinantes: $a'_{m\,k} = a_{m\,k}$, además $A'_{m\,k} = (-1)^{m+k}\, M'_{m\,k}$ y $A_{m\,k} = (-1)^{m+k}\, M_{m\,k}$

La expresión de los cofactores difieren en $M'_{m\,k}$ y $M_{m\,k}$, pero éstos son determinantes de matrices h x h, y los $M'_{m\,k}$ son determinantes de matrices que tienen permutadas dos filas (la i y la j de A) respecto de los $M_{m\,k}$. Luego por hipótesis inductiva vale que

$$M'_{m\,k} = - M_{m\,k} .$$

Y reemplazando y aplicando propiedades de sumatoria se obtiene:

$$det(A') = \sum_{k=1}^{h+1} a_{mk} .(-1) A_{mk} = -1. \sum_{k=1}^{h+1} a_{mk} . A_{mk} = -1 . det(A)$$

Por lo cual, se ha probado que vale *P*(*h*+*1*).

Luego vale para todo n mayor que 2. Luego obtenemos lo que queríamos demostrar

♦

Teorema 5:

♦ Sea $A \in K^{n \times n}$ con $n \geq 2$. Si tiene dos filas (o columnas) iguales entonces *det(A)=0*

(Idea de la demostración: Se intercambian esas dos filas (o columnas), *piense que resulta* y se aplica la propiedad anterior)

Teorema 6:

♦ Sea $A \in K^{n \times n}$ con $n \geq 2$. Si tiene dos filas (o columnas) proporcionales entonces *det(A)=0*

Observar que significa ese enunciado, es decir que significa dos filas proporcionales en una matriz:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & a_{h3} & \cdots a_{hj} & \cdots & a_{hn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & a_{h3} & \cdots a_{hj} & \cdots & a_{hn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{h1} & ka_{h2} & ka_{h3} & \cdots ka_{hj} & \cdots & ka_{hn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(Idea de la demostración: Se aplican la segunda propiedad demostrada y la inmediata anterior)

Teorema 7:

♦ Sea $A \in K^{n\times n}$, si los elementos de la fila i de A son binomios, de la forma $a_{ij}^1 + a_{ij}^2$ para $1 \leq j \leq n$ entonces el determinante de A es igual a la suma de los determinantes de dos matrices A^1 y A^2 que tiene todas sus filas como las de A, salvo la fila i. En la fila i de A^1 está a_{ij}^1 $(1 \leq j \leq n)$ y en la fila i de A^2 está a_{ij}^2 $(1 \leq j \leq n)$

También vale de manera similar si una columna de A cumple la propiedad que sus elementos sean binomios.

Observar como es el aspecto de las matrices que verifican la situación del enunciado:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}^1 + a_{i1}^2 & a_{i2}^1 + a_{i2}^2 & a_{i3}^1 + a_{i3}^2 & \cdots a_{ij}^1 + a_{ij}^2 & \cdots & a_{in}^1 + a_{in}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Y las A^1 y A^2 :

$$|A^1| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}^1 & a_{i2}^1 & a_{i3}^1 & \cdots a_{ij}^1 & \cdots & a_{in}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad |A^2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}^2 & a_{i2}^2 & a_{i3}^2 & \cdots a_{ij}^2 & \cdots & a_{in}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Demostración:

Se calcula el determinante de A por esa fila i tan particular:

$$det(A) = \sum_{k=1}^{n} (a^1{}_{ik} + a^2{}_{ik}) A_{ik}$$ aplicando propiedades del cuerpo K y de sumatoria:

$$det(A) = \sum_{k=1}^{n} a^1{}_{ik} A_{ik} + \sum_{k=1}^{n} a^2{}_{ik} A_{ik}$$

pero las dos sumatorias que se están sumando son los determinantes de A^1 y A^2 desarrollados por esa misma fila i, pues los cofactores de las tres matrices respecto a los elementos de sus respectivas i-ésimas filas son iguales, pues es la i-ésima es en única fila en que difieren las tres matrices.

♦

Recomendación: así practica un poco, haga la demostración si se verifica para una fila….



Teorema 8:

♦ Sea $A \in K^{n \times n}$, si los elementos de la fila i de A son suma de m términos, de la forma $a_{ij}^1 + \ldots + a_{ij}^m$ para $1 \leq j \leq n$ entonces el determinante de A es igual a la suma de los determinantes de m matrices $A^1, \ldots$ y A^m que tiene todas sus filas como las de A, salvo la fila i.

En la fila i de A^1 está a_{ij}^1 $(1 \leq j \leq n)$,... y en la fila i de A^m está a_{ij}^m $(1 \leq j \leq n)$.

Similar resultado si es una columna de A, con esas características.

(Idea de la demostración: por inducción sobre el número m de términos y aplicar la demostración de la propiedad anterior y la idea de su demostración)

Teorema 9:

♦ Sea $A \in K^{n \times n}$ con $n \geq 2$. Si a una fila (o columna) de A se le suma un múltiplo de otra fila (o columna), se obtiene la matriz A' y entonces $det(A') = det(A)$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & a_{h3} & \cdots a_{hj} & \cdots & a_{hn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & a_{h3} & \cdots a_{hj} & \cdots & a_{hn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + ka_{h1} & a_{i2} + ka_{h2} & a_{i3} + ka_{h3} & \cdots a_{ij} + ka_{hj} & \cdots & a_{in} + ka_{hn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(Idea de la demostración: calcular el determinante de A' por esa fila tan particular y aplicar propiedades anteriores, los teoremas 7 y 6)

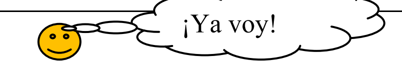
Observación: Este resultado se generaliza. Para lo cual se darán algunas definiciones.

Una ***combinación lineal de filas de una matriz*** es sumar ordenadamente los elementos de esas filas previamente multiplicadas por un escalar (una constante para cada fila).

La nomenclatura pone de manifiesto que las filas de una matriz pueden en algunas circunstancias considerarse como (o representar) las coordenadas de vectores.

Una definición análoga vale para ***combinación lineal de columnas de una matriz***.

¡De Ud. esa definición!



Un ejemplo de combinación lineal sumada a una fila de una matriz A es el siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -7 & 0 \\ 2 & i & 2-i & 1 \\ 4 & 6 & -4 & 2 \\ -3 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

si a la fila 3 se suma una combinacion lineal de las otras filas

1, 2 y 4 multiplicadas respectivamente por los escalares 8, -9, 4i se obtiene

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -7 & 0 \\ 2 & i & 2-i & 1 \\ 4+8.1+(-9).2+4i.(-3) & 6+8.5+(-9).i+4i.3 & -4+8.(-7)+(-9).(2-i)+4i.1 & 2+8.0+(-9).1+4i.7 \\ -3 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Teorema 10:

♦ Sea $A \in K^{n\times n}$ con $n \geq 2$. Si a una fila (o columna) se le suma una combinación lineal de las otras filas (o columnas), se obtiene la matriz A' y entonces $det(A') = det(A)$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & a_{h3} & \cdots a_{hj} & \cdots & a_{hn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} + \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq i}}^{n} k_h a_{h1} & a_{i2} + \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq i}}^{n} k_h a_{h2} & a_{i3} + \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq i}}^{n} k_h a_{h3} & \cdots a_{ij} + \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq i}}^{n} k_h a_{hj} & \cdots & a_{in} + \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq i}}^{n} k_h a_{hn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(Idea de la demostración: por inducción y aplicación de la propiedad anterior)

EJERCICIO 12.1.7

a) Demostrar las propiedades análogas a estas últimas para columnas.

b) Verificar el Teorema 10, para la matriz dada previamente al enunciado de ese Teorema.

EJEMPLO 12.1.8

Verificaremos algunas propiedades de los determinantes dadas en el punto 12.1.6 en la matriz

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$ cuyo determinante ya fue calculado y es 3-2*i*

La 1:

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -i \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -i \end{pmatrix} \quad \left|A^t\right| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -i \end{vmatrix} = 2.(-i) - (-1).3 = 3 - 2i$$

La 2:

Consideremos k = *9* y multipliquemos la fila 2 de A:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 9.(-1) & 9.(-i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -9 & -9i \end{pmatrix} \quad |A'| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -9 & -9i \end{vmatrix} = 2.(-9i) - (-9).3 = 27 - 18i$$

que efectivamente es 9. (3-2*i*)

La 4:

Si se intercambian las filas de A se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \text{ entonces } A' = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$|A'| = \begin{vmatrix} -1 & -i \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.3 - (-i).2 = -3 + 2i$ que efectivamente es el opuesto del $det(A)$

La 9:

Si a la fila 1 de A se le suma 10 veces fila 2:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \quad \text{entonces} \quad A'=\begin{pmatrix} 2+10.(-1) & 3+10.(-i) \\ -1 & -i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 & 3-10i \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

$$|A'|=\begin{vmatrix} -8 & 3-10i \\ -1 & -i \end{vmatrix}=-8(-i)-(3-10i)(-1)=8i+3-10i=3-2i$$ como se quería comprobar.

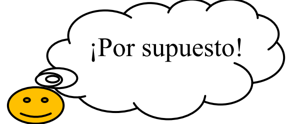
EJEMPLO 12.1.9

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -33i & 1237 & 0 \\ -i & 4 & 0 \end{pmatrix}$. ¿Cuánto vale *det(A)*?

Claramente al desarrollarlo por la columna 3 dará 0, y como por definición por cualquier fila o columna que se desarrolle el valor coincide, ese es su valor.

EJEMPLO 12.1.10

Consideremos la siguiente matriz con dos fila iguales:



$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & i \\ 2 & 0 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, el determinante conviene calcularlo por la columna 2 (¿por qué?)

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & i \\ 2 & 0 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}= \quad \text{y calculado por la regla practica para 3x3}$$

$$=2.8.6+2.1.4+8.4.3-3.4.8-1.4.2-2.8.6=0$$

como se pretendía comprobar.

EJERCICIO 12.1.11

Verificar las propiedades de los determinantes para las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & 9i & 2-i \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ -3 & -5 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{5} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_7^{3\times 3}$$

EJEMPLO 12.1.12

Las propiedades demostradas permiten "bajar" el orden de los determinantes. Por esto se entiende que dada una matriz a la que se quiere evaluar su determinante por operaciones sobre sus filas o columnas se puede llevar a una matriz que tenga más elementos 0 que la dada y así resultará de más fácil cálculo.

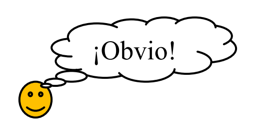
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 9 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si sobre esta matriz que en su columna 4, que ya tiene dos 0 se va a transformar en 0 otro de sus elementos por medio de sumar múltiplos de filas, no se modifica el determinante de A y su cálculo resulta más sencillo, para lo cual por ejemplo a la fila 3 sumaremos la fila 5 multiplicada por - 4:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 9 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 4-4.1 & 2-4.3 & 0-4.2 & 4-4.1 & -1-4.2 \\ 2 & 9 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -8 & 0 & -9 \\ 2 & 9 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

podemos obtener otro 0 en la columna 4 sumando a la fila 4 la fila 5 multiplicada por -1:

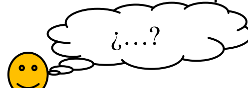
$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -8 & 0 & -9 \\ 2 & 9 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -8 & 0 & -9 \\ 2-1.1 & 9-1.3 & 1-1.2 & 1-1.1 & 4-1.2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -8 & 0 & -9 \\ 1 & 6 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$



desarrollando el determinante por la columna 4:

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&-5&0&2\\3&4&3&0&1\\0&-10&-8&0&-9\\1&6&-1&0&2\\1&3&2&1&2\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}2&1&-5&2\\3&4&3&1\\0&-10&-8&-9\\1&6&-1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-2.1&1-2.6&-5-2.(-1)&2-2.2\\3-3.1&4-3.6&3-3.(-1)&1-3.2\\0&-10&-8&-9\\1&6&-1&2\end{vmatrix}$$

Al determinante de orden 4 se le anularán otros elementos de su primer columna.
(¿cómo?? Mire muy bien!!!!) ¿Qué se hizo?....



Bien!!! se dio cuenta: a la 1ra. fila se resta 2. 4ta. fila y a la 2da. fila se resta 3. 4ta fila.

$$|A|=\begin{vmatrix}0&-11&-3&-2\\0&-14&6&-5\\0&-10&-8&-9\\1&6&-1&2\end{vmatrix}=-1.\begin{vmatrix}-11&-3&-2\\-14&6&-5\\-10&-8&-9\end{vmatrix}$$

Por las características de la matriz A se tendrían que haber calculado 3 determinantes de orden 4, pero por las operaciones realizadas sobre las filas y columnas queda a calcular un determinante de orden 3.

Sobre este determinante se pueden realizar operaciones tendientes a lograr 0 en alguna fila o alguna columna (es decir seguir bajando el orden) o calcularlo por la regla práctica.
Queda como ejercicio ese cálculo de la manera que mejor le resulte.

EJEMPLO 12.1.13
Consideremos las siguientes matrices:

$$I_1=(1)\qquad I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

¿Cuánto valen sus determinantes?

$|I_1|=|1|=1 \qquad |I_2|=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1.1-0.0=1$ ¿cómo se puede calcular el determinante de I_3?

Se lo hará por la fila 1 (la dificultad es similar por cualquiera de sus filas o columnas):

$$\left|I_3\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.\left|I_2\right| = 1$$

EJERCICIO 12.1.14

a) Calcular el determinante de I_4.

b) Cuánto vale el determinante de I_n para cualquier $n > 0$. Demuestre por inducción.

EJEMPLO 12.1.15

*Se ha probado que para cualquier orden n **>** 0, el determinante de la identidad I_n es 1*

¿Cuánto valdrán los determinantes de las matrices elementales?

- Consideremos la elemental $E_{i\,j}$, esta es la matriz que se obtiene de I_n (n **>**1) al permutar

dos filas, por Teorema 4, los determinantes son opuestos uno de otro luego:

$$det(E_{i\,j}) = -det(I_n) = -1$$

- Consideremos la elemental $E^i{}_{j(c)}$, esta es la que se obtiene de I_n (n **>**1) al sumar a la fila

i , la fila j multiplicada por c. Por el Teorema 9, los determinantes de ambas matrices coinciden, luego:

$$det(E^i{}_j(c)) = det(I_n) = 1$$

- Consideremos la elemental $E_i(c)$, con $c \neq 0$, esta es la que se obtiene de I_n , al

multiplicar su fila i por c no nulo. Por el Teorema 2, el determinante de la matriz resultante es c por el determinante de la identidad:

$$det(E_i(c)) = c.det(I_n) = c \quad (c \neq 0)$$

Por lo tanto los determinantes de las matrices elementales son no nulos.

EJERCICIO 12.1.16

Comprobar para n = 4, el valor de tres ejemplos de matrices elementales.

Otra serie de Teoremas 12.1.17

♦ **Teorema 1:**

Sea $B \in K^{n\times n}$ y sea E una matriz elemental entonces $det(E.B) = det(E).det(B)$

Idea de la demostración: se consideran cada una de las tres operaciones elementales posibles y su correspondiente matriz E. Se aplica el Teorema 2, 4 ó 9 (12.6) según sea el caso, considerando que el producto de la matriz elemental por B, es realizar la operación correspondiente sobre las filas de B y se usan los valores calculados en el último ejemplo.

Para ilustrar se hará para el caso $E = E_{ij}$ es decir se demostrará:

$$det(E_{ij}.B) = det(E_{ij}).det(B)$$

Se sabe que $E_{ij} . B = P_{ij}(B)$, es decir permutar dos filas en la matriz B, en este cado para fijar ideas la *i*-ésima y la *j*-ésima de B.

Luego $P_{ij}(B) = B'$ (*) que por el teorema 4 de 12.6, $det(B') = -1. det(B)$, pero como se sabe -1= $det(E_{ij})$, por lo cual por (*): $det(B') = det(E_{ij}) . det(B)$, por lo cual:

$det(E_{ij} . B) = det(E_{ij}) . det(B)$.

Para las otras matrices elementales es similar.

♦

Generalizando el Teorema anterior:

♦ **Teorema 2:**

Sea $B \in K^{n\times n}$ y sean $E_1,\cdots,E_m$ matrices elementales entonces

$$det(E_1.\cdots E_m.B) = det(E_1).\cdots det(E_m).det(B)$$

(Idea de la demostración: por inducción sobre m)

Una caracterización ¡MUY importante!

♦ **Teorema 3:** ☆ ☆

Sea $A \in K^{n \times n}$. A es invertible si y sólo si $det(A) \neq 0$

Demostración: Toda matriz cuadrada A n x n es equivalente por filas a la identidad I_n o a una A_R reducida por filas y escalonada con una fila nula. Si A es invertible es $A \sim_f I_n$.

Luego por definición si $A \sim_f I_n$ vale que $A = E_1.E_2.\ldots.E_h.I_n$ y por el teorema anterior vale: $det\ (A) = det(E_1.E_2.\ldots.E_h.I_n) = det(E_1).det(E_2).\ldots.det(E_h).det(I_n)$, como todos los factores del tercer miembro no son nulos y K es un cuerpo, resulta que $det(A) \neq 0$.

Resta probar que si: $det(A) \neq 0$ entonces A es invertible.

Que equivale a su contrarrecíproca: A no es invertible entonces $det(A) = 0$

Sea A no invertible, por lo cual A es equivalente por filas con A_R reducida por filas y escalonada con una fila nula. Y por definición $A \sim_f A_R$ vale que $A = E_1.E_2.\ldots.E_h.A_R$

Del teorema anterior, $det\ (A) = det(E_1.E_2.\ldots.E_h.A_R) = det(E_1).det(E_2).\ldots.det(E_h).det(A_R)$

Pero al tener A_R una fila nula, el factor $det\ (A_R) = 0$, por lo cual $det\ (A) = 0$

♦

♦ **Teorema 4:**

Sean $A \in K^{n \times n}$ y $B \in K^{n \times n}$ entonces $det(A.B) = det(A).det(B)$

(Idea de la demostración: Considere los casos que A sea invertible o no, combinada con la sugerencia dada para la demostración del Teorema 3)

EJEMPLO 12.1.18

La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ ¿es invertible?

Para determinarlo calculemos el determinante (por la columna 2):

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = [2(-4) - 5.1] - [2.(-5) - 3.1] =$$

$$= -8 - 5 + 10 + 3 = 0$$

Luego, A **no** es invertible.

EJEMPLO 12.1.19

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 4 & i \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & i \end{pmatrix}$ comprobar el teorema 4.

$$A.B = \begin{pmatrix} 2i & -1 \\ 4 & i \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i.0 + (-1).(-4) & 2i.1 + (-1).i \\ 4.0 + i.(-4) & 4.1 + i.i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & i \\ -4i & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A.B| = \begin{vmatrix} 4 & i \\ -4i & 3 \end{vmatrix} = 4.3 - (-4i).i = 12 - 4 = 8$$

Además:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2i & -1 \\ 4 & i \end{vmatrix} = 2i.i - 4.(-1) = -2 + 4 = 2 \qquad |B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & i \end{vmatrix} = 0.i - 1.(-4) = 4$$

por lo que se ha verificado: $|A.B| = |A|.|B|$ pues 8 = 2.4 

EJEMPLO 12.1.20

Si la matriz A es invertible, ¿hay relación entre el determinante de A y el de su inversa?

Sea A invertible, esto significa:

Existe A^{-1} tal que $A.A^{-1} = I$.

Por el teorema 4: $|I| = |A.A^{-1}| = |A|.|A^{-1}|$ y como el determinante de la identidad vale 1:

$$1 = |A|.|A^{-1}| \qquad \text{entonces} \qquad |A^{-1}| = (|A|)^{-1}$$

EJERCICIO 12.1.21

Hallar el valor de x en los siguientes casos:

$$\begin{vmatrix} 3 & -x \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \qquad \begin{vmatrix} 6 & x & 4 \\ 4 & 2 & 9 \\ 2 & 5 & x \end{vmatrix} = -166$$

EJERCICIO 12.1.22

a) Para las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Verificar: $\left|A^t\right| = |A| \qquad |2A| = 8|A| \text{ por} \quad \text{que???} \qquad |A.B| = |A|.|B| \qquad |B|^2 = \left|B^2\right|$

$|A+B| \neq |A| + |B|$.

¿Tienen inversa? De ser afirmativo, ¿cuánto valen los determinantes de las inversas?

b) Para $C = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{5} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_7^{3\times 3}$, ¿es C invertible? (use el ejercicio 12.11).

Verificar que $\left|C^3\right| = |C|^3$ y que $\left|\bar{5}.\,C\right| = \bar{6}$

EJERCICIO 12.1.23

Calcular el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 7 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 10 & -6 & -8 \\ 2 & -3 & 1 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

¿La matriz A es invertible? ¿Por qué?

Sin calcularla, ¿puede decir qué tipo de matriz es la reducida por filas y escalonada equivalente por filas con A ?

EJERCICIO 12.1.24

a) Calcular el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -8 \\ 2 & -3 & 1 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

b) ¿La matriz A es invertible? ¿Por qué?

c) Sin calcularla, ¿puede decir qué tipo de matriz es la reducida por filas y escalonada equivalente por filas con A?

EJERCICIO 12.1.25

a) Con las matrices de los ejercicios 8 y 9 de este apartado comprobar que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes correspondientes.

b) Comprobar que el determinante no se distribuye en la suma de matrices.

2. Otro método para calcular inversas

Se presentará otra relación entre el determinante de una matriz y su inversa.

Ya se probó que una matriz A tiene inversa si y sólo si el determinante de A es no nulo. Además que el determinante de la inversa de A es el inverso del determinante de A.

Para poder avanzar en nuestro objetivo serán necesarias más definiciones....

Dada $A \in K^{n\times n}$ se llama **matriz adjunta de A** la matriz cuyos elementos son los respectivos cofactores de los elementos de A:

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ entonces $Adj(A) = (A_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ esto significa:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ entonces la adjunta es } Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

El cálculo de la matriz adjunta es tedioso, pues involucra el cálculo de n x n determinantes de orden n-1 pues el cofactor respecto de a_{ij} es A_{ij} = $(-1)^{i+j}.M_{ij}$ y M_{ij} es el determinante de la matriz que se obtiene de A si se suprimen la fila *i* y la columna *j*.

EJEMPLO 12.2.1

Comencemos por uno "cortito". Sea

$$A = \begin{pmatrix} -i & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = |0| = 0 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -|1| = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -|3| = -3 \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = |-i| = -i$$

entonces por definición: $Adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -i \end{pmatrix}$

EJEMPLO 12.2.2

Algo más complicado:

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ -i & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ para calcular la adjunta hay que tener paciencia:

se deben calcular 16 determinantes de orden 3.

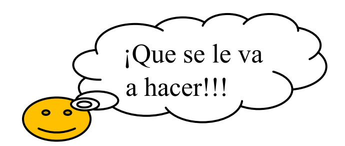
$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 12 - 32 = -18 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -i & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3i$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -i & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -16i + i = -15i \qquad A_{14} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -i & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 12i$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(6+8) = -14 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -i & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -i & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -(4i - 8 + 3i) = 8 - 7i \qquad A_{24} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -i & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -16$$

Hay que seguir!! Ya se hizo la mitad!!



$$A_{31}=\begin{vmatrix}3&0&-1\\1&3&4\\4&0&1\end{vmatrix}=9+12=21 \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}2&0&-1\\0&3&4\\0&0&1\end{vmatrix}=-6$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}2&3&-1\\0&1&4\\0&4&1\end{vmatrix}=2-32=-30 \qquad A_{34}=-\begin{vmatrix}2&3&0\\0&1&3\\0&4&0\end{vmatrix}=24$$

$$A_{41}=-\begin{vmatrix}3&0&-1\\1&3&4\\0&2&1\end{vmatrix}=-(9-2-24)=17 \qquad A_{42}=\begin{vmatrix}2&0&-1\\0&3&4\\-i&2&1\end{vmatrix}=6-3i-16=-10-3i$$

$$A_{43}=-\begin{vmatrix}2&3&-1\\0&1&4\\-i&0&1\end{vmatrix}=-(2-12i-i)=-2+13i \qquad A_{44}=\begin{vmatrix}2&3&0\\0&1&3\\-i&0&2\end{vmatrix}=4-9i$$

a pesar del cansancio se arma la matriz

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}-18&-3i&-15i&12i\\-14&4&8-7i&-16\\21&-6&-30&24\\17&-10-3i&-2+13i&4-9i\end{pmatrix}$$

Se seguirá trabajando con las matrices de los ejemplos anteriores, para ilustrar un resultado general:

- Se calculará el determinante de la matriz de 12.2.1

$$|A|=\begin{vmatrix}-i&3\\1&0\end{vmatrix}=-3$$

- Se hallará la traspuesta de la adjunta de A

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}0&-1\\-3&-i\end{pmatrix} \quad \text{entonces} \quad \left(Adj(A)\right)^t=\begin{pmatrix}0&-1\\-3&-i\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}0&-3\\-1&-i\end{pmatrix}$$

• Calcular el producto de A por la traspuesta de su adjunta:

$$A.\left(Adj(A)\right)^t = \begin{pmatrix} -i & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i.0+3.(-1) & -i.(-3)+3.(-i) \\ 1.0+0.(-1) & 1.(-3)+0.(-i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = -3.I$$

• Se calculará el determinante (usando los adjuntos ya calculados) de la matriz dada en 12.2.2

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ -i & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4.\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -i & 2 & 1 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -i & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.(-10-3i)+4-9i = -36-21i$$

el desarrollo se hizo ¿porqué fila? ¿por cuál otra línea (fila o columna) era también conveniente?

• Se hallará la traspuesta de la adjunta de A

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -18 & -3i & -15i & 12i \\ -14 & 4 & 8-7i & -16 \\ 21 & -6 & -30 & 24 \\ 17 & -10-3i & -2+13i & 4-9i \end{pmatrix} \text{ así} \left(Adj(A)\right)^t = \begin{pmatrix} -18 & -14 & 21 & 17 \\ -3i & 4 & -6 & -10-3i \\ -15i & 8-7i & -30 & -2+13i \\ 12i & -16 & 24 & 4-9i \end{pmatrix}$$

• Calcular el producto de A por la traspuesta de su adjunta:

$$A.\left(Adj(A)\right)^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ -i & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -18 & -14 & 21 & 17 \\ -3i & 4 & -6 & -10-3i \\ -15i & 8-7i & -30 & -2+13i \\ 12i & -16 & 24 & 4-9i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2.18-3.3i-1.12i & -2.14+3.4+1.16 & 2.21-3.6)-1.24 & 2.17+3.(-10-3i)-1.(4-9i) \\ -1.3i-3.15i+4.12i & 1.4+3.(8-7i)-4.16 & -1.6-3.30+4.24 & 1.(-10-3i)+3.(-2+13i)+4.(4-9i) \\ i.18-2.15i+1.12i & i.14+2.(8-7i)-1.16 & -i.21-2.30+1.24 & -i.17+2.(-2+13i)+1.(4-9i) \\ 4.(-3i)+1.12i & 4.4+1.(-16) & 4.(-6)+1.24 & 4.(-10-3i)+1.(4-9i) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -36-21i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36-21i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -36-21i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -36-21i \end{pmatrix} = (-36-21i).I$$

En estos ejemplos de verifica:

$$A.\left(Adj(A)\right)^t = |A|.I \quad (*)$$

resultado que es una propiedad general de las matrices cuadradas. (Se demostrará en 12.2.7)

EJERCICIO 12.2.3

a) Verificar la propiedad (*) para las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -i \\ 2 & 1 & 8 \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix}$$

b) Verificar para esas matrices que $\left(Adj(A)\right)^t .A = |A|.I$

¿Qué provecho es posible sacar de (*) si A es invertible?

En ese caso el determinante de A es no nulo, por lo cual ese escalar tiene inverso. Es así que multiplicando (*) por el inverso del determinante resulta:

$$|A|^{-1}.A.\left(Adj(A)\right)^t = |A|^{-1}|A|.I = I$$

Por propiedad del producto de un escalar por matriz se tiene:

$$A.(|A|^{-1}.\left(Adj(A)\right)^t) = I$$

y como A es invertible, multiplicando a izquierda por la inversa de A , resulta una igualdad que además se obtiene otro método para calcular la inversa de una matriz:

$$A^{-1} = |A|^{-1}.\left(Adj(A)\right)^t$$

EJEMPLO 12. 2.3

Es así que para $A=\begin{pmatrix} -i & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ como $|A|=\begin{vmatrix} -i & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-3 \quad \neq 0$ la matriz es invertible.

Se ha calculado $\left(Adj(A)\right)^t=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$ entonces

$$A^{-1}=(-3)^{-1}.\left(Adj(A)\right)^t=(-3)^{-1}.\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3^{-1} & 3^{-1}i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}i \end{pmatrix}$$

Si prefiere...

EJEMPLO 12. 2. 4

Para $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ -i & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se calculó $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ -i & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-36-21i$ por lo tanto existe la inversa de A.

También se ha calculado $\left(Adj(A)\right)^t=\begin{pmatrix} -18 & -14 & 21 & 17 \\ -3i & 4 & -6 & -10-3i \\ -15i & 8-7i & -30 & -2+13i \\ 12i & -16 & 24 & 4-9i \end{pmatrix}$ se tiene entonces

$$A^{-1}=(-36-21i)^{-1}.\left(Adj(A)\right)^t=(-36-21i)^{-1}.\begin{pmatrix} -18 & -14 & 21 & 17 \\ -3i & 4 & -6 & -10-3i \\ -15i & 8-7i & -30 & -2+13i \\ 12i & -16 & 24 & 4-9i \end{pmatrix}$$

Si quiere puede realizar las cuentas de multiplicar cada elemento por el inverso de -36 -21 *i* para obtener los elementos de la inversa.

EJERCICIO 12.2.5

a) Verificar que $A.\left(Adj(A)\right)^t = |A|.I$ para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & i \\ 3i & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

b) Utilizando la expresión $A^{-1} = |A|^{-1}.\left(Adj(A)\right)^t$ calcular, si es que existe, la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & i \\ 3i & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

♦ LEMA 12.2.6:

Sea $A \in K^{n\times n}$, K cuerpo conmutativo, entonces $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A_{jk} = 0$ para $i \neq j$.

Demostración:

Dada la matriz $A = (a_{sp})_{\substack{1\le s\le n \\ 1\le p\le n}}$ ***se construye*** la matriz $\widetilde{A} = (\tilde{a}_{sp})_{\substack{1\le s\le n \\ 1\le p\le n}}$ tal que tiene todas sus filas como las filas de A, pero en su fila *j*-ésima se repite su fila *i*-ésima, esto es:

$$\tilde{a}_{sp} = \begin{cases} a_{sp} & \text{si } s \neq i \\ a_{ip} & \text{si } \ s = j \end{cases} .$$

Luego por construcción $\widetilde{A}$ tiene dos filas iguales.

Por lo cual su determinante vale 0.

Como el determinante de una matriz desarrollado por cualquier fila (o columna) tiene igual valor, se lo desarrollará por la fila *j*:

$$det(\widetilde{A}) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{jk}\widetilde{A}_{jk}$$ ahora bien, sustituyendo por sus valores:

$$det(\widetilde{A}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} \text{ pues } \widetilde{A}_{jk} = A_{jk}$$

Debido que en la única fila que difieren ambas matrices A y $\widetilde{A}$ es la *j*-ésima, entonces los cofactores de los elementos de las filas *j* de ambas matrices son iguales.

Luego, $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0$.

♦

Se ha hecho uso de lo que se afirma seguidamente, pero ya se tiene todo lo necesario para demostrar el

♦ TEOREMA 12.2.7

Sea $A \in K^{n\times n}$, K cuerpo conmutativo, entonces $A.\left(Adj(A)\right)^t = |A|.I$

Demostración:

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ entonces $Adj(A) = (A_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ entonces la adjunta es } Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$ por lo tanto

$\left(Adj(A)\right)^t = \left(A^*_{i\,j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ donde para cada i y para cada j, $A^*_{i\,j} = A_{j\,i}$. (1)

Se calcula $A.\left(Adj(A)\right)^t = C = \left(c_{s\,p}\right)_{\substack{1\le s\le n\\ 1\le p\le n}}$ siendo cada $c_{s\,p} = \sum_{k=1}^{n} a_{s\,k}.A^*_{k\,p} = \sum_{k=1}^{n} a_{s\,k}.A_{p\,k}$ por definición de producto de matrices y (1).

Si se analiza como son los $c_{s\,p} = \sum_{k=1}^{n} a_{s\,k}.A_{p\,k} = \begin{cases} \det(A) & \text{si } s = p \\ 0 & \text{si } s \ne p \end{cases}$ por definición de determinante y Lema anterior.

Es decir la matriz producto C es diagonal, más aun escalar, con los elementos de la diagonal iguales a $det\,(A)$, es así que $A.\left(Adj(A)\right)^t = C = |A|.I$

♦

3. Otro método para resolver algunos sistemas de ecuaciones

En un sistema de ecuaciones $A.X = B$ de n ecuaciones con n incógnitas la matriz de los coeficientes es cuadrada (obvio!!!!) , sea $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \in K^{n\times n}$

Si A es invertible, una manera de calcular la solución del sistema es, multiplicando a izquierda de la igualdad matricial por su inversa A^{-1}:

$$A.X = B$$
$$A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$$
$$I.X = A^{-1}.B$$
$$\boxed{X = A^{-1}.B} \qquad (**)$$

Observar que *si A es invertible la solución del sistema cuadrado es única*. 

Además tener presente que el producto de matrices No es conmutativo….

En el siglo XVIII Cramer, un matemático suizo, ideó un método que utiliza la expresión de la inversa de A dada en el parágrafo anterior, que se conoce como **regla de Cramer** o **método de los determinantes**.

La idea es considerar $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = |A|^{-1}.\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1i} & A_{2i} & \cdots & A_{ni} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

si se calcula el segundo miembro de (**):

$$A^{-1}.B = |A|^{-1}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1i} & A_{2i} & \cdots & A_{ni} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = |A|^{-1}\begin{pmatrix} A_{11}.b_1 & +A_{21}.b_2+ & \cdots & +A_{n1}.b_n \\ A_{12}.b_1 & +A_{22}.b_2+ & \cdots & +A_{n2}.b_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1i}.b_1 & +A_{2i}.b_2+ & \cdots & +A_{ni}.b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n}.b_1 & +A_{2n}.b_2+ & \cdots & +A_{nn}.b_n \end{pmatrix}$$

La igualdad (**) de matrices establece la igualdad elemento a elemento:

$$x_1^* = |A|^{-1}.(A_{11}.b_1 + A_{21}.b_2 + \cdots + A_{n1}.b_n) \quad x_2^* = |A|^{-1}.(A_{12}.b_1 + A_{22}.b_2 + \cdots + A_{n2}.b_n)$$
$$x_i^* = |A|^{-1}.(A_{1i}.b_1 + A_{2i}.b_2 + \cdots + A_{ni}.b_n), \cdots, \quad x_n^* = |A|^{-1}.(A_{1n}.b_1 + A_{2n}.b_2 + \cdots + A_{nn}.b_n)$$

Se construye la matriz:

$$C_1 = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} \quad \text{tal que para todo } h,\ 1\le h\le n,\ c_{hk} = a_{hk} \quad si\ k\ne 1 \text{ y } c_{h1} = b_h$$

Extendiendo la matriz para visualizarla:

$C_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ es una matriz como A salvo en la columna 1, que se colocan los elementos de la matriz columna B.

Observar que los adjuntos de los elementos de la primer columna de C_1 coinciden con los respectivos adjuntos de los elementos de A. Esto es $C_{11} = A_{11}, \cdots, C_{i1} = A_{i1}, \cdots, C_{n1} = A_{n1}$

Pues la única diferencia entre ambas matrices es la columna 1.

Si se desarrolla el determinante de C_1 por la columna 1, ¿qué observa? ¿Cuál es la expresión?

$|C_1| = A_{11}.b_1 + A_{21}.b_2 + \cdots + A_{n1}.b_n$ está de acuerdo!!

Por lo tanto $x_1^* = |A|^{-1}.|C_1|$

Haciendo un trabajo análogo, construyendo C_2 una matriz como A salvo en la columna 2 , que se colocan los elementos de la matriz columna B. (descríbala y extiéndala para verla...)

Bien!!

Comprobará que $|C_2| = A_{12}.b_1 + A_{22}.b_2 + \cdots + A_{n2}.b_n$ si se desarrolla por la columna 2.

Por lo tanto $x_2^* = |A|^{-1}.|C_2|$

Trabajando análogamente, se construye C_i una matriz como A salvo en la columna i (para i entre 1 y n) que se colocan los elementos de la matriz columna B. (descríbala y extiéndala para verla...)

Bien!!

Comprobará que $|C_i| = A_{1i}.b_1 + A_{2i}.b_2 + \cdots + A_{ni}.b_n$ si se desarrolla por la columna i.

Luego: $x_i^* = |A|^{-1}.|C_i|$

Por la expresión de la solución: cada incógnita es producto del inverso de un determinante (del de A) por otro determinante, es el nombre vulgar que tiene el método de resolución.

EJERCICIO 12.3.1

Resolver por la regla de Cramer los siguientes sistemas:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 8i & -4 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 1-i & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Rango de matrices

Dada una matriz $A \in K^{m \times n}$ se ha probado que por operaciones elementales sobre sus filas es posible llevarla a una matriz reducida por filas y escalonada A_R .

Se darán definiciones que nos permitirán conocer qué tienen en común estas matrices equivalentes.

También se podrá dar un criterio para saber si los sistemas de ecuaciones lineales tienen solución y cuántas.

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ -5 & 9 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ son ***submatrices de A*** matrices cuyos elementos son elementos de A y tal que forman parte de las mismas filas o columnas dentro de A.

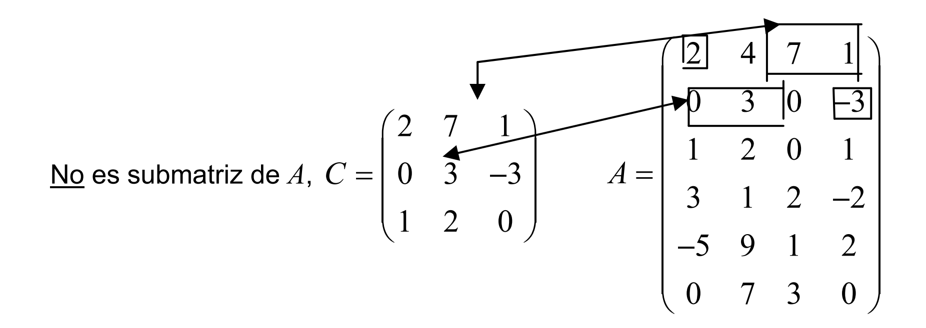
No tienen porqué estar todos seguidos dentro de A.

Son ejemplo de submatrices:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

también $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ La matriz A es submatriz de ella misma.

El mayor orden de submatriz cuadrada en A es 4 x 4. Las de menor orden son 1 x 1. Por lo cual en general una matriz tiene varias submatrices.



No es submatriz de A, $C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ -5 & 9 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Se llama **rango** de una matriz A al orden del mayor menor no nulo.

Esto es el rango de A es r si existe una submatriz B de A, r x r tal que $det(B) \neq 0$ y para toda submatriz D de orden $r+1$ (si existe) su determinante es 0.

Para referirse al ***rango de A se anota r(A)***, si A se sobre entiende se usa simplemente r.

Compare esta definición de rango de A, con la definición dada anteriormente. Observar que coinciden!!!

¡Cuánto tengo que pensar!

Si A es m x n, el rango de A es a lo sumo el mín $\{m, n\}$. ¿Por qué?

EJERCICIO 12.4.1

¿Cómo es A si $r(A)$ es 0?

EJEMPLO 12.4.2

La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es cuadrada.

La mayor submatriz cuadrada de A es propiamente A. El rango será 3 si el $det(A)$ es no nulo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.5.7 - 7.1.3 + 3.2.1 = 55 \neq 0$$ por lo tanto el rango es 3

Observación: Son equivalentes para toda matriz A cuadradas n x n *:*

- *El rango de A es n.*
- *La matriz A es invertible.*
- *El $det(A)$ es no nulo.*

EJEMPLO 12.4.3

Como $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ no es cuadrada hay que considerar submatrices propias de A.

Se debe comenzar calculando los determinantes de orden 3 (son los de orden máximo que se pueden extraer de A)

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0 \text{ ya que la fila 3 es suma de las otras dos filas.}$$

Se saca una de las columnas de B_1 y se calcula

$$|B_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ ya que la fila 3 es suma de las otras dos filas.}$$

Pero mirando con atención la matriz A, como su tercera fila es suma de las otras dos cualquier determinante de orden 3 es 0.

Por lo tanto el rango es 2. Pues hay submatrices 2 x 2 de A con determinante no nulo, por ejemplo $|B_3| = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$

Observación: Por operaciones elementales sobre las filas de una matriz A se llega a la reducida por filas escalonada. Si esta matriz reducida tiene una fila nula significa que esa fila de la matriz A es una combinación lineal de las otras filas. Cualquier menor que tenga parte de esas filas será 0. Por la definición de reducida por filas y escalonada si tiene *r* filas no nulas ninguna de esas filas es combinación lineal de las otras filas.

Se acepta que *el rango se conserva por operaciones elementales por filas*.

EJERCICIO 12.4.4

a) Verificar en las matrices del ejemplo anterior que el rango se conserva por operaciones elementales.

b) Verificar que las matrices dadas tienen igual rango que sus respectivas reducidas por filas y escalonada.

c) Analizar el valor que obtuvo como rango de las matrices reducidas por filas y escalonadas de b).

d) Anímese y conjeture en general para ese tipo de matriz.

e) Demostrar que el rango se conserva por operaciones elementales por filas. (Idea: hágalo para cada una de las operaciones elementales por filas).

5. Volviendo a los sistemas

Cómo ya se ha visto en varios ejemplos hay sistemas que tienen solución única, otros no tienen solución y los hay con infinitas soluciones.

Es usual designar como:

- **incompatible** al sistema que no tiene solución

- **compatible** al sistema que tiene solución
  - **determinado**: solución única
  - **indeterminado**: infinitas soluciones

Se tiene el siguiente teorema, que sin resolver el sistema permite realizar esta clasificación

Teorema de Roché-Frobenius*: Sea $A.X = B$ un sistema de m ecuaciones con n incógnitas.

● El sistema es compatible si y sólo si el rango de A es igual al rango de la matriz orlada $[A|B]$.

● El sistema es compatible determinado si y sólo si el rango de A es igual al rango de la matriz orlada $[A|B]$ e igual a n.

● El sistema es compatible indeterminado si y sólo si el rango de A es igual al rango de la matriz orlada $[A|B]$ y menor que n.

*La demostración de este teorema se hará cuando se vea el tema de espacios vectoriales.

EJEMPLO 12.5.1

Analizar la compatibilidad del siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

El sistema es 3 x 3.

Si el rango *r* de A es 3, también lo será el de la ampliada, pues A es submatriz de la ampliada y como más filas no hay, esa es la "mayor aspiración de rango" para $[A|B]$.

De ser *r* = 3 la solución es única.

- Cálculo del rango de A:

Como A es cuadrada se calcula primeramente el determinante de A, pues es la mayor submatriz de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 4 + 12 - 9 + 8 - 6 = 0$$ luego el rango no es 3.

Si es 2, pues $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3+2=5\neq 0$. *Si tiene solución tendrá infinitas*.

- ¿Cómo resolvemos si tiene? Se calcula el rango de la ampliada:

$$[A|B] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

Hay que comenzar evaluando determinantes de orden 3.

Por lo ya realizado hay que considerar 3 columnas de [$A|B$] descartando una columna de A y que una de ellas sea la columna B.

Si algún menor de orden 3 es no nulo el rango de la ampliada es 3.

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9+8+6-18+6+4\neq 0$ luego el rango de la ampliada es 3.

- Conclusión:

  r(A) =*2* ***distinto*** de *r*([$A|B$])=*3* el sistema NO tiene solución. Es decir es **incompatible.**

EJEMPLO 12.5.2

¿Admite soluciones no trivales el sistema $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

Admitirá soluciones no triviales si el rango de A es menor que 4.

Observar que todo sistema homogéneo $A.X$ =*0* es compatible.

A esta conclusión puede arribarse aplicando el Teorema de Roché -Frobenius, ya que claramente el rango de A coincide con el rango de la ampliada que en este caso es [$A|0$] o también comprobando que la matriz nula satisface la igualdad matricial $A.X$ =*0 .*

Prosigamos con el ejemplo.

- Cálculo del rango de A

Primero se evalúa el determinante de A, es la submatriz de mayor orden...

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$ por ser un determinante de orden 4 se bajará el orden



$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+3.(-1) & -2-2(-1) & 1-1 & -1 \\ 2+3.1 & 1-2.1 & -3+1 & 1 \\ 1+3.2 & 3-2.2 & -1+2 & 2 \\ 2+3.1 & -1-2.1 & 2+1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & -2 & 1 \\ 7 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & -2 & 1 \\ 7 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -(-1).\begin{vmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 7 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -15+42-5-10+15+21 = 48 \neq 0$$

Es entonces el rango de A igual a 4.

- Conclusión

$r(A) = 4$ coincide con el número de incógnitas. La solución es única.

Por lo tanto no hay soluciones distintas de la trivial.

EJERCICIO 12.5.3

Analizar la compatibilidad de los siguientes sistemas y resolver .... los compatibles

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2i \\ 5 & -6 & 2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & -3 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{5} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{6} & \bar{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{3} \\ \bar{2} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \text{ es un sistema } 3\times 3 \text{ en } \mathbb{Z}_7$$

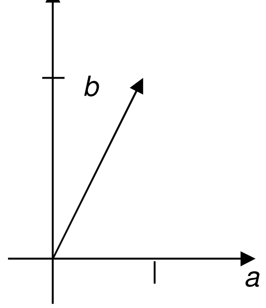
CAPITULO 13
Elementos de estructuras algebraicas

1. Espacios vectoriales

Consideremos un ejemplo conocido por la mayoría que son los vectores que han usado en la Física del colegio. Este ejemplo es el motivador para la generalización del concepto para otros conjuntos que tienen propiedades similares si los estructuramos con operaciones convenientes.

Será usual como en otros capítulos del libro que los conjuntos que se han dotado de alguna estructura definida sobre ellos hablemos libremente nombrando al conjunto subyacente como si fuera el conjunto conjuntamente con su estructura.
Es decir, por ejemplo, es usual que cuando hablamos de los números enteros digamos el anillo $\mathbb{Z}$ cuando lo más riguroso sería decir el anillo ($\mathbb{Z}$, +, **.**)

Consideremos el plano $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad b \in \mathbb{R}\}$, como el conjunto de los **vectores** con inicio en el origen de coordenadas y final en el punto (*a, b*). Podemos representar estos vectores en el plano:



Se definen sobre este conjunto de vectores una **suma** y un **producto por un escalar** entre elementos de $\mathbb{R}$ (son los **escalares**, se pueden poner en una escala) y los de $\mathbb{R}^2$. Recordar que ($\mathbb{R}$, +, **.**) es un cuerpo conmutativo.

Designamos con el signo $\oplus$ a **la suma,** de manera que $\oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Sean $\vec{u} = (a,b)$ y $\vec{v} = (c,d)$ vectores, definimos

$$\vec{u} \oplus \vec{v} = (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

Donde en cada componente, $+$ es la suma usual en los números reales.

Designamos con el signo $\otimes$ al **producto por escalar** de manera que $\otimes : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Sea $\vec{u}=(a,b)$ un vector y k un escalar , definimos

$$k\otimes\vec{u}=(k.a,k.b)$$

Donde en cada componente . es el producto usual en los números reales.

- *Propiedades de* $\oplus$ **:**

AsociatiVa: para toda terna de vectores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ en $\mathbb{R}^2$, se cumple:

$$\vec{u}\oplus(\vec{v}\oplus\vec{w})=(\vec{u}\oplus\vec{v})\oplus\vec{w}$$

Existencia del Elemento Neutro: existe un vector $\vec{0}$ tal que para todo vector $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2$, se cumple:

$$\vec{u}\oplus\vec{0}=\vec{0}\oplus\vec{u}=\vec{u} \text{ resulta } \vec{0}=(0,0)$$

Existencia del Elemento Opuesto: para todo $\vec{u}$ vector de $\mathbb{R}^2$ existe otro vector tal que sumados da el elemento neutro, $(\forall\vec{u})(\exists\overrightarrow{u^*})(\vec{u}\in\mathbb{R}^2\wedge\overrightarrow{u^*}\in\mathbb{R}^2 \text{ tal que } \vec{u}\oplus\overrightarrow{u^*}=\overrightarrow{u^*}\oplus\vec{u}=\vec{0})$.

Si $\vec{u}=(a,b),$ entonces resulta $\overrightarrow{u^\bullet}=(-a,-b)$. Usualmente a $\overrightarrow{u^\bullet}$ se lo anota $-\vec{u}$

Conmutativa: para todo par de vectores $\vec{u},\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$, se cumple que $\vec{u}\oplus\vec{v}=\vec{v}\oplus\vec{u}$

Es decir que ($\mathbb{R}^2,\oplus$) es un grupo conmutativo.

- *Propiedades de* $\otimes$ **:**

Para todo par de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^2$ y para todo par de escalares *k* y *t* se cumple:

a) $(k+t)\otimes\vec{u}=k\otimes\vec{u}\oplus k\otimes\vec{u}$

b) $(k.t)\otimes\vec{u}=k\otimes(t\otimes\vec{u})$

c) $k\otimes(\vec{u}\oplus\vec{v})=(k\otimes\vec{u})\oplus(k\otimes\vec{v})$

d) $1\otimes\vec{u}=\vec{u}$

Por cumplir estas propiedades ($\mathbb{R}^2,\oplus$) y $\otimes : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, decimos que $\mathbb{R}^2$ **es un espacio vectorial sobre el cuerpo** $\mathbb{R}$ ***.***

Dado $\mathbb{R}^3 = \{(a,b,c) : a \in \mathbb{R} \quad \wedge b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}\}$ y el cuerpo ($\mathbb{R}$, +, **.**), definimos

(similarmente que en $\mathbb{R}^2$)

la operación $\oplus$ por $(a,b,c) \oplus (d,e,f) = (a+d, b+e, c+f)$ y

el producto por el escalar $\otimes$ como $k \otimes (a,b,c) = (k.a, k.b, k.c)$.

Así definidas las operaciones se puede verificar que se cumplen propiedades similares a las destacadas para el caso de $\mathbb{R}^2$**.** Por lo cual:

$\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$*.*

Vamos a generalizar los conceptos dados anteriormente para esos ejemplos conocidos.

Algunos ejemplos son generalizaciones muy naturales y otras no tanto. Veremos que es un concepto que engloba de alguna manera la mayoría de los temas tratados a lo largo del Curso.

Un **espacio vectorial V sobre un cuerpo conmutativo *K,*** es un conjunto V*,* cuyos elementos llamaremos **vectores** y a los elementos de *K* llamaremos **escalares**. El cuerpo es (*K*, +, .).

Hay una **suma** definida sobre V, $\oplus : V \times V \to V$ y un producto de elementos escalares por vectores que da por resultado un vector, formalmente $\otimes : K \times V \to V$.

- $(V, \oplus)$ es un grupo conmutativo.
- Para todo par de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y para todo par de escalares *k* y t se cumplen

a) $(k+t) \otimes \vec{u} = k \otimes \vec{u} \oplus t \otimes \vec{u}$

b) $(k.t) \otimes \vec{u} = k \otimes (t \otimes \vec{u})$

c) $k \otimes (\vec{u} \oplus \vec{v}) = (k \otimes \vec{u}) \oplus (k \otimes \vec{v})$

d) $1_K \otimes \vec{u} = \vec{u}$ (1_K designa la unidad de cuerpo *K*)

Muchas veces por simplificación decimos que V es un *K*- espacio vectorial

EJEMPLO 13.1.1

Dado el natural fijo *n*, $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de las *n*-uplas $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n)$ de números reales, con la suma definida de la siguiente manera:

Dadas dos *n*-uplas $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n)$ y $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots, u_n)$,

$\vec{x} \oplus \vec{u} = (x_1 + u_1,\ x_2 + u_2,\ x_3 + u_3, \ldots\ldots,\ x_n + u_n)$, y el producto por un escalar *c* (un número real) definido así: $c \otimes \vec{u} = (c.u_1,\ c.u_2,\ c.u_3, \ldots\ldots,\ c.u_n)$, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

En cada componente + es la suma en los reales y . la multiplicación en los reales.

¡Probarlo!

Si,¡trabajo!

En particular para *n* = 2 y *n* = 3 los elementos de los espacios vectoriales respectivos $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ (pares y ternas de números reales, son los ejemplos que motivaron la definición de espacios) pueden representarse gráficamente como segmentos orientados con su extremo inicial en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas (con dos ejes *x* e *y* para $\mathbb{R}^2$ y con tres ejes *x*, *y*, *z* para $\mathbb{R}^3$) y su extremo final en el punto cuyas coordenadas son las componentes de los vectores correspondientes. Para *n* > 3 no tenemos idea intuitiva para una representación gráfica.

Recordatorio:

Sean en $K^{m\times n}$: $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ $A + B = C = (c_{i\,j})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ con

$c_{i\,j} = a_{i\,j} + b_{i\,j}$ para cada i y para cada j.

$k \otimes A = D = (d_{i\,j})_{1\le i\le m}$ con $d_{i\,j} = k.a_{i\,j}$ para cada i y para cada j.

EJEMPLO 13.1.2

Dados los naturales *m* y *n,* fijos, $K^{m\times n}$ es el conjunto de las matrices de *m* filas y *n* columnas con elementos en un cuerpo conmutativo *K*.

$K^{m\times n}$ con la operación de suma usual de matrices y producto por un escalar, ya definidos en el capítulo en que se tratan las matrices, resulta que $K^{m\times n}$ es un espacio vectorial sobre *K*. (probarlo ó mirarlo en el capítulo de matrices.) Los *vectores no son flechas*!!!!!

Recordatorio:

$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$

$k \otimes (a, b) = (k.\ a, k.\ b)$ con k real.

EJEMPLO 13.1.3

El conjunto de los números complejos $\mathbb{C} = \{(a,b) : a \in \mathbb{R} \ \wedge \ b \in \mathbb{R}\}$ cumple que $(\mathbb{C}, +)$ es un grupo conmutativo y el producto por un escalar real cumple las 4 propiedades de producto por escalar pedidas en la definición de espacio vectorial por lo tanto $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 13.1.4

El conjunto de los números complejos $\mathbb{C} = \{(a,b) : a \in \mathbb{R} \ \wedge \ b \in \mathbb{R}\}$ cumple que $(\mathbb{C}, +)$ es un grupo conmutativo y como producto por un escalar complejo se considera el producto usual entre los complejos. Observar que este producto cumple las 4 propiedades de producto por escalar pedidas en la definición de espacio vectorial por lo tanto $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

●Los ejemplos 13.1.3 y 13.14 ¡SON MUY IMPORTANTES!

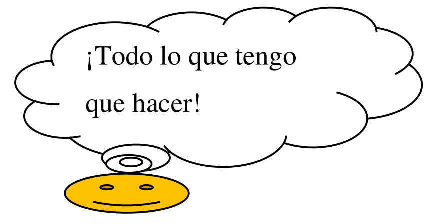
Nos ilustran que un conjunto V de vectores puede ser espacio vectorial sobre cuerpos distintos.

Por eso es que somos bastante rigurosos de escribir *sobre K* ó *K-espacio*….

Cambiando de K las cosas cambian mucho como veremos más adelante…

EJEMPLO 13.1.5

El conjunto $K[x]$ de todos los polinomios con coeficientes en K, K cuerpo conmutativo, con la suma en $K[x]$ y el producto por un escalar usuales forman un espacio vectorial sobre K. Probarlo!!!! (Ver capitulo de polinomios)



EJEMPLO 13.1.6.

Sea el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{ f : f \text{ es función } \wedge f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$.

Para $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y $r \in \mathbb{R}$

Se define $f \oplus g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ como } (f \oplus g)(x) = f(x) + g(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$.

Claramente $f \oplus g$ es un elemento de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Así $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\oplus)$ es un grupo conmutativo.

Se define $r \otimes f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ como } (r \otimes f)(x) = r.f(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$

También obviamente $r \otimes f$ es un elemento de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Luego, el conjunto de funciones de dominio real y codominio real es un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial.

Demostración:

●Veamos que $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\oplus)$ es un grupo conmutativo:

✓Hay que ver que ⊕ es asociativa, hay un neutro para la operación, que todo elemento tiene opuesto y que además la operación es conmutativa.

Por como está definida la operación ⊕ en $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ veremos que las propiedades de la + sobre los números reales son las que mandan…

Sean $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Hay que probar que las funciones $(f \oplus g) \oplus h$ y $f \oplus (g \oplus h)$ son iguales. Esto significa que para todo *x* del dominio (los números reales) ambas coinciden.

$((f \oplus g) \oplus h)(x) = (f \oplus g)(x) + h(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$ (*) por la definición de ⊕.

Si aplicamos nuevamente la definición de ⊕ se tiene

$((f \oplus g) \oplus h)(x) = (f \oplus g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$ (**)

Observar que el tercer miembro de la igualdad (**) es una suma de números reales, y como la suma en $\mathbb{R}$ es asociativa entonces vale

$((f \oplus g) \oplus h)(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$ (***)

Aplicando la definición de ⊕ en el tercer miembro resulta

$((f \oplus g) \oplus h)(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = f(x) + (g \oplus h)(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$ (****)

Pero nuevamente por definición de ⊕

$((f \oplus g) \oplus h)(x) = f(x) + (g \oplus h)(x) = (f \oplus (g \oplus h))(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$

Y el primer y último miembro de esta igualdad nos demuestra la igualdad deseada.

✓Cuál será el neutro de $(\mathcal{F}\ (\mathbb{R},\mathbb{R}),\oplus)$? Tiene que ser una función que por la suma $\oplus$ no modifique el valor de cualquier otra… Veamos, la designaremos por *O* y le haremos cumplir la condición $f \oplus O = O \oplus f = f$ y por la definición significa que

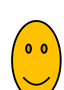
$(f \oplus O)(x) = (O \oplus f)(x) = f(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$, es decir

$(f \oplus O)(x) = f(x) + O(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$ (*),

$(O \oplus f)(x) = O(x) + f(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$ (**)

Pero además $f(x) + O(x) = O(x) + f(x) = f(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$

Son igualdades en el conjunto de los números reales, por lo tanto:

O(x) *debe ser* 0 *para todo* x *real*. Es decir es la función constante nula. 

✓Cuál será el opuesto de cada f de $(\mathcal{F}\ (\mathbb{R},\mathbb{R}),\oplus)$? De existir debe ser una función que sumada con *f* de por resultado *O*. La anotaremos $\lhd f$ y le haremos cumplir la condición para poder determinar su existencia:

$(f \oplus \lhd f)(x) = (\lhd f \oplus f)(x) = O(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$ es decir,

$(f \oplus \lhd f)(x) = f(x) + \lhd f(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$ (*),

$(\lhd f \oplus f)(x) = \lhd f(x) + f(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$ (**)

Pero además $f(x) + \lhd f(x) = \lhd f(x) + f(x) = O(x) = 0 \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$

Son igualdades en el conjunto de los números reales, por lo tanto: $\lhd f\,(x)$ *debe ser el opuesto de f*(x) *para cada x real*. Es decir se tiene así $\lhd f(x) = -f(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$. Por simplicidad y nemotecnia anotaremos a $\lhd f = -f$ definida como $(-f)(x) = -f(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$.

Es obvio que $-f \in$ F$(\mathbb{R},\mathbb{R})$. 

✓Veamos que el grupo $(\mathcal{F}\ (\mathbb{R},\mathbb{R}),\oplus)$ es conmutativo.

Es decir que para $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vale que $f \oplus g = g \oplus f$

Por lo tanto hay que probar $(f \oplus g)(x) = (g \oplus f)(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$, lo que significa

$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$ (*)

$(g \oplus f)(x) = g(x) + f(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$ (**)

Los segundos miembros de (*) y (**) son números reales. Además como en $\mathbb{R}$ la + es conmutativa, esos segundos miembros son iguales, por lo tanto concluimos que el grupo

$(\mathcal{F}\ (\mathbb{R},\mathbb{R}),\oplus)$ es conmutativo.

• Hay que probar ahora que dadas $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y dados $r \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R}$ se verifican las cuatro propiedades requeridas para ser espacio vectorial.

a) $(k+r) \otimes f = k \otimes f \oplus r \otimes f$

Lo que significa $((k+r) \otimes f)(x) = (k \otimes f \oplus r \otimes f)(x) \qquad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$

$((k+r) \otimes f)(x) = (k+r).f(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$ (*) por definición del producto por el escalar.

El segundo miembro de (*) es un producto de números reales, el primer factor es una suma

$k + r$ en $\mathbb{R}$ y el . es distributivo en la suma, por lo tanto

$((k+r) \otimes f)(x) = (k+r).f(x) = k.f(x) + r.f(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$ (**)

Por otra parte, $(k \otimes f \oplus r \otimes f)(x) = (k \otimes f)(x) + (r \otimes f)(x) \qquad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$(***) por definición de la suma $\oplus$ en $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Ahora apliquemos la definición del producto por el escalar en el segundo miembro de (***),

$(k \otimes f \oplus r \otimes f)(x) = (k \otimes f)(x) + (r \otimes f)(x) = k.f(x) + r.f(x) \qquad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$ (****)

Es así que comparando los últimos miembros de las igualdades (**) y (****), como son iguales, vale la igualdad buscada.

b) $(k.r) \otimes f = k \otimes (r \otimes f)$

Esto significa $((k.r) \otimes f)(x) = (k \otimes (r \otimes f))(x) \qquad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$

$((k.r) \otimes f)(x) = (k.r).f(x) \qquad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$ (*) por definición del $\otimes$.

Los tres números del segundo miembro de (*) son números reales y ese producto es en $\mathbb{R}$ donde el producto . es asociativo por lo cual se tiene

$((k.r) \otimes f)(x) = (k.r).f(x) = k.(r.f(x)) \qquad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$ (**)

Ahora analizaremos el segundo miembro,

$(k \otimes (r \otimes f))(x) = k.((r \otimes f)(x)) \qquad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$ por definición de $\otimes$ en $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Si aplicamos otra vez la definición de $\otimes$, resulta que

$(k \otimes (r \otimes f))(x) = k.((r \otimes f)(x)) = k.(r.f(x)) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$ (***)

Observemos que los terceros miembros de (**) y (***) son iguales, por lo tanto se tiene la igualdad buscada.

c) $k \otimes (f \oplus g) = (k \otimes f) \oplus (k \otimes g)$

Hay que probar entonces que

$((k \otimes (f \oplus g))(x) = ((k \otimes f) \oplus (k \otimes g))(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$

Miremos inicialmente el primer miembro de la igualdad a demostrar

$(k \otimes (f \oplus g))(x) = k.((f \oplus g)(x)) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$ por la definición de ⊗. Además,

$(k \otimes (f \oplus g))(x) = k.((f \oplus g)(x)) = k.(f(x) + g(x)) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$ (*) por la definición de ⊕ en $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

En el tercer miembro de (*) son tres números reales, un producto de *k* en una suma. Por propiedades de los números reales, el producto se distribuye en la suma de reales, por lo cual:

$(k \otimes (f \oplus g))(x) = k.((f \oplus g)(x)) = k.(f(x) + g(x)) = k.f(x) + k.g(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$ (**)

Analicemos el segundo miembro de la igualdad a demostrar,

$((k \otimes f) \oplus (k \otimes g))(x) = (k \otimes f)(x) + (k \otimes g)(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$ por la definición de ⊕ en F$(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Aplicando ahora la definición de ⊗, se tiene:

$((k \otimes f) \oplus (k \otimes g))(x) = (k \otimes f)(x) + (k \otimes g)(x) = k.f(x) + k.g(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$ (***)

Comparando los últimos miembros de (**) y (***), que como son iguales, se demostrado la igualdad deseada.

d) $1_{\mathbb{R}} \otimes f = f$

Hay que probar $(1_{\mathbb{R}} \otimes f)(x) = f(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$

$(1_{\mathbb{R}} \otimes f)(x) = 1_{\mathbb{R}}.f(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$ por definición del ⊗.

Se pretende que $(1_{\mathbb{R}} \otimes f)(x) = 1_{\mathbb{R}}.f(x) = f(x) \quad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$ por definición de la multiplicación de los reales y la propiedad del $1_{\mathbb{R}}$ en la multiplicación, se obtiene lo que queríamos probar.

Por lo tanto $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.



Observar que acá los vectores tampoco son flechitas!!!!

EJERCICIO 13.1.7

Generalicemos el Ejercicio 13.1.6:

a) Sea el conjunto $\mathcal{F}(A,\mathbb{R}) = \{f : f \text{ es función } \wedge A \subseteq \mathbb{R} \wedge f : A \to \mathbb{R}\}$.

Para $f \in \mathcal{F}(A,\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ y $r \in \mathbb{R}$

Se define $f \oplus g : A \to \mathbb{R}, \text{ como } (f \oplus g)(x) = f(x) + g(x) \quad (\forall x)(x \in A)$.

Se define $r \otimes f : A \to \mathbb{R}, \text{ como } (r \otimes f)(x) = r.f(x) \quad (\forall x)(x \in A)$

Así $(\mathcal{F}(A,\mathbb{R}),\oplus)$ es un grupo conmutativo. Y $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ es un $\mathbb{R}$- espacio vectorial.

b) Sean *A* un conjunto y $\mathcal{F}(A,\mathbb{R}) = \{f : f \text{ es función } \wedge f : A \to \mathbb{R}\}$.

Para $f \in \mathcal{F}(A,\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ y $r \in \mathbb{R}$

Se define $f \oplus g : A \to \mathbb{R}, \text{ como } (f \oplus g)(x) = f(x) + g(x) \quad (\forall x)(x \in A)$.

Se define $r \otimes f : A \to \mathbb{R}, \text{ como } (r \otimes f)(x) = r.f(x) \quad (\forall x)(x \in A)$

Así ($\mathcal{F}(A,\mathbb{R}),\oplus)$ es un grupo conmutativo. Y $\mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ es un $\mathbb{R}$- espacio vectorial.

c) Sean *A* un conjunto y $(K,+,.)$ un cuerpo conmutativo. Sea ahora

$\mathcal{F}(A,K) = \{f : f \text{ es función } \wedge f : A \to K\}$.

Para $f \in \mathcal{F}(A,K)$, $g \in \mathcal{F}(A,K)$ y $r \in K$

Se define $f \oplus g : A \to K, \text{ como } (f \oplus g)(x) = f(x) + g(x) \quad (\forall x)(x \in A)$.

Se define $r \otimes f : A \to K, \text{ como } (r \otimes f)(x) = r.f(x) \quad (\forall x)(x \in A)$

Así $(\mathcal{F}(A,K),\oplus)$ es un grupo conmutativo. Y $\mathcal{F}(A,K)$ es un *K*- espacio vectorial.

EJERCICIO 13.1.8

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo *K*. Demostrar que valen:

a) Cualquiera sea $\vec{v} \in V$ y dado el $0_K \in K$ entonces $0_K \otimes \vec{v} = \overrightarrow{0_V}$

b) Cualquiera sea $k \in K$ y dado $\overrightarrow{0_V} \in V$ entonces $k \otimes \overrightarrow{0_V} = \overrightarrow{0_V}$

c) Cualquiera sea $\vec{v} \in V$ y dado $1_K \in K$ entonces $(\text{-}1_K) \otimes \vec{v} = -\vec{v}$

d) Si $\vec{v}_i \in V$ con $1 \le i \le n$ y $k \in K$ entonces $k \otimes (\vec{v}_1 \oplus \vec{v}_2 \oplus ... \oplus \vec{v}_n) =$

$= k \otimes \vec{v}_1 \oplus k \otimes \vec{v}_2 \oplus ... \oplus k \otimes \vec{v}_n)$ (Idea: use inducción…)

e) Si $\vec{v} \in V$ y $k_i \in K$ con $1 \le i \le n$ entonces $(k_1 + k_2 + ... + k_n) \otimes \vec{v} =$

$= k_1 \otimes \vec{v} \oplus k_2 \otimes \vec{v} \oplus ... \oplus k_n \otimes \vec{v}$ (Idea: use inducción…)

f) Sean $\vec{v} \in V$ y $k \in K$, si $k \otimes \vec{v} = \overrightarrow{0_V}$ entonces $k = 0_K$ o $\vec{v} = \overrightarrow{0_V}$

EJERCICIO 13.1.9

Probar que un conjunto formado por un único vector con las características del vector nulo, esto es sea *N* = $\left\{\vec{0}\right\}$. Se define en *N* una suma $\oplus$ por : $\vec{0} \oplus \vec{0} = \vec{0}$, probar que (*N*, $\oplus$) es un grupo conmutativo.

Para cualquier cuerpo conmutativo *K* se define $\otimes : K \times N \to N$, $k \otimes \vec{0} = \vec{0}$, para cualquier escalar *k* de *K*. Probar que *N* es un espacio vectorial sobre *K*.

2. Subespacios

Consideremos un subconjunto U de V y V es un espacio vectorial sobre *K, U* **es un subespacio de V sobre *K*,** si U es en sí mismo un espacio vectorial sobre *K*.

El espacio vectorial V sobre el cuerpo conmutativo K tiene definidas las operaciones de suma $\oplus$ sobre V y $\otimes$ el producto por el escalar de $K \times V$ en V.
La idea es que las operaciones ya definidas sobre V, **se restringen a los vectores que son elementos de U** (que son desde ya elementos de V) y se cumplan las propiedades para ser espacio vectorial sobre *K*.

Anotaremos con los mismos símbolos las operaciones restringidas a U. Luego debe cumplirse:

- (U, $\oplus$) grupo conmutativo
- $\otimes$: $K \times U \to U$, para todo par $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de U y para todo par de escalares *k* y *t* cumplen

a) $(k+t) \otimes \vec{u} = k \otimes \vec{u} \oplus k \otimes \vec{u}$

b) $(k.t) \otimes \vec{u} = k \otimes (t \otimes \vec{u})$

c) $k \otimes (\vec{u} \oplus \vec{v}) = (k \otimes \vec{u}) \oplus (k \otimes \vec{v})$

d) $1_K \otimes \vec{u} = \vec{u}$ (1_K designa la unidad de cuerpo K)

No **todo** subconjunto de V es un subespacio de V.
Para ser U un subespacio vectorial de V, como U con la suma tiene que ser un grupo abeliano,
el vector nulo de V (que es único) debe estar en él y las operaciones definidas en V deben ser cerradas en ese subconjunto U. Estos requisitos sacan MUCHOS subconjuntos de V con la posibilidad de ser subespacios.

Observe por ejemplo $A \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $A = \{(a,b) : a = 1\}$, si suma dos vectores de A, se sale "afuera" del conjunto A. Y claramente el (0,0) no está en A, por tanto la suma de $\mathbb{R}^2$ restringida a A no es grupo.

♦ PROPIEDAD 13.2.1

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo conmutativo K. Las operaciones son $\oplus$ la suma sobre V y $\otimes$ el producto por el escalar de $K \times V$ en V. Si el conjunto U está incluido en V.

U es un subespacio vectorial de V sobre K si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:

(1) $U \neq \varnothing$

(2) Si $\vec{u} \in U$ y $\vec{v} \in U$ entonces $\vec{u} \oplus \vec{v}$ también pertenece a U

(3) Si c es cualquier escalar y $\vec{u}$ cualquier vector de U, entonces $c \otimes \vec{u} \in U$

Demostración:

Sabiendo que U es un subespacio de V sobre K debemos demostrar (1), (2) y (3).

Por ser (U, $\oplus$) grupo conmutativo, al menos $\vec{o} \in U$, por lo cual vale (1).

También por ser grupo (U, $\oplus$), la operación $\oplus$ es cerrada en U. Por lo tanto se cumple (2).

Por ser U un espacio vectorial sobre K, se verifica que $\otimes$: $K \times U \to U$. Es decir que vale (3).

Por otra parte si U es un subconjunto de V que cumple (1), (2) y (3), veamos que es un subespacio de V sobre K.

• Es decir que (U, $\oplus$) es un grupo conmutativo.

Se tiene por (2) que la operación $\oplus$ es cerrada en U.

✓Hay que ver que en U, $\oplus$ es asociativa, hay un neutro para la operación, que todo elemento tiene opuesto y que además la operación es conmutativa.

Por ser $\oplus$ la suma sobre V la que opera sobre U, está claro que es asociativa, pues se verifica para toda terna de vectores de V en particular para los de U.

La existencia del neutro en U se obtiene por (1) y (3): pues existe $\vec{u} \in U$ ya que U no es vacío. Además por ser K un cuerpo existe $0 \in K$, $0 \otimes \vec{u} \in U$ por la (3) y por propiedad del ejercicio 13.1.8, $0 \otimes \vec{u} \in U$ y $0 \otimes \vec{u} = \vec{0}$.

Como todos los vectores de V tienen opuesto en particular los de U lo tienen, pero además están en U por la parte (3) y ejercicio 13.1.8.

También la conmutatividad de V se hereda para los elementos de U.

Ahora hay que probar que vale lo siguiente:

• $\otimes$: $K \times U \rightarrow U$, para todo par $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de U y para todo par de escalares k y t se cumplen

a) $(k+t) \otimes \vec{u} = k \otimes \vec{u} \oplus k \otimes \vec{u}$

b) $(k.t) \otimes \vec{u} = k \otimes (t \otimes \vec{u})$

c) $k \otimes (\vec{u} \oplus \vec{v}) = (k \otimes \vec{u}) \oplus (k \otimes \vec{v})$

d) $1_K \otimes \vec{u} = \vec{u}$ (1_K designa la unidad de cuerpo K)

Por (3) vale que $\otimes$: $K \times U \rightarrow U$, además las propiedades de a) a d) valen pues ellas valen para todo par $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de V por lo cual se verifican para $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en U y con los escalares k y t de K.

♦

EJEMPLO 13.2.2

Sea $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$ probemos que es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$

Hay que probar que el subconjunto U cumple las tres propiedades de la Propiedad 13.2.1.

(1) Claramente hay varios vectores en U. Por ejemplo (1, 1), (-4,-4). En particular (0,0).

Luego $U \neq \emptyset$

En muchas oportunidades probar que el vector nulo de V está en el U es muy sencillo, y así determinar que U es no vacio, se confunde el pensar que son intercambiables la condición $U \neq \varnothing$ con la condición que este $\vec{0}$ en U.

(2) Dados dos vectores de U hay que probar que la suma de ellos está en U.

Se usará en este caso el símbolo + para la suma de $\mathbb{R}^2$. Sean $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ elementos de U. Por lo tanto se sabe que

$u_1 - u_2 = 0$ y además $v_1 - v_2 = 0$ (*).

Realizando la suma $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ y analizando si es vector de U:

$(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) = u_1 + v_1 - u_2 - v_2 = (u_1 - u_2) + (v_1 - v_2)$ por ditributividad de la multiplicación, conmutatividad y asociatividad de la suma en los reales. Ahora aplicando (*) resulta que $(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) = 0$. Por lo tanto $\vec{u} + \vec{v} \in U$

(3) Considerando c es cualquier escalar y $\vec{u}$ cualquier vector de U, veremos que $c \otimes \vec{u} \in U$

Si $\vec{u} = (u_1, u_2) \in U$ se verifica $u_1 - u_2 = 0$ (*).

$c \otimes \vec{u} = (c.u_1, c.u_2)$, para ver que está en U: $c.u_1 - c.u_2 = c.(u_1 - u_2) = 0$

Habiendo usado propiedad distributiva de la multiplicación y (*).

Por cumplir U las condiciones (1), (2) y (3) de la Propiedad 13.2.1, U es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 13.2.3

Dado el conjunto $U = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a_{11} = 3.a_{22} \quad \wedge \quad a_{21} + a_{12} = 0\}$

Probar que U es un subespacio del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^{2\times 2}$.(Ver ejemplo 13.1.2).

Hay que probar que $U \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ cumple las tres propiedades de la Propiedad 13.2.1.

(1) El vector nulo en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ es el vector (o la matriz) $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y efectivamente cumple las dos condiciones que definen al conjunto U pues:

0 = 3.0 y 0+ 0= 0, por lo tanto $\vec{0} \in U$ y queda probada la propiedad (1) de la Propiedad 13.2.1.

(2) Sean $A \in U, B \in U$, hay que probar que $A + B \in U$.

$A \in U$ si y sólo si $a_{11} = 3a_{22} \wedge a_{21} + a_{12} = 0$

$B \in U$ si y sólo si $b_{11} = 3b_{22} \wedge b_{21} + b_{12} = 0$

$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, para que *A+B* sea elemento de U

debe cumplir que: $c_{11} = 3c_{22}$ y que $c_{21} + c_{12} = 0$

$c_{11} = a_{11} + b_{11} = 3a_{22} + 3b_{22}$ porque $A \in U$ y $B \in U$, sacando factor común 3 queda

$c_{11} = a_{11} + b_{11} = 3(a_{22} + b_{22}) = 3c_{22}$. Además vale que:

$c_{21} + c_{12} = (a_{21} + b_{21}) + (a_{12} + b_{12}) = (a_{21} + a_{12}) + (b_{21} + b_{12}) = 0 + 0 = 0$.

luego $A + B \in U$. Por lo tanto vale (2) de la Propiedad 13.2.1.

(3) Si *c* es cualquier escalar y $A \in U$, hay que probar que $c \otimes A \in U$

$c \otimes A = \begin{pmatrix} c.a_{11} & c.a_{12} \\ c.a_{21} & c.a_{22} \end{pmatrix}$

Como $a_{11} = 3.a_{22}$ entonces $c.a_{11} = c.3.a_{22} = 3.(c.a_{22})$ por la conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{R}$.

Además usando propiedad distributiva $c.a_{21} + c.a_{12} = c.(a_{21} + a_{12}) = c.0 = 0$, entonces $c \otimes A \in U$. Es decir vale (3) de la Propiedad 13.2.1.

Como se cumplen las tres propiedades, U es un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sobre $\mathbb{R}$.

EJERCICIO 13.2.4

Probar que para todo espacio vectorial *V* sobre el cuerpo *K,*

a) *V* es subespacio de *V* sobre el cuerpo *K.*

b) $\{\overrightarrow{0_V}\}$ es subespacio de *V* sobre el cuerpo *K.*

Por ser $\{\overrightarrow{0_V}\}$ y *V* subespacios para cualquier espacio vectorial *V* sobre *K*, se acostumbra a referirse a ellos como **subespacios triviales de *V***.

EJEMPLO 13.2.5

Probar que $S=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\ : x_1-2x_2=0 \ \wedge\ x_3=5x_4\ \}\subseteq \mathbb{R}^4$

es un subespacio del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$. La operación de suma en $\mathbb{R}^4$ se anotará + .

Para hacer la demostración usaremos la Propiedad 13.2.1.

(1) El vector nulo $\vec{0}=(0,0,0,0)$ de $\mathbb{R}^4$ cumple las condiciones que definen al conjunto *S,* luego $S\neq\varnothing$, por lo cual vale (1).

(2) Sean $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3,u_4)$ y $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3,v_4)$ dos vectores pertenecientes a S, hay que probar que el vector $\vec{u}+\vec{v}\in S$.

$u_1-2u_2=0\ \wedge\ u_3=5u_4$ porque $\vec{u}\in S$ y $v_1-2v_2=0\ \wedge\ v_3=5v_4$ porque $\vec{v}\in S$

$\vec{u}+\vec{v}=(u_1+v_1,\ u_2+v_2,\ u_3+v_3,\ u_4+v_4)=(w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4)$

Veamos que $\vec{w}$ cumple las condiciones para estar en *S:*

$$w_1-2w_2=(u_1+v_1)-2(u_2+v_2)=\ u_1-2u_2+v_1-2v_2=0+0=0$$

↑

distribuyendo el 2 y agrupando convenientemente

De $u_3=5u_4$, $v_3=5v_4$ sumando miembro a miembro se obtiene que

$u_3+v_3=5u_4+5v_4=5(u_4+v_4)$, es decir: $w_3=5w_4$

Por lo tanto $\vec{u}+\vec{v}$ cumple las condiciones para estar en *S*.

(3) Si c es cualquier escalar y $\vec{v}\in S$, hay que probar que $c\otimes\vec{v}\ \in S$.

Donde $c\otimes\vec{v}=(c.v_1,\ c.v_2,\ c.v_3,\ c.v_4)$

$c.v_1-2c.v_2\ =\ c.(v_1-2v_2)\ =\ c.0\ =0$ (porque como $\vec{v}\in S$ vale que $v_1-2v_2=0$)

y de $v_3=5v_4$ se obtiene $c.v_3=5.c.v_4$.

Luego $c\otimes\vec{v}\ \in S$

Quedaron así probadas las tres condiciones de la Propiedad 13.2.1, entonces *S* es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$

EJEMPLO 13.2.6

Analizar si $H = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1.x_3 = 0 \ \} \subseteq \mathbb{R}^3$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$

(1) El vector nulo de $\mathbb{R}^3$ es $(0,0,0)$ y $0.0=0$, luego pertenece a H. Asi $H \neq \emptyset$

(2) $\vec{u} = (1,-5,0) \in H$ porque $1.0=0$, y $\vec{v} = (0, -2,3) \in H$ porque $0.3=0$,
sin embargo en la suma $\vec{u} + \vec{v} = (1, -7,3)$ resulta $1.3 \neq 0$.

Tomando dos vectores de *H* su suma no está en *H,* entonces *H* NO es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$.

EJERCICIO 13.2.7

Explique claramente si $\mathbb{R}^2$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$ o no lo es.

EJERCICIO 13.2.8

Probar que el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo de *m* ecuaciones y *n* incógnitas, es un subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$.

Observación: Si un sistema homogéneo *m* por *n* es compatible determinado, el subespacio es el conjunto unitario $\{(0,0,...,0)\}$ es el **subespacio nulo de** $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$, es el menor subespacio posible.

EJERCICIO 13.2.9

Probar que el conjunto $S = \left\{ A \in K^{nxn} : A.B = B.A, \text{ con } B \text{ una matriz fija } K^{nxn} \right\}$ es subespacio vectorial de K^{nxn} sobre *K*

3. Combinación lineal. Vectores generadores.

Vamos a dar conceptos muy importantes que determinan características intrínsecas de los espacios vectoriales. También en este apartado quedará claro porque en cada oportunidad se destaca que el espacio vectorial es sobre *K* (Mirar los ejemplos 13.1.3 y 13.1.4).
Una de las aplicaciones de los vectores es la Física y ellos sirven por ejemplo para estudios sobre fuerzas, en ese tema se acostumbra en varias oportunidades a buscar la "resultante" entre algunas fuerzas. La resultante es una fuerza que reemplaza con su efecto la suma de otras fuerzas o de múltiplos de otras fuerzas. Esto determino la necesidad de las operaciones ya definidas y con esas definiciones resulta lo siguiente:

Un vector $\vec{v}$ de un espacio vectorial V sobre *K*, es **combinación lineal** de los vectores
$\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_k} \in V$ sobre *K*, si existen escalares $c_1, c_2, \dots, c_k$ tales que

$$\vec{v} = c_1 \otimes \overrightarrow{v_1} \oplus c_2.\overrightarrow{v_2} \oplus \dots \oplus c_k \otimes \overrightarrow{v_k} = \sum_{j=1}^{k} (c_j \otimes \overrightarrow{v_j})$$

(Usamos por simplificación el símbolo de sumatoria para indicar la suma de k vectores de *V*)

EJEMPLO 13.3.1

Dado el vector $(5,7) \in \mathbb{R}^2$, podemos escribirlo como (5,0) + (0,7) = 5.(1,0) + 7.(0,1)

Se han simbolizado por simplificación, el producto por un escalar con . y la suma de vectores con +.
Decimos entonces que el vector (5,7) es combinación lineal de los vectores (1,0) y (0,1) sobre los reales.

Mire cuales son los escalares de esta combinación lineal.

Claramente cualquier vector (a,b) podrá expresarse como combinación lineal de esos vectores, ya que $(a,b) = a.(1,0) + b.(0,1)$.

Estos vectores (1,0) y (0,1) **generan** $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$ porque todo vector puede expresarse como combinación lineal de ellos sobre los reales.

Mire cuales son los escalares de esta combinación lineal.

EJEMPLO 13.3.2

Analicemos si el (5,7) es combinación lineal de (2,1) y (-3,2).

Tenemos que plantear que $(5,7) = k_1.(2,1) + k_2.(-3,2)$, y ver si existen k_1 y k_2 en los números reales que verifiquen esa igualdad. (Acá también se han simbolizado por simplificación, el producto por un escalar con . y la suma de vectores con +)

Usando las operaciones de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$, se tiene entonces que:

$(5,7) = (k_1 2 - 3k_2, k_1 + 2k_2)$, por la igualdad entre pares ordenados, podemos entonces plantear el sistema de ecuaciones:

$\begin{cases} 5 = 2k_1 - 3k_2 \\ 7 = k_1 + 2k_2 \end{cases}$, expresado en forma matricial: $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

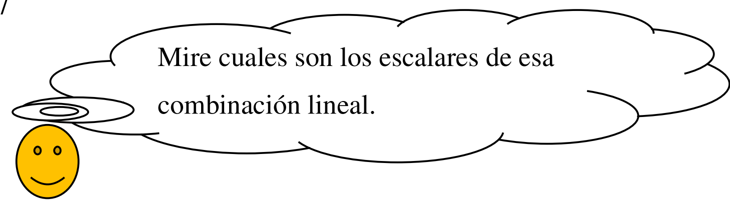
Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes: 2.2-(-3).1= 4+3= 7

Como el determinante es distinto de 0, el sistema tiene solución única en los reales.

Podemos encontrar la solución por el método de Cramer haciendo:

$k_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}}{7} = \dfrac{10+21}{7} = \dfrac{31}{7}$ y $k_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}{7} = \dfrac{14-5}{7} = \dfrac{9}{7}$, por lo tanto:

$(5,7) = \dfrac{31}{7}(2,1) + \dfrac{9}{7}(-3,2)$, es decir (5, 7) es combinación lineal de los vectores dados.



Será que cualquier vector (a,b) puede expresarse como combinación lineal de los vectores (2,1) y (-3,2)?

Para ello debemos plantear:

$(a,b) = k_1.(2,1) + k_2.(-3,2)$ y entonces se tiene que:

$\begin{cases} a = 2k_1 - 3k_2 \\ b = k_1 + 2k_2 \end{cases}$ y $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, el determinante de la matriz de los coeficientes es el que ya se calculó y es distinto de 0, por lo tanto el sistema tiene solución única para cualquier vector (a,b).

Resolviendo de manera similar al caso particular:

$k_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} a & -3 \\ b & 2 \end{vmatrix}}{7} = \dfrac{2a+3b}{7}$ y $k_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}}{7} = \dfrac{2b-a}{7}$, por lo tanto existen los números reales que permiten expresar (*a, b*) . Justifique que k_1 y k_2 son números reales;

¡Si!¿Cuáles son los escalares en este caso?

y así $(a,b) = \dfrac{2a+3b}{7}.(2,1) + \dfrac{2b-a}{7}.(-3,2)$

Decimos entonces que estos dos vectores (2, 1) y (-3, 2) **generan** $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$, ya que todo vector puede expresarse como combinación lineal de ellos.

Compare los resultados de los ejemplos 13.3.1 y 13.3.2 observando a los escalares que permiten generar a los vectores. ¿Qué puede decir?

No pasa que cualquier par de vectores de $\mathbb{R}^2$ sean generadores de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$.

Acá tenemos el siguiente

EJEMPLO 13.3.3

Veamos si el (5,7) es combinación lineal de los vectores (2,4) y (1,2) sobre los reales.

Analizamos si existen escalares tales que $(5,7) = k_1.(2,4) + k_2.(1,2)$ (otra vez simbolizamos el producto por un escalar con . y la suma de vectores con +) entonces

$\begin{cases} 5 = 2k_1 + k_2 \\ 7 = 4k_1 + 2k_2 \end{cases}$, entonces: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ y calculando el determinante de la matriz A del sistema es: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$.

Como el determinante es 0, este sistema no tiene solución única ya que el r(A) = 1 y el sistema tiene 2 incógnitas. Analicemos el rango de la matriz ampliada tomando una submatriz:

$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 10 = -3$, por lo tanto r(A|B)=2, el sistema es incompatible, no tiene solución. Decimos entonces que el vector (5,7) no puede escribirse como combinación lineal de los vectores dados.

Por ello (2,4) y (1,2) no es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 13.3.4

Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ -6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

del espacio vectorial $\mathbb{R}^{2\times 3}$ sobre $\mathbb{R}$, analicemos si la matriz *D* es una combinación lineal de las matrices *A* y *B* sobre los reales.

Planteemos la igualdad y determinemos si existen los escalares reales (se usa + para suma de los vectores, las matrices, y para el producto por el escalar el .):

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ -6 & -3 & 0 \end{pmatrix} = k_1 . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} + k_2 . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

usando las propiedades de las operaciones de $\mathbb{R}^{2\times 3}$ sobre $\mathbb{R}$ tenemos entonces:

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ -6 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k_1 + k_2 & 2k_2 & k_1 \\ 3k_2 & 3k_1 + 3k_2 & 2k_1 + k_2 \end{pmatrix}.$$

Por la igualdad de matrices obtenemos:

$$\begin{cases} 0=2k_1 + k_2 \\ -4=2k_2 \\ 1 = k_1 \\ -6 = 3k_2 \\ -3 = 3k_1 + 3k_2 \\ 0 = 2k_1 + k_2 \end{cases}$$

Se tiene entonces de las ecuaciones 2 y 3, que $k_1 = 1$ y $k_2 = -2$.

Esos valores satisfacen todas las ecuaciones, es decir son solución del sistema; por lo tanto decimos que *D* es combinación lineal de *A* y de *B* sobre $\mathbb{R}$ ya que

D = 1.*A* + (-2).*B*

Algunos de los ejemplos anteriores nos sugieren las siguientes definiciones:

Si $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_m}$ son vectores de un espacio vectorial V sobre *K*, el conjunto *S* de todas las combinaciones lineales de esos vectores sobre *K*, es decir:

$S = \left\{ \vec{u} : \vec{u} = \sum_{i=1}^{m} (c_i \otimes \vec{v_i}) \wedge c_i \in K \text{ para } 1 \le i \le m \right\}$ es un subespacio de V, llamado **subespacio generado** por los vectores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_m}$ sobre *K*.

(Observación: acá se ha simbolizado la suma de m vectores de *V* con el símbolo de sumatoria)

S cumple las propiedades de subespacio. (¡Ya lo demostraremos! Ver EJEMPLO 13.3.5)

A los vectores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_m}$ se los llama **generadores de *S* sobre *K*.**

Para indicar esta situación se usa la siguiente notación, $S = \langle \vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_m} \rangle$ o

$S = \overline{\left\{ \vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_m} \right\}}$

Dado un subespacio *T* de un espacio vectorial V sobre *K*, un conjunto ***G* es un conjunto de generadores de *T* sobre *K*** si se cumple:

1) $G \subseteq T$

2) Todo vector de *T* es combinación lineal sobre *K* de los vectores de *G.*

Si un conjunto de vectores genera el espacio vectorial V sobre *K*, es $\langle \vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_m} \rangle = V$, decimos que $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_m}$ **generan V sobre *K*** o que $\left\{ \vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_m} \right\}$ es un **conjunto generador de V sobre *K*.** En este caso **todo** vector de V se puede escribir como combinación lineal sobre *K* de los $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_m}$.

De ser así, V admite un número finito de generadores sobre *K*.

Más adelante presentaremos ejemplos que no siempre es posible encontrar conjuntos finitos que generen a un espacio.

En los ejemplos 13.3.1 y 13.3.2, vimos conjuntos de vectores con la propiedad que todo vector de $\mathbb{R}^2$ es combinación lineal de ellos sobre los reales, entonces esos vectores son generadores de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$, y podemos escribir que $\mathbb{R}^2 = \langle (1,0),(0,1) \rangle$ y que $\mathbb{R}^2 = \langle (2,1),(-3,2) \rangle$, como vemos el conjunto de generadores de un espacio vectorial no es único.

EJEMPLO 13.3.5

Si $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_m}$ son vectores de un espacio vectorial V sobre *K*, entonces

$S = \left\{ \vec{u} : \vec{u} = \sum_{i=1}^{m} (c_i \otimes \overrightarrow{v_i}) \ \wedge \ c_i \in K \ \text{ para } 1 \le i \le m \right\}$ es un subespacio de *V* sobre *K*.

Para demostrar lo deseado debemos analizar que se verifican las tres condiciones de la Propiedad 13.2.1.

Claramente varios vectores son elementos de *S*, cada uno de los $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_m}$ y también el nulo de V, considerando todos los escalares como el 0_K, por lo tanto $S \neq \emptyset$, por lo cual se verifica (1) de 13.2.1.

Para (2), consideremos los vectores

$\vec{u} = \sum_{i=1}^{m} (h_i \otimes \overrightarrow{v_i})$ con los $h_i \in K$ para todo $i, 1 \le i \le m$ y

$\vec{w} = \sum_{i=1}^{m} (r_i \otimes \overrightarrow{v_i})$ con los $r_i \in K$ para todo $i, 1 \le i \le m$, ambos por su definición en *S*.

No olvidar que por lo tanto son vectores del espacio vectorial *V* sobre *K*, por lo cual valen las propiedades que relacionan ambas operaciones (la suma de vectores y producto por el escalar y las propiedades d) y e) del EJERCICIO 13.1.8). Se sumarán aplicando esas propiedades obteniéndose:

$\vec{u} \oplus \vec{w} = \sum_{i=1}^{m} (h_i \otimes \overrightarrow{v_i}) \oplus \sum_{i=1}^{m} (r_i \otimes \overrightarrow{v_i}) = \sum_{i=1}^{m} ((h_i + r_i) \otimes \overrightarrow{v_i})$ siendo

$h_i + r_i \in K$ para cada $i, 1 \le i \le m$.

Por lo cual $\vec{u} \oplus \vec{w} \in S$.

Para (3), sean $\vec{u} \in S$ y $k \in K$; tenemos que probar $k \otimes \vec{u} \in S$.

Por definición de *S*, $\vec{u} = \sum_{i=1}^{m} (h_i \otimes \overrightarrow{v_i})$ con los $h_i \in K$ para todo $i, 1 \le i \le m$; y por los comentarios usados para demostrar (2),

$k \otimes \vec{u} = k \otimes \sum_{i=1}^{m} (h_i \otimes \overrightarrow{v_i}) = \sum_{i=1}^{m} (k \otimes (h_i \otimes \overrightarrow{v_i})) = \sum_{i=1}^{m} (k.h_i \otimes \overrightarrow{v_i})$ con

$k.h_i \in K$ para cada $i, 1 \le i \le m$. Por lo tanto $k \otimes \vec{u} \in S$.

EJEMPLO 13.3.6

a) Analicemos que característica tienen los vectores del subespacio
$S = \langle (3,0,0),(0,2,0) \rangle$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$.



Por simplificación de notación, + designa la suma de vectores en $\mathbb{R}^3$ y el producto por el escalar real, pensar y el contexto no le permitirá equivocarse.

Todo vector de *S* es una combinación lineal sobre los reales de estos dos vectores, entonces:

si $\vec{u} \in S$ entonces $\vec{u} = k_1.(3,0,0) + k_2.(0,2,0)$, para k_1 y k_2 números reales, entonces

$$(u_1, u_2, u_3) = (3.k_1, 2.k_2, 0)$$

Ya que los escalares son arbitrarios y varían en todo el conjunto de los números reales en cada una de las componentes y de manera independiente una de la otra, entonces la única condición que hay sobre esas ternas de reales es sobre la tercera componente.

Por lo tanto *S* es el subespacio de las ternas de reales de tercera componente nula.

b) Sea $H = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a + b = 0\}$. Dejamos para probar que *H* es subespacio de $\mathbb{R}^3$ sobre los reales (sale muy fácil…). Busquemos un conjunto de generadores de *H*.

Todo vector de *H* debe cumplir que la suma de la primera y la segunda componente es 0, entonces si el vector $\vec{v} \in H$, con $\vec{v} = (a,b,c)$ es $a + b = 0$ por lo cual despejando $b = -a$, entonces podemos escribir $\vec{v} = (a,-a,c)$.

Usando las operaciones de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$ (+ designa la suma de vectores en $\mathbb{R}^3$ y el producto por el escalar real) resulta que

$$\vec{v} = (a,-a,0) + (0,0,c) = a.(1,-1,0) + c.(0,0,1).$$

Hemos encontrado entonces que cualquier vector de *H* puede expresarse como combinación lineal de los vectores (1,-1,0) y (0, 0,1), por lo tanto esos vectores determinan un conjunto generador de *H*.

Observar como se ha descompuesto al vector $\vec{v} = (a,-a,c)$ como combinación lineal sobre los reales: $\vec{v} = (a,-a,0) + (0,0,c) = a.(1,-1,0) + c.(0,0,1)$ y porque NO

$\vec{v} = (a,-a,c) = (a,0,0) + (0,-a,0) + (0,0,c) = a.(1,0,0) + (-a).(0,1,0) + c.(0,0,1)$

Los generadores de un espacio deben ser vectores del espacio. Y los vectores (1,0, 0) y (0,1, 0) NO son vectores de *H*.

EJERCICIO 13.3.7

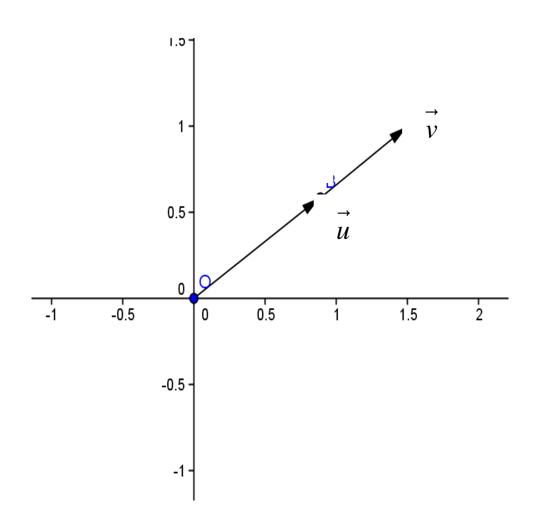
Hallar un conjunto de generadores de

$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2} : a + b = 0 \quad \wedge \quad c = 2d \right\}$ sobre $\mathbb{R}$.

4. Dependencia e Independencia lineal de vectores

Volvamos a los ejemplos motivadores de este capítulo.

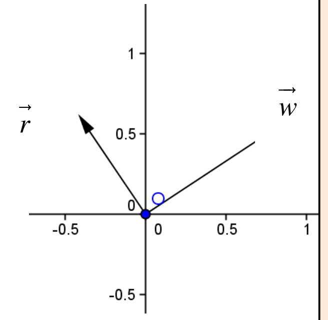
Consideremos el espacio $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad b \in \mathbb{R}\}$ que es el conjunto de los vectores con inicio en el origen de coordenadas y final en el punto (*a, b*). Veamos algunos ejemplos y su representación:



Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ están sobre una misma recta.
Uno de ellos es un múltiplo escalar del otro.

Por ejemplo, supongamos $\frac{5}{3}.\vec{u} = \vec{v}$

por lo cual $\frac{5}{3}.\vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$



Los vectores $\vec{r}$ y $\vec{w}$ NO están sobre una misma recta.
Ninguno de ellos es un múltiplo escalar del otro. Justifique…..

Para obtener al $\vec{0}$ como suma de estos vectores ó múltiplos escalares de ellos, los escalares deben ser 0 para lograrlo.

Se hará una generalización de estas situaciones. Ya se han visto ejemplos muy dispares de espacios vectoriales y en la mayoría de ellos no se tiene la posibilidad de su representación gráfica, pero aún así se usa un lenguaje que tiene que ver con lo destacado en estas dos situaciones geométricas: estar en una misma recta o no estar en una misma recta (ser dependientes en una recta o ser vectores en rectas independientes)

Sean $\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},...,\ \overrightarrow{v_k}$ vectores de V, espacio vectorial sobre *K*.

Los vectores son **linealmente dependientes sobre *K*** si existen escalares $c_1, c_2, ..., c_k$

no todos nulos tales que

$$c_1 \otimes \overrightarrow{v_1} \oplus c_2 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus ... \oplus c_k \otimes \overrightarrow{v_k} = \sum_{j=1}^{k} (c_j \otimes \overrightarrow{v_j}) = \vec{0}$$

Los vectores $\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},...,\ \overrightarrow{v_k}$ de un espacio vectorial V sobre *K*, son **linealmente independientes sobre *K*** si la igualdad

$c_1 \otimes \overrightarrow{v_1} \oplus c_2 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus ... \oplus c_k \otimes \overrightarrow{v_k} = \sum_{j=1}^{k} (c_j \otimes \overrightarrow{v_j}) = \vec{0}$ se cumple sólo si

$c_1, c_2, ..., c_k$ **son todos nulos**

EMPLO 13.4.1

El vector (3, 6)$\in \mathbb{R}^2$ es combinación lineal del vector (1, 2) sobre $\mathbb{R}$ porque (3, 6) = 3.(1, 2). En forma equivalente: 3.(1, 2) + (-1).(3, 6) = (0, 0) = $\vec{0}$, entonces los vectores (1, 2) y (3, 6) son linealmente dependientes sobre $\mathbb{R}$.

Si los escalares c_j, $j = 1,...,k$, son todos nulos, la relación

$c_1 \otimes \overrightarrow{v_1} \oplus c_2 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus ... \oplus c_k \otimes \overrightarrow{v_k} = \vec{0}$ se cumple claramente.

La definición dice que los vectores son linealmente independientes si se cumple **únicamente** en ese caso.

Si la relación $c_1 \otimes \overrightarrow{v_1} \oplus c_2 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus ... \oplus c_k \otimes \overrightarrow{v_k} = \vec{0}$ se cumple también cuando algún escalar es no nulo, los vectores son linealmente dependientes.

EJEMPLO 13.4.2

Determinar si los vectores $\vec{u}=(-1,2.0),\ \vec{v}=(-3,0,2),\ \vec{w}=(0,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$, son o no linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

Sea $c_1.\vec{u}+c_2.\vec{v}+c_3.\vec{w}=(0,0,0)=(-c_1-3c_2,\ 2c_1+c_3,\ 2c_2+c_3)=(0,0,0)$

Se obtiene el siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{cases}-c_1-3c_2=0\\2c_1+c_3=0\\2c_2+c_3=0\end{cases}$$, pasando a forma matricial tenemos que $\begin{pmatrix}-1 & -3 & 0\\2 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$,

el determinante de la matriz A de los coeficientes es 6. Así es que el rango de la matriz A del sistema al igual que el de la ampliada es 3 e igual al número de incógnitas; por lo tanto el sistema tiene única solución y por ser homogéneo ella es la trivial $c_1=c_2=c_3=0$.

Por lo tanto los vectores dados son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 13.4.3

Analicemos si las siguientes matrices de $\mathbb{R}^{2x2}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\4 & 2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2 & 6\\8 & 4\end{pmatrix}$$

Planteamos que: $k_1.\begin{pmatrix}1 & 3\\4 & 2\end{pmatrix}+k_2.\begin{pmatrix}2 & 6\\8 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$. Veamos cuales escalares la cumplen.

Aplicando las operaciones del espacio $\mathbb{R}^{2x2}$ sobre $\mathbb{R}$ y la igualdad en $\mathbb{R}^{2x2}$, queda

entonces el sistema: $\begin{cases}k_1+2k_2=0\\3k_1+6k_2=0\\4k_1+8k_2=0\\2k_1+4k_2=0\end{cases}$ (1) . La matriz del sistema es: $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 6\\4 & 8\\2 & 4\end{pmatrix}$.

Como el sistema es homogéneo podemos trabajar sólo con ella.

Aplicando varias operaciones elementales sobre ella resulta equivalente por filas a

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y reinterpretando como sistema, se tiene que $k_1 + 2k_2 = 0$ es la única ecuación significativa del mismo.

¡SI!

Por lo cual $k_1 = -2k_2$, es decir el conjunto solución de (1) es $\{(-2k_2, k_2) : k_2 \in \mathbb{R}\}$. El sistema (1) admite infinitas soluciones en $\mathbb{R}$, por lo tanto las matrices **no son linealmente independientes sobre** $\mathbb{R}$, es decir **son linealmente dependientes sobre** $\mathbb{R}$.

Por ejemplo podemos armar la combinación lineal:

$$-2.\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad +1.\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Algo del lenguaje usual en este tema.
Dada las definiciones de vectores linealmente dependientes o independientes sobre *K* :

Si los vectores $\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},...,\ \overrightarrow{v_k}$ de un espacio vectorial V sobre K son linealmente dependientes sobre *K*, $\left\{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},...,\ \overrightarrow{v_k}\right\}$ se dice que el **conjunto es dependiente sobre *K*** o que es un **conjunto dependiente**.

Si los vectores $\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},...,\ \overrightarrow{v_k}$ de un espacio vectorial V sobre K son linealmente independientes sobre *K*, $\left\{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},...,\ \overrightarrow{v_k}\right\}$ se dice que el **conjunto es libre sobre *K*** o que es un **conjunto libre.**

♦PROPIEDADES 13.4.4

Dado un espacio vectorial *V* sobre el cuerpo *K*:

a) Si $\vec{0} \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ...\overrightarrow{v_n}\} \subseteq V$, entonces el conjunto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ...\overrightarrow{v_n}\}$ es linealmente dependiente sobre *K*.

b) El conjunto $\{\vec{v}\} \subseteq V$ es linealmente independiente sobre *K* si y sólo si $\vec{v} \neq \vec{0}$

c) Si $S = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ...\overrightarrow{v_n}\} \subseteq V$ es un conjunto linealmente independiente sobre *K* entonces cualquier subconjunto no vacío *T* de *S*, es *T* linealmente independiente sobre *K*.

d) Si $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ...\overrightarrow{v_n}\} \subseteq V$ es un conjunto linealmente dependiente sobre *K* y $\vec{u} \in V$ entonces $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ...\overrightarrow{v_n}, \vec{u}\}$ también el linealmente dependiente sobre *K*.

e) Si $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ...\overrightarrow{v_n}\} \subseteq V$ es un conjunto linealmente independiente sobre *K* entonces todo vector generado por este conjunto se expresa de una manera única como $\vec{v} = k_1 \otimes \overrightarrow{v_1} \oplus k_2 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus ... \oplus k_n \otimes \overrightarrow{v_n}$

Demostración:

a) Como $\vec{0} \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ...\overrightarrow{v_n}\}$, existe uno de los vectores entre $\overrightarrow{v_i} = \vec{0}, \quad 1 \leq i \leq n$, sea $\overrightarrow{v_j} = \vec{0}$ entonces $\vec{0} = 0 \otimes \overrightarrow{v_1} \oplus 0 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus ... \oplus 1_K \otimes \overrightarrow{v_j} \oplus ... \oplus 0 \otimes \overrightarrow{v_n}$, por lo tanto uno de los escalares es no nulo y entonces el conjunto es linealmente dependiente.

b) Observar que lo dicho es equivalente (por la contrarrecíproca) a demostrar:

El conjunto $\{\vec{v}\} \subseteq V$ es linealmente dependiente sobre *K* si y sólo si $\vec{v} = \vec{0}$.

Si $\vec{v} = \vec{0}$, por a) es dependiente.

Veamos la recíproca, para ello al considerar que $\{\vec{v}\} \subseteq V$ es linealmente dependiente sobre *K*, entonces existe $c \in K$ tal que $c \neq o$ y $c \otimes \vec{v} = \vec{0}$.

Como *K* es un cuerpo, todo elemento no nulo es invertible, por lo cual existe el inverso de *c* y vale entonces: $c^{-1} \in K$ y $c^{-1} \otimes (c \otimes \vec{v}) = c^{-1} \otimes \vec{0}$. Usando las propiedades del producto por el escalar: $(c^{-1}.\, c) \otimes \vec{v} = c^{-1} \otimes \vec{0} = \vec{0}$.

Además vale que $c^{-1}.\, c = 1_K$ por lo cual resulta: $1_K \otimes \vec{v} = \vec{v} = \vec{0}$

c) Sea $T \subseteq S$. Si *T = S* resulta que *T* es linealmente independiente trivialmente.
Sea $T \subseteq S \quad \wedge \quad T \neq S$, sin pérdida de generalidad se puede considerara que son los primeros vectores de *S* siendo así $T = \left\{ \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ... \overrightarrow{v_j} \right\}$ con *j < n.*

Hay que ver que si

$$\vec{0} = k_1 \otimes \overrightarrow{v_1} \oplus k_2 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus ... \oplus k_j \otimes \overrightarrow{v_j} \text{ entonces para todo } i, 1 \leq i \leq j, k_i = 0_K .$$

Podemos sumar el vector nulo a ambos miembros con la siguiente escritura:
$\vec{0} \oplus \vec{0} = \vec{0} = k_1 \otimes \overrightarrow{v_1} \oplus k_2 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus ... \oplus k_j \otimes \overrightarrow{v_j} \oplus 0_K \otimes \overrightarrow{v_{j+1}} \oplus ... \oplus 0_K \otimes \overrightarrow{v_n}$ y como *S* es linealmente independiente todos los escalares son nulos, en particular los que afectan los vectores de *T*, por lo tanto *T* es linealmente independiente sobre *K.*

d) Como ejercicio.

e) Supongamos que hay dos combinaciones lineales con distintos escalares que expresan a $\vec{v}$ con los vectores de $\left\{ \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ... \overrightarrow{v_n} \right\} \subseteq V$, es decir:

$$\vec{v} = k_1 \otimes \overrightarrow{v_1} \oplus k_2 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus ... \oplus k_n \otimes \overrightarrow{v_n} = t_1 \otimes \overrightarrow{v_1} \oplus t_2 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus ... \oplus t_n \otimes \overrightarrow{v_n} \qquad (*)$$

Hay que mostrar que $k_i = t_i, \quad \text{para todo } i,\ 1 \leq i \leq n$.

A partir de (*), tenemos que:

$$\vec{0} = (k_1 \otimes \overrightarrow{v_1} \oplus k_2 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus ... \oplus k_n \otimes \overrightarrow{v_n}) - (t_1 \otimes \overrightarrow{v_1} \oplus t_2 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus ... \oplus t_n \otimes \overrightarrow{v_n})$$

Y por propiedades de las operaciones en el espacio tenemos que:

$$\vec{0} = (k_1 - t_1) \otimes \overrightarrow{v_1} \oplus (k_2 - t_2) \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus ... \oplus (k_n - t_n) \otimes \overrightarrow{v_n}$$

Como los vectores son linealmente independientes entonces
$k_i - t_i = 0 \quad \text{para todo } i, 1 \leq i \leq n \text{ entonces } k_i = t_i \quad \text{para cada} \quad 1 \leq i \leq n$

Por lo tanto todo vector se escribe de manera única como combinación de vectores linealmente independientes.

♦

5. Base y dimensión

Desarrollaremos un concepto totalmente importante dentro de esta rama de la Matemática, que va a confirmar algunos conceptos que tenemos incorporados intuitivamente o culturalmente en los ejemplos motivadores.

¿Cómo son los vectores que están en la recta numérica $\mathbb{R}$?

$\vec{0}$

Todos están en "una dirección".

Piense y opine sobre los vectores del plano usual y del espacio usual. Tiene en apartados anteriores ya algo que le puede servir.

¿?

Sean $\vec{v_1},\ \vec{v_2},...,\ \vec{v_n}$, *n* vectores de un espacio vectorial *V* sobre *K*

El conjunto $B=\left\{\vec{v_1},\ \vec{v_2},...,\ \vec{v_n}\right\}$ es una **base de *V* sobre *K***, si cumple las siguientes condiciones:

1) $\vec{v_1},\ \vec{v_2},...,\ \vec{v_n}$ son linealmente independientes sobre *K*.

2) $\vec{v_1},\ \vec{v_2},...,\ \vec{v_n}$ generan *V* sobre *K*.

Un espacio vectorial *V* sobre *K* tiene **dimensión *n***, si admite una base de n vectores y lo anotamos $\dim_K V = n$.

Además, como *n* es un número natural decimos que es un espacio de dimensión finita.

Veremos que la definición de dimensión no es ambigua pues se demostrará más adelante que todas las bases de un espacio tienen igual número de vectores.

Por razones que quedarán claras más adelante en cuanto a su importancia que sea así, las bases se consideran como conjuntos ordenados de vectores. Para indicar esta situación los vectores de la base los colocaremos entre paréntesis.

EJEMPLO 13.5.1

a) En el ejercicio 13.3.1 se demostró que {(1,0) , (0,1) } generan el espacio $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$. Es inmediato probar que los conjuntos siguientes son respectivamente las **bases canónicas**

$\big((1,0),(0,1)\big)$, $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$, $\big((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\big)$

de los espacios $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$. Y así, las dimensiones de estos espacios son: $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$ y $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 = 4$

Veamos para el caso de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$ que $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ es base.

Se deben comprobar las dos condiciones de la definición. Por simplificación indicaremos con . el producto por el escalar y con + la suma en $\mathbb{R}^3$.

1) $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ son libres sobre $\mathbb{R}$:

Sea $k_1.(1,0,0) + k_2.(0,1,0) + k_3.(0,0,1) = \vec{0}$, veremos que los escalares son nulos. Haciendo las operaciones indicadas resulta:

$(k_1.1,0,0) + (0,k_2.1,0) + (0,0,k_3.1) = \vec{0} = (0,0,0)$ y también:

$(k_1,k_2,k_3) = \vec{0} = (0,0,0)$, es decir: $k_1 = 0,\ k_2 = 0,\ k_3 = 0$.

2) $\mathbb{R}^3 = \langle (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) \rangle$ sobre $\mathbb{R}$:

Sea (*a, b, c*) un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$, por lo tanto haciendo uso de las propiedades de las operaciones se tiene: $(a,b,c) = (a.1,0,0) + (0,b.1,0) + (0,0,c.1)$ y además:

$(a,b,c) = a.(1,0,0) + b.(0,1,0) + c.(0,0,1)$. Luego generan.

Por ser $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ una base de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$, se tiene que la dimensión de $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$.

Esta base se la llama **canónica** pues es muy sencillo trabajar con ella y los escalares que permiten escribir cualquier vector (terna de reales) de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$ son exactamente las componentes de la terna.
Ya se ha dicho que en Matemática el término canónico se usa para indicar que algo es sencillo o simple.

De manera análoga para los otros espacios y se deja para realizarlo el lector.

b) Es inmediato comprobar que $B_C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ es la **base canónica** del espacio $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sobre $\mathbb{R}$ y entonces la $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{2\times 2} = 4$.

Se deben comprobar las dos condiciones de la definición. Por simplificación indicaremos con . el producto por el escalar y con + la suma en $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

1) $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ son libres sobre $\mathbb{R}$:

Sea $k_1.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k_2.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k_3.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_4.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, veremos que los escalares son nulos.

Haciendo las operaciones indicadas resulta:

$$\begin{pmatrix} k_1.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & k_2.1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k_3.1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_4.1 \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto queda: $\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De lo cual se tiene: $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0, k_4 = 0$.

2) Es $\mathbb{R}^{2\times 2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ sobre $\mathbb{R}$:

Consideremos una matriz cualquiera de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ y veamos que está generada por las cuatro matrices dadas. Usando las propiedades de las operaciones:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b.1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c.1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d.1 \end{pmatrix}.$$

Y por eso: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto genera.

Es así que $B_C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ es base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sobre $\mathbb{R}$.

Observar que los elementos de la matriz coinciden con los escalares que permiten escribirla como combinación lineal de los elementos de B_C sobre $\mathbb{R}$.

Por eso la llamamos **base canónica**.

EJEMPLO 13.5.2

Probar que $B=\big((1,0),(1,1)\big)$ es una base de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$.

Por simplificación indicaremos con . el producto por el escalar y con $+$ la suma en $\mathbb{R}^2$.

1) Veamos que los vectores de B son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$:

Consideramos la combinación lineal sobre $\mathbb{R}$ de esos vectores igualada al nulo de $\mathbb{R}^2$:

$k_1.(1,0)+k_2.(1,1)=(0,0)$, entonces por las propiedades de las operaciones resulta

$(k_1.1+k_2.1, k_2.1)=(0,0)$. Y por la igualdad entre vectores es $\begin{cases} k_1+k_2=0 \\ k_2=0 \end{cases}$

por lo tanto $k_1=k_2=0$ entonces los vectores son independientes.

2) Para ver que se cumple la segunda condición:

Sea $(x_1,\ x_2)$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^2$, hay que ver que se puede escribir como combinación lineal de (1,0) y (1,1) sobre $\mathbb{R}$.

Planteamos $(x_1,\ x_2)=c_1.(1,0)+c_2\ .(1,1)$ y se debe probar que existen $c_1\in\mathbb{R}$ y $c_2\in\mathbb{R}$

$(x_1,\ x_2)=c_1.(1,0)+c_2\ .(1,1)=(c_1+c_2,\ c_2)$ entonces por igualdad de vectores

$x_1=c_1+c_2$ y $x_2=c_2$, y como $(x_1,\ x_2)\in\mathbb{R}^2$ cada componente es un número real.

Luego $c_1=x_1-c_2 = x_1-x_2$, por lo cual resultan números reales c_1 y c_2.

Así es que $(x_1,\ x_2)=(x_1-x_2).(1,0)+x_2.(1,1)$. Entonces todo vector de $\mathbb{R}^2$ es combinación lineal sobre $\mathbb{R}$ de (1,0) y (1,1).

Por lo tanto $B=\big((1,0),(1,1)\big)$ es una base de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$.

Observar que para *B* los escalares son más complicados de hallar respecto de las cuentas que se realizan para determinar los escalares cuando se considera la base canónica.
Usaremos en este caso las cuentas ya realizadas, para el vector
(5,3) = (5-3). (1,0) + 3.(1,1) = 2. (1,0) +3.(1,1)
Esta base no es la única, vimos también que $\langle(1,0),(0,1)\rangle$ también lo es y pronto demostraremos que podemos encontrar infinitas bases del espacio $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$. Lo que se mantiene constante es la cantidad de vectores de todas ellas.

Observación: Sea *K'* es subconjunto de *K* y *V* es un espacio vectorial sobre el cuerpo *K.* Si *K'* es cuerpo entonces V es un *K'*-espacio vectorial. (Probarlo!!!)



Por ejemplo $\mathbb{C}^{2x2}$ es un $\mathbb{C}$ - espacio vectorial, también es un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial y además un $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial.

EJEMPLO 13.5.3

Tomemos el conjunto $\mathbb{C}^{2x3}$ y sea $A \in \mathbb{C}^{2x3}$, $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

Busquemos una base $\mathbb{C}^{2x3}$ sobre $\mathbb{C}$.
También para simplificar anotaremos con + la suma de matrices y . el producto por el escalar.

Escribiendo la matriz como combinación lineal de otras matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} =$$

$$= a.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces que el conjunto:

$$B_c = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

genera $\mathbb{C}^{2x3}$ sobre $\mathbb{C}$. Y hemos conseguido que los complejos a,b,c,d,e,f permiten escribir *A.*

Además B_c es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$, ya que planteando la combinación lineal:

$$k_1.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+k_2.\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+k_3.\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+k_4.\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}+$$
$$+k_5.\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+k_6.\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Entonces haciendo las cuentas en el $\mathbb{C}$**-**espacio $\mathbb{C}^{2x3}$ resulta:

$\begin{pmatrix}k_1&k_2&k_3\\k_4&k_5&k_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ por lo tanto por la igualdad de matrices los escalares son todos nulos y resulta linealmente independiente. Por lo tanto B_c es una base de $\mathbb{C}^{2x3}$ sobre $\mathbb{C}$ y la llamamos la **base canónica de** $\mathbb{C}^{2x3}$ sobre $\mathbb{C}$ (justifique este nombre!!!).

Como B_c tiene 6 elementos es la $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^{2x3}=6$.

Notar que si los escalares son números reales no puedo generar todas las matrices de elementos complejos. Por ejemplo dada $A=\begin{pmatrix}2+i&0&4i\\2&-2&3\end{pmatrix}$ no puede escribirse como combinación de matrices de $\mathbb{C}^{2x3}$ con escalares en $\mathbb{R}$. (También para simplificar anotaremos con $+$ la suma de matrices y . el producto por el escalar)

Con la restricción que los escalares sean reales una combinación posible es:

$$A=2.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+1.\begin{pmatrix}i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+0.\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+0.\begin{pmatrix}0&i&0\\0&0&0\end{pmatrix}+$$

$$+0.\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+4.\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\end{pmatrix}+2.\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}+0.\begin{pmatrix}0&0&0\\0&i&0\end{pmatrix}+$$

$$+(-2)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+0.\begin{pmatrix}0&0&0\\0&i&0\end{pmatrix}+3.\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}+0.\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&i\end{pmatrix}$$

En general, si escribimos los elementos de la matriz como números complejos en forma binaria tenemos:

$$A=\begin{pmatrix} a_1+b_1i & a_2+b_2i & a_3+b_3i \\ a_4+b_4i & a_5+b_5i & a_6+b_6i \end{pmatrix}$$

Realizaremos un trabajo similar al ejemplo particular anterior con la restricción de escalares reales:

$$A=\begin{pmatrix} a_1+b_1i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & a_2+b_2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_3+b_3i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_4+b_4i & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_5+b_5i & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_6+b_6i \end{pmatrix}=$$

$$=a_1.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+b_1.\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+a_2.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+b_2.\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+$$

$$+a_3.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+b_3.\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+a_4.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}+b_4.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}+$$

$$+a_5.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}+b_5.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}+a_6.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+b_6.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Entonces queda explicito que

$$B'_c=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

genera $\mathbb{C}^{2x3}$, siendo $a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,a_4,b_4,a_5,b_5,a_6,b_6$ números reales..

Es inmediato probar que los vectores de B'_C son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

Por lo tanto B'_C es una base de $\mathbb{C}^{2x3}$ sobre $\mathbb{R}$.

Y entonces $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^{2x3}=12$.

Como se ve en este ejemplo el conjunto $\mathbb{C}^{2x3}$ es espacio vectorial tanto sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ y como sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.
Acá queda manifiesta la importancia en destacar sobre qué cuerpo de escalares se está considerando el espacio. Son dos espacios vectoriales distintos. En un caso es un espacio de dimensión 6 y en otro de dimensión 12….

Por eso para cualquier espacio V hay que explicitar sobre que cuerpo es *K*-espacio.

EJEMPLO 13.5.4

a) Consideremos $\mathbb{R}[x]$ como $\mathbb{R}$ espacio vectorial. En este espacio, cualquier polinomio no puede escribirse como combinación lineal sobre $\mathbb{R}$ de un número finito de elementos.

Sea *P* $\subseteq \mathbb{R}[x]$ y *P* finito, es de la forma $P=\{P_1(x),P_2(x),...,P_n(x)\}$, y sean todos no nulos. Por lo tanto existe para cada $P_j(x)$ con j tal que $1\leq j\leq n$ su grado. Cada grado es un número natural. Así si $G_P=\{gr(P_1(x)),gr(P_2(x)),...,gr(P_n(x))\}=\{m_1,m_2,...,m_n\}$ es el conjunto de los grados existe el $máx(G_P)=máx(\{m_1,m_2,...,m_n\})=m$.

El número *m* es un número natural y cualquier polinomio de grado mayor que *m* no se puede expresar como combinación lineal de los vectores de *P*, pues cualquier combinación sobre $\mathbb{R}$ de ellos como $r_1.P_1(x)+r_2.P_2(x)+...+r_n.P_n(x)$ es de *grado* ≤ *m.*

Es así que por ejemplo $P(x) = x^{m+1} \notin \overline{\{P_1(x),P_2(x),...,P_n(x)\}}$. Por lo cual no puede existir un conjunto finito que genere $\mathbb{R}[x]$ sobre $\mathbb{R}$.

Por lo cual no hay una base de $\mathbb{R}[x]$ sobre $\mathbb{R}$ finita. Decimos entonces que $\mathbb{R}[x]$ es de dimensión infinita.

Observar que en este ejemplo analizamos $\mathbb{R}[x]$ sobre $\mathbb{R}$, pero realmente no se usó ninguna característica de los números reales más que la ser cuerpo. Por lo tanto vale la generalización que no hay una base de $K[x]$ sobre *K* finita. Decimos entonces que $K[x]$ es de dimensión infinita sobre *K*.

b) Si consideramos $\mathbb{R}_4[x] = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \right\}$, es inmediato probar que $\mathbb{R}_4[x]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Podemos observar que cualquier $p(x)$ de $\mathbb{R}_4[x]$ es combinación lineal real del conjunto $B = \left\{1, x, x^2, x^3\right\}$.

Por lo tanto B genera $\mathbb{R}_4[x]$ sobre $\mathbb{R}$ y además B es linealmente independiente (probarlo!!!).

Entonces B es base de $\mathbb{R}_4[x]$ sobre $\mathbb{R}$ y $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_4[x] = 4$. A $B = \left(1, x, x^2, x^3\right)$ se la llama base canónica de $\mathbb{R}_4[x]$ sobre $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 13.5.5

a) $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión 1 sobre $\mathbb{C}$, ya que todo complejo *z* puede escribirse como 1.*z* = *z*. 1

Claramente que *B* = {1} es libre. Luego se tiene que *B* es base de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$.

b) $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$, ya que todo complejo

z = *a* + *b*. *i* puede escribirse como *a*.1 + *b*. *i*.

Claramente que *B* = {1,*i*} es base de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 13.5.6.

Encontrar una base y la dimensión de $U = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : a_{11} = 3a_{22} \quad \wedge \quad a_{21} + a_{12} = 0 \right\}$ subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sobre $\mathbb{R}$. (Queda para que pruebe que es subespacio sobre $\mathbb{R}$)

Sea $A \in U$ entonces $a_{11} = 3a_{22}$ y $a_{21} = -a_{12}$. Por las propiedades de las operaciones, podemos escribir

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_{22} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{22} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ con } a_{22} \in \mathbb{R}, a_{12} \in \mathbb{R}$$

El conjunto $B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ genera U sobre $\mathbb{R}$ ya que un elemento cualquiera de U se puede escribir como combinación lineal sobre $\mathbb{R}$ de estos vectores.

Veamos que los vectores de *B* son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.
Para ello consideremos

$$k_1.\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + k_2.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ que es equivalente a}$$

$$\begin{pmatrix} k_1.3 & k_2 \\ -k_2 & k_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ por lo cual } k_1 = k_2 = 0$$

Por lo tanto *B* es una base de U sobre $\mathbb{R}$ y así $\dim_{\mathbb{R}} U = 2$

EJEMPLO 13.5.7.

Encontrar una base y la dimensión de $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - 2.x_2 = 0 \ \wedge \ x_3 = 5.x_4 \ \}$ subespacio de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$.

Dado un vector en *S*, cumple las condiciones $x_1 - 2.x_2 = 0$ y $x_3 = 5.x_4$ que definen a *S*, entonces se puede escribir:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2.x_2,\ x_2,\ 5x_4,\ x_4) = x_2.(2,1,0,0) + x_4.(0,0,5,1),\ \ x_2 \in \mathbb{R} \text{ y } x_4 \in \mathbb{R}.$$

Como x_2, x_4 varían en todo $\mathbb{R}$, independientemente uno del otro, todo vector de *S* está generado por los vectores $(2,1,0,0)$ y $(0,0,5,1)$, y es inmediato probar que ellos son independientes:

$$c_1.(2,1,0,0) + c_2.(0,0,5,1) = (0,0,0,0)$$

$$c_1.(2,1,0,0) + c_2.(0,0,5,1) = (2.c_1, c_1, 5.c_2, c_2) = (0,0,0,0) \text{ entonces } c_1 = c_2 = 0$$

Luego *B* = $\{(2,1,0,0),\ (0,0,5,1)\}$ es una base del subespacio *S* y la $\dim_{\mathbb{R}} S = 2$.

En lo que sigue presentaremos dos Lemas que nos permitirán demostrar que todas las bases de cualquier espacio vectorial de dimensión finita tienen el mismo número de vectores.

¡Paciencia!
¡Son largos! ☺

♦ LEMA 13.5.8

Dados un espacio vectorial V sobre un cuerpo K, un conjunto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots \overrightarrow{v_n}\} \subseteq V$ y un conjunto $\{k_2, \ldots, k_n\} \subseteq K$ tales que $\{\overrightarrow{v_2} \oplus k_2 \otimes \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3} \oplus k_3 \otimes \overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n} \oplus k_n \otimes \overrightarrow{v_1}\}$ es linealmente dependiente sobre *K*, entonces $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots \overrightarrow{v_n}\}$ es linealmente dependientes sobre *K*.

Demostración:

Como por hipótesis $\left\{\overrightarrow{v_2} \oplus k_2 \otimes \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3} \oplus k_3 \otimes \overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_n} \oplus k_n \otimes \overrightarrow{v_1}\right\}$ es linealmente dependiente, existe una combinación no trivial

$r_2 \otimes \left(\overrightarrow{v_2} \oplus k_2 \otimes \overrightarrow{v_1}\right) \oplus r_3 \otimes \left(\overrightarrow{v_3} \oplus k_3 \otimes \overrightarrow{v_1}\right) \oplus ... \oplus r_n \otimes \left(\overrightarrow{v_n} \oplus k_n \otimes \overrightarrow{v_1}\right) = \vec{0}$, entonces por las propiedades de las operaciones

$r_2 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus (r_2.k_2) \otimes \overrightarrow{v_1} \oplus r_3 \otimes \overrightarrow{v_3} \oplus (r_3.k_3) \otimes \overrightarrow{v_1} \oplus ... \oplus r_n \otimes \overrightarrow{v_n} \oplus (r_n.k_n) \otimes \overrightarrow{v_1} = \vec{0}$, y agrupando convenientemente se tiene:

$$(r_2k_2 + r_3k_3 + ... + r_nk_n) \otimes \overrightarrow{v_1} \oplus r_2 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus r_3 \otimes \overrightarrow{v_3} \oplus ... \oplus r_n \otimes \overrightarrow{v_n} = \vec{0}$$

con algún $r_i \neq 0,\ 2 \leq i \leq n$

Por lo tanto $\left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ...\overrightarrow{v_n}\right\}$ es linealmente dependiente sobre *K.*

♦

♦ LEMA 13.5.9

Dado un espacio vectorial *V* sobre un cuerpo *K* y un conjunto $S = \left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ...\overrightarrow{v_n}\right\} \subseteq V$.

Entonces todos los conjuntos de *n+1* vectores del subespacio generado por *S* es un conjunto linealmente dependiente sobre *K.*

Demostración:

Lo mostraremos por inducción sobre el número de vectores de *S*:

P(1): Sea $S = \left\{\overrightarrow{v_1}\right\}$, y sea $T = \left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right\}$, tal que T es generado por *S*. Entonces *T* es linealmente dependiente sobre *K.*

Como T es generado por *S,* se tiene que $\overrightarrow{u_1} = k \otimes \overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{u_2} = h \otimes \overrightarrow{v_1}$, tenemos que ver que *T* es linealmente dependiente sobre *K.*

Supongamos que $\overrightarrow{v_1} \neq \vec{0},\quad \overrightarrow{u_1} \neq \vec{0}$ y $\overrightarrow{u_2} \neq \vec{0}$, en caso contrario la demostración es trivial (por 13.4.4)

Entonces $k \neq 0$ y $h \neq 0$, entonces:

$$\overrightarrow{v_1} = k^{-1} \otimes \overrightarrow{u_1} \text{ entonces } \overrightarrow{u_2} = h \otimes (k^{-1} \otimes \overrightarrow{u_1}) = (h.k^{-1}) \otimes \overrightarrow{u_1}$$

Entonces $\overrightarrow{u_2} \oplus -(h.k^{-1}) \otimes \overrightarrow{u_1} = \vec{0}$, por lo tanto son linealmente dependientes sobre K.

Por lo cual vale P(1).

P(h): Sea $S=\left\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...\overrightarrow{v_h}\right\}$ entonces cualquier conjunto *T* de *h+1* vectores generado por *S* es linealmente dependiente sobre *K*.

P(h) se acepta como hipótesis inductiva.

P(h+1): Sea $S=\left\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...\overrightarrow{v_{h+1}}\right\}$ entonces cualquier conjunto *T* de *h+2* vectores generados por *S* es linealmente dependiente sobre *K.*

Veremos que P(h+1) es válida.

Sean $T=\left\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},...\overrightarrow{u_{h+2}}\right\}\subseteq\overline{\left\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},...\overrightarrow{v_{h+1}}\right\}}$, (espacio generado por *S* sobre *K*). Entonces existen escalares tales que:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u_1} &= k_1^1\otimes\overrightarrow{v_1}\oplus k_2^1\otimes\overrightarrow{v_2}\oplus...\oplus k_{h+1}^1\otimes\overrightarrow{v_{h+1}}\\
\overrightarrow{u_2} &= k_1^2\otimes\overrightarrow{v_1}\oplus k_2^2\otimes\overrightarrow{v_2}\oplus...\oplus k_{h+1}^2\otimes\overrightarrow{v_{h+1}}\\
&\vdots\\
\overrightarrow{u_{h+2}} &= k_1^{h+2}\otimes\overrightarrow{v_1}\oplus k_2^{h+2}\otimes\overrightarrow{v_2}\oplus...\oplus k_{h+1}^{h+2}\otimes\overrightarrow{v_{h+1}}
\end{aligned}$$

Consideremos a todos los vectores $\overrightarrow{u_i}\in T$ no nulos, sino, un conjunto de vectores que contiene al vector nulo es linealmente dependiente sobre *K* y se cumple P(h+1).

Sin pérdida de generalidad, supongamos que alguno de los escalares que afectan a $\overrightarrow{v_1}$ es distinto de 0, sino resultaría que $\left\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},...\overrightarrow{u_{h+2}}\right\}\subseteq\overline{\left\{\overrightarrow{v_2},...\overrightarrow{v_{h+1}}\right\}}$, lo que también trivialmente lleva a que $\left\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},...\overrightarrow{u_{h+1}}\right\}\subseteq\overline{\left\{\overrightarrow{v_2},...\overrightarrow{v_{h+1}}\right\}}$ y por hipótesis inductiva tendríamos que $\left\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},...\overrightarrow{u_{h+1}}\right\}$ es linealmente dependiente sobre *K* y también hemos probado, en 13. 4.4 d), que entonces $\left\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},...\overrightarrow{u_{h+2}}\right\}$ es linealmente dependiente sobre *K*.

Sea por ejemplo $k_1^1\neq 0$, entonces existe su inverso en *K*.

Y usando las propiedades de las operaciones en *V* sobre *K* se tiene:

$(k_1^1)^{-1} \otimes \overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{v_1} \oplus (k_1^1)^{-1} \otimes (k_2^1 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus ... \oplus k_{h+1}^1 \otimes \overrightarrow{v_{h+1}})$ entonces calculemos los vectores:

$$\overrightarrow{u_2} - (k_1^1)^{-1} \otimes (k_1^2 \otimes \overrightarrow{u_1}) = \cancel{k_1^2 \otimes \overrightarrow{v_1}} \oplus k_2^2 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus ... \oplus k_{h+1}^2 \otimes \overrightarrow{v_{h+1}} -$$

$$- (\cancel{k_1^2 \otimes \overrightarrow{v_1}} \oplus ((k_1^1)^{-1}.k_1^2) \otimes (k_2^1 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus ... \oplus k_{h+1}^1 \otimes \overrightarrow{v_{h+1}})) =$$

$$= k_2^2 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus ... \oplus k_{h+1}^2 \otimes \overrightarrow{v_{h+1}} - ((k_1^1)^{-1}.k_1^2) \otimes (k_2^1 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus ... \oplus k_{h+1}^1 \otimes \overrightarrow{v_{h+1}}))$$

Tenemos entonces que $\overrightarrow{u_2} - ((k_1^1)^{-1}.k_1^2) \otimes \overrightarrow{u_1} \in \overline{\{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, ..., \overrightarrow{v_{h+1}}\}}$.

Del mismo modo hacemos:

$$\overrightarrow{u_3} - (k_1^1)^{-1} \otimes (k_1^3 \otimes \overrightarrow{u_1}) = \cancel{k_1^3 \otimes \overrightarrow{v_1}} \oplus k_2^3 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus ... \oplus k_{h+1}^3 \otimes \overrightarrow{v_{h+1}} -$$

$$-(\cancel{k_1^3 \otimes \overrightarrow{v_1}} \oplus ((k_1^1)^{-1}.k_1^3) \otimes (k_2^1 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus ... \oplus k_{h+1}^1 \otimes \overrightarrow{v_{h+1}})) =$$

$$= k_2^3 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus ... \oplus k_{h+1}^3 \otimes \overrightarrow{v_{h+1}} - ((k_1^1)^{-1}.k_1^3) \otimes (k_2^1 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus ... \oplus k_{h+1}^1 \otimes \overrightarrow{v_{h+1}})$$

Y tenemos que $\overrightarrow{u_3} - ((k_1^1)^{-1}.k_1^3) \otimes \overrightarrow{u_1} \in \overline{\{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, ..., \overrightarrow{v_{h+1}}\}}$.

Podemos realizar proceso similar con todos los vectores y obtenemos que

$$\{\overrightarrow{u_2} - ((k_1^1)^{-1}.k_1^2) \otimes \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3} - ((k_1^1)^{-1}.k_1^3) \otimes \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_{h+2}} - ((k_1^1)^{-1}.k_1^{h+2}) \otimes \overrightarrow{u_1}\} \subseteq \overline{\{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, ..., \overrightarrow{v_{h+1}}\}}$$

Entonces por hipótesis inductiva

$\{\overrightarrow{u_2} - ((k_1^1)^{-1}.k_1^2) \otimes \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3} - ((k_1^1)^{-1}.k_1^3) \otimes \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_{h+2}} - ((k_1^1)^{-1}.k_1^{h+2}) \otimes \overrightarrow{u_1}\}$ es linealmente dependiente sobre *K*.

Y por el Lema 13.5.8 $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ...\overrightarrow{u_{h+2}}\}$ es linealmente dependiente sobre *K*.

Por lo tanto vale P(h+1) y queda probado el lema.

♦

Los Lemas demostrados permiten hacer la demostración del siguiente resultado que permite que esté bien definida la dimensión de un espacio sobre el cuerpo que lo algebriza:

♦ TEOREMA 13.5.10:

Sea V un espacio vectorial sobre *K*. Sean $B_1 = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, ..., \overrightarrow{b_n}\}$ y $B_2 = \{\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, ..., \overrightarrow{c_k}\}$ bases de V sobre *K*, entonces $|B_1| = |B_2|$.

Demostración:

Por hipótesis se tiene que $V = \overline{B_1}$ y también que $V = \overline{B_2}$.

Se debe demostrar que *n = k*. Consideremos los siguientes casos:

a) Si *n < k,* ya que $B_2 \subseteq V$ los vectores de B_2 serían dependientes sobre *K* por el Lema 13.5.9, absurdo porque B_2 es base.

b) Si *n > k,* como que $B_1 \subseteq V$ los vectores de B_1 serían dependientes sobre *K* por el Lema 13.5.9, absurdo porque B_1 es base.

Por lo tanto *n = k.*

♦

♦ PROPOSICIÓN 13.5.11:

Sea V un K-espacio vectorial tal que $\dim_K V = n$.

a) Si $S = \left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\right\}$ es linealmente independiente sobre *K*, entonces *S* es base de *V* sobre *K*.

b) V no puede generarse con un conjunto con menos de *n* vectores.

c) Si $T = \left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_n}\right\}$ tal que *T* genera *V* sobre *K,* entonces *T* es base de *V* sobre *K.*

Demostración:

a) Hay que probar que *S* genera *V.* Es decir que todos los vectores de *V* se escriben como combinaciones lineales sobre *K* de vectores de *S.*

Sea $\vec{v} \in V$.

Si $\vec{v} \in S$, entonces claramente está generado por *S* ya que

$$\vec{v} = 0 \otimes \overrightarrow{v_1} \oplus 0 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus ... \oplus 1_K \otimes \vec{v} \oplus ... \oplus 0 \otimes \overrightarrow{v_n}$$

Si $\vec{v} \notin S$, consideremos el conjunto $H = \left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}, \vec{v}\right\}$.

Los elementos de *H* son elementos de *V* y por hipótesis *V* es un conjunto generado por una base de *n* vectores, como *H* tiene *n+1* vectores entonces, por el Lema 13.5.7, *H* es linealmente dependiente sobre *K.*

Entonces existe una combinación lineal sobre *K* del vector nulo

(*) $k_1 \otimes \overrightarrow{v_1} \oplus k_2 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus ... \oplus k_n \otimes \overrightarrow{v_n} \oplus k_{n+1} \otimes \vec{v} = \vec{0}$ con alguno de los $k_i \neq 0$.

Si $k_{n+1} = 0$ entonces en (*) sólo están los vectores de *S* con algún escalar no nulo, así $S = \left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\right\}$ sería un conjunto dependiente sobre *K*, lo que es absurdo porque por hipótesis es linealmente independiente sobre *K*.
Entonces debe ser $k_{n+1} \neq 0$, tiene inverso multiplicativo y por las propiedades de las operaciones del espacio podemos escribir

$$\vec{v} = -(k_{n+1})^{-1} \otimes (k_1 \otimes \overrightarrow{v_1} \oplus k_2 \otimes \overrightarrow{v_2} \oplus ... \oplus k_n \otimes \overrightarrow{v_n}) \ .$$

Por lo tanto $\vec{v}$ es combinación lineal sobre *K* de los vectores de *S*, entonces *S* genera *V* y en consecuencia es base de *V* sobre *K.*

b) Supongamos que existe un conjunto $H \subseteq V$ tal que $|\mathrm{H}| = h < n$ y *H* genera *V* sobre *K*.

Además sabemos que existe una base *B* de *V* con *n* vectores, ya que $\dim_K V = n$.
Como $B \subseteq V$, los vectores de *B* son combinación lineal de los vectores de *H*, y por el Lema 13.5.9, *B* resulta linealmente dependiente sobre *K*, absurdo.
Por lo tanto no existe tal conjunto *H* y *V* no puede generarse con menos de *n* vectores.

c) Hay que probar que $T = \left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_n}\right\}$ es linealmente independiente sobre *K*, pues ya por hipótesis se tiene que *T* genera *V* sobre *K.*

Sea la combinación lineal $k_1 \otimes \overrightarrow{u_1} \oplus k_2 \otimes \overrightarrow{u_2} \oplus ... \oplus k_n \otimes \overrightarrow{u_n} = \vec{0}$ (**) y supongamos que algún escalar es distinto de 0. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $k_1 \neq 0$ y haciendo cuentas en el espacio resulta que:

$\overrightarrow{u_1} = -(k_1)^{-1} \otimes (k_2 \otimes \overrightarrow{u_2} \oplus ... \oplus k_n \otimes \overrightarrow{u_n})$ y así $\overrightarrow{u_1} \in \overline{\left\{\overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_n}\right\}}$, por lo tanto $\overline{T - \left\{\overrightarrow{u_1}\right\}} = \overline{T} = V$, pues para cada vector de *V* su expresión como combinación sobre *K* de $\left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_n}\right\}$ se reemplaza en ella $\overrightarrow{u_1}$ por $-(k_1)^{-1} \otimes (k_2 \otimes \overrightarrow{u_2} \oplus ... \oplus k_n \otimes \overrightarrow{u_n})$.

Pero como *V* tiene dimensión *n* sobre *K* y $T - \left\{\overrightarrow{u_1}\right\}$ tiene *n*-1 vectores, por el inciso b) *V* no puede generarse con menos de *n* vectores. Por lo tanto todos los escalares de (**) son nulos y *T* así es linealmente independiente sobre *K* y en consecuencia *T* es base de *V* sobre *K*. ♦

Por las propiedades anteriores se pueden aplicar y afirmar:

1) Los vectores $u=(-1,2.0),\ v=(-3,0,2),\ w=(0,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$, que son independientes constituyen una base de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$ porque su dimensión es 3 sobre $\mathbb{R}$.

2) Cualesquiera sean 4 vectores $\mathbb{R}^3$, son linealmente dependientes sobre $\mathbb{R}$.

3) Cualesquiera sean 2 vectores de $\mathbb{R}^2$, son base de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$ si y sólo si son independientes sobre $\mathbb{R}$, ya que $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2.$

4) Recordemos que $\mathbb{R}_3[x] = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0\}$ es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial. Sea $B = \{x+1, -2, x^2-3\}$, como $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_3[x] = 3$, basta ver que *B* es linealmente independiente o que *B* es generador sobre $\mathbb{R}$ para afirmar que *B* es base.

Veamos que *B* es generador de $\mathbb{R}_3[x]$ sobre $\mathbb{R}$:

Se simplificará la notación de las operaciones del espacio indicando con . el producto por el escalar y por + la suma de los vectores…polinomios.

Sea $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, tenemos que ver si existen escalares reales tales que

$a_2x^2 + a_1x + a_0 = k_1.(x+1) + k_2.(-2) + k_3.(x^2-3)$, entonces

$a_2x^2 + a_1x + a_0 = k_3.x^2 + k_1.x + (k_1 - 2k_2 - 3k_3)$, igualando los polinomios se tiene:

$$\begin{cases} a_2 = k_3 \\ a_1 = k_1 \\ a_0 = k_1 - 2k_2 - 3k_3 \end{cases}$$

De donde $\dfrac{(-a_0 + a_1 - 3a_2)}{2} = k_2$.

Y como los coeficientes de $p(x)$ son números reales también los k_1 , k_2 y k_3. Por lo tanto $a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_1.(x+1) + \dfrac{(-a_0 + a_1 - 3a_2)}{2}.(-2) + a_2.(x^2-3)$ y *B* es generador de $\mathbb{R}_3[x]$ sobre $\mathbb{R}$ y en consecuencia base de de $\mathbb{R}_3[x]$ sobre $\mathbb{R}$.

Veamos una propiedad que permitirá construir bases a partir de un conjunto libre:

♦ TEOREMA 13.5.12

Sea V un *K*-espacio tal que $\dim_K V = n$, entonces para todo conjunto $\left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_r}\right\}$ con $r < n$, de vectores linealmente independientes sobre *K*, existen vectores $\overrightarrow{v_{r+1}}, \overrightarrow{v_{r+2}}, ..., \overrightarrow{v_n}$ tales que $\left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_{r+1}}, ..., \overrightarrow{v_n}\right\}$ es base de V sobre *K.*

Demostración:

Como *r* < *n* por propiedad anterior $V \neq \overline{\left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_r}\right\}}$, por lo tanto existe $\vec{v} \in V$ tal que $\vec{v} \notin \overline{\left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_r}\right\}}$ y obvio que $\vec{v} \neq \vec{0}$, llamemos $\overrightarrow{v_{r+1}}$ a ese vector, y se tiene que $\left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_{r+1}}\right\}$ es linealmente independiente sobre *K.* (Compruébelo, es fácil!!!)

Si $r+1 < n$ también $V \neq \overline{\left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_{r+1}}\right\}}$, por lo tanto existe $\vec{u} \in V$ tal que $\vec{u} \notin \overline{\left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_{r+1}}\right\}}$, llamemos $\overrightarrow{v_{r+2}}$ a ese vector $\vec{u} \in V$, y así es que $\left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_{r+2}}\right\}$ es linealmente independiente sobre *K*.

Podemos entonces seguir agregando vectores (tantos como *n- r*) hasta llegar a *n* vectores, ya que por la parte b) de la proposición 13.5.11, V no puede generarse sobre *K* con menos de *n* vectores.

Por lo tanto existen vectores $\left\{\overrightarrow{v_{r+1}}, \overrightarrow{v_{r+2}}, ..., \overrightarrow{v_n}\right\}$ tales que $V = \overline{\left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\right\}}$ y $\left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_{r+1}}, ..., \overrightarrow{v_n}\right\}$ es base de V sobre *K.*

♦

En el estudio de los subespacios *S* de *V*, es importante saber su dimensión para poder compararlos con el espacio *V* y también para varias aplicaciones.
Veamos la relación que existe entre las dimensiones de los subespacios y la de los espacios de dimensión finita:

♦ Teorema 13.5.13

Sea V un *K*- espacio vectorial tal que $\dim_K V = n < \infty$. Sea U un subespacio de V sobre *K*.

a) $\dim_K U \leq n$.

b) $U = V$ si y sólo si $\dim_K U = n$

Demostración:

a) Por hipótesis $U \subseteq V$ y U subespacio sobre *K*.

Sea B_U una base de U sobre *K* y sea B_V una base de V sobre *K*.

Supongamos por el absurdo que $\dim_K U > n$.

Entonces $|B_U| = h > n$ y $|B_V| = n$, entonces los vectores de B_U resultan linealmente dependientes sobre *K* por el lema 13.5.9. Absurdo pues B_U es una base de U sobre *K*.

Por lo tanto $\dim_K U \leq n$.

b) Si U=V claramente $\dim_K U = n$.

Si $\dim_K U = n$, toda base *B* de U sobre *K* tiene *n* vectores linealmente independientes sobre *K* y por la parte a) de la proposición 13.5.11, es *B* base de V sobre *K*, por lo tanto U=$\overline{B}$ = V.

♦

El espacio nulo $N = \{\vec{0}\}$ sobre *K* es un espacio de **dimensión 0**. (Ver ejercicio 13.1.9)

Las opciones de base para el espacio nulo $\{\vec{0}\}$ son sus subconjuntos:

$B = \{\vec{0}\}$ $\vee$ $B = \emptyset$, pero la primera no es linealmente independiente y la segunda no genera al vector nulo.

Se establece por convención que $\dim_K \{\vec{0}\} = 0$.

También si se considera el subespacio $\{\overrightarrow{0_V}\}$ para cualquier espacio vectorial V sobre *K*, se tiene que su dimensión sobre *K* es 0 por definición.

En el ejemplo 13.5.4 se estudio el caso del espacio $\mathbb{R}[x]$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y se dijo que al no ser generado por ningún conjunto finito sobre los reales es por definición un espacio de dimensión infinita. Como en otras situaciones el infinito no es algo muy dócil… Mirar el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 13.5. 14

Sea $H[x] \subseteq \mathbb{R}[x]$, $H[x] = \{P(x) : a_0 = 0\}$ (es decir todos los polinomios con coeficientes reales con término independiente 0).

Claramente el polinomio O(x) está en H[x]. Por lo tanto H[x] es no vacío.

Además vale que si $P(x)$ y $Q(x)$ son elementos de H[x], el polinomio $P(x) + Q(x)$ también está en H[x].

El producto por un escalar real definido en $\mathbb{R}[x]$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, restringido a los polinomios de H[x] cumple que

$r.P(x) \in H[x]$ para todo real r y $P(x) \in H[x]$.

Por lo tanto $H[x]$ es subespacio $\mathbb{R}[x]$ sobre $\mathbb{R}$.

Haciendo un razonamiento similar al del ejemplo 13.5.4 se llega a que ningún conjunto finito de vectores de $H[x]$ es generador de $H[x]$ sobre $\mathbb{R}$. Por lo tanto también la dimensión de H[x] es por definición infinita.

Pero claramente $H[x] \neq \mathbb{R}[x]$. Por ejemplo $x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ pero $x + 1 \notin H[x]$.

Pero si tienen la misma dimensión sobre $\mathbb{R}$.



Comparar con 13.5.13……

6. Operaciones entre subespacios

Dados dos subespacios U y W de un K-espacio vectorial V, como U y W son conjuntos vamos a analizar que operaciones conjuntistas entre ellos producen nuevos subespacios de V sobre K.

I) Analicemos si la intersección $U \cap W$ cumple las condiciones para ser subespacio de V sobre K. (Dadas en la propiedad 13.2.1)

1) Como U y W son subespacios de V sobre K, ambos tienen como elemento al vector nulo, por lo tanto: $(\overrightarrow{0_V} \in U \quad \wedge \quad \overrightarrow{0_V} \in W)$ entonces $\overrightarrow{0_V} \in U \cap W$, por lo tanto $U \cap W \neq \varnothing$
2) Sean $\overrightarrow{s_1} \in U \cap W$ y $\overrightarrow{s_2} \in U \cap W$, aplicando la definición de intersección resulta $\overrightarrow{s_1} \oplus \overrightarrow{s_2} \in U \quad \wedge \quad \overrightarrow{s_1} \oplus \overrightarrow{s_2} \in W$ por ser ambos subespacios, entonces se tiene que $\overrightarrow{s_1} \oplus \overrightarrow{s_2} \in U \cap W$
3) Sean $\vec{s} \in U \cap W \quad \wedge \quad k \in K$, por la definición de intersección se tiene $k \otimes \vec{s} \in U \quad \wedge \quad k \otimes \vec{s} \in W$ por ser ambos subespacios de V sobre K, resulta entonces que $k \otimes \vec{s} \in U \cap W$

Tenemos entonces que $U \cap W$ es subespacio de V sobre K.

EJERCICIO 13.6.1

a) Sea el espacio $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$. Sean los subespacios $T = \{(a,b,c) : a + c = 0\}$ y $S = \{(a,b,c) : b = 0\}$ sobre $\mathbb{R}$ (probar que son subespacios…..practique!!!).

Hallar el subespacio $T \cap S$. Además hallar una base de $T \cap S$ sobre $\mathbb{R}$.

Compare las dimensiones sobre $\mathbb{R}$ de: $\mathbb{R}^3$, T, S y de $T \cap S$.

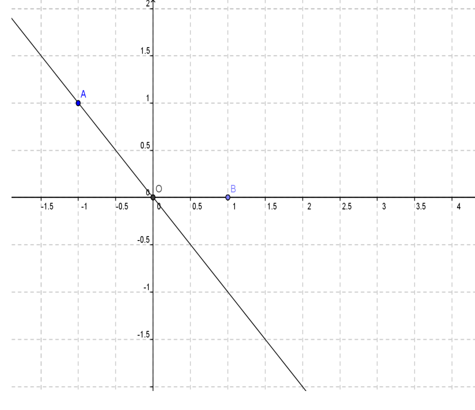
b) Justificar que dados dos subespacios U y W de un K-espacio vectorial V, entonces $U \cap W \neq \varnothing$

c) Probar que dados dos subespacios U y W de un K-espacio vectorial V, entonces $U \cap W$ es subespacio de U sobre K y $U \cap W$ es subespacio de W sobre K.

Consideremos el espacio $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$.

Sean los conjuntos $S = \{(a,b) : a + b = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ y $T = \{(a,b) : b = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Es obvio ver que ambos son subespacios de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$.

El dibujo de ellos es:



Como T coincide con el eje x no se ve fácil….

S es la otra recta.

El vector (-1,1) $\in S$.

El vector (1,0) $\in T$.

Por lo tanto (-1,1) $\in S \cup T$ y además (1,0) $\in S \cup T$.

(-1,1) + (1, 0) = (0, 1) . Pero (0,1) $\notin S$ y también (0,1) $\notin T$, por lo cual (0,1) $\notin S \cup T$.

Por lo cual por no cumplir las condiciones para ser subespacio (13.2.1), $S \cup T$ no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$.

Por lo tanto se cumple que dados dos subespacios U y *W* de un *K*-espacio vectorial V, la unión de U y *W*, NO ES SUBESPACIO!!!, salvo casos muy particulares.



EJERCICIO 13.6.2

Dado un *K*-espacio vectorial V, analizar en qué casos particulares de subespacios U y *W* de V, la unión de U y *W* es subespacio de V sobre *K*.

La definición que sigue es para "remediar" de alguna manera que la unión no sea subespacio en general. Luego de la definición analizaremos porque lo de "remediar" ….

Dados dos subespacios U y *W*, de un espacio vectorial V sobre *K*, se define el conjunto

$$U + W = \left\{ \vec{h} \in V : \vec{h} = \vec{u} \oplus \vec{w} \ \wedge \ \vec{u} \in U \wedge \vec{w} \in W \right\}$$

U + *W* es un subespacio de V sobre *K*.

EJEMPLO 13.6.3

Dados dos subespacios U y *W*, de un espacio vectorial V sobre *K*, entonces U + *W* es un subespacio de V sobre *K*.

Hay que probar que U + *W* cumple las condiciones de la propiedad 13.2.1..

Claramente $U \subseteq U+W$ y además $W \subseteq U+W$, pues $\vec{u} = \vec{u} \oplus \vec{0} \in U+W$ y también $\vec{w} = \vec{0} \oplus \vec{w} \in U+W$. Es así que $U+W$ es no vacío pues ambos son no vacios.

Es así que $U \cup W \subseteq U+W$. (*).

Sean dos vectores de $U+W$: $\overrightarrow{h_1} = \overrightarrow{u_1} \oplus \overrightarrow{w_1}$ y $\overrightarrow{h_2} = \overrightarrow{u_2} \oplus \overrightarrow{w_2}$ si sumamos:

$\overrightarrow{h_1} \oplus \overrightarrow{h_2} = \left(\overrightarrow{u_1} \oplus \overrightarrow{w_1}\right) \oplus \left(\overrightarrow{u_2} \oplus \overrightarrow{w_2}\right) = \left(\overrightarrow{u_1} \oplus \overrightarrow{u_2}\right) \oplus \left(\overrightarrow{w_1} \oplus \overrightarrow{w_2}\right)$ pues valen en V las propiedades de asociatividad y conmutatividad de la suma ⊕.

Por ser U y W subespacios de V resulta que $\overrightarrow{u_1} \oplus \overrightarrow{u_2} \in U$ y $\overrightarrow{w_1} \oplus \overrightarrow{w_2} \in W$ por lo tanto $\overrightarrow{h_1} \oplus \overrightarrow{h_2} \in U+W$.

Sean cualquier escalar $k \in K$ y cualquier vector $\vec{h} \in U+W$, por lo cual $\vec{h} = \vec{u} \oplus \vec{w}$.

Es así que $k \otimes \vec{h} = k \otimes (\vec{u} \oplus \vec{w}) = k \otimes \vec{u} \oplus k \otimes \vec{w}$ por las propiedades de producto por escalar. Como U y W son subespacios de V sobre K, se tiene que:

$k \otimes \vec{u} \in U$ y $k \otimes \vec{w} \in W$ resulta que $k \otimes \vec{h} \in U+W$.

Por lo tanto se cumplen las condiciones de 13.2.1..

La observación (*): $U \cup W \subseteq U+W$, permite demostrar (que no lo haremos en este texto) que el subespacio $U+W$ es el "menor subespacio generado por $U \cup W$". El concepto de espacio generado escapa a nuestro interés.

♦ Teorema 13.6.3:

Sean U y W subespacios de un espacio vectorial V sobre K y con $\dim_K V = n < \infty$, entonces

$$\dim_K (U+W) = \dim_K U + \dim_K W - \dim_K (U \cap W)$$

Demostración:

$U \cap W$ es un subespacio de V sobre K, entonces $\dim_K (U \cap W) \leq n$.

Si $\dim_K (U \cap W) = n$ entonces $U \cap W = V$, por lo tanto $U=V$ y $W=V$ y $U+W = V$ por lo tanto vale el teorema.

Sean $\dim_K (U \cap W) = r < n$ y $\dim_K U > r$ y $\dim_K W > r$.

Podemos tomar una base sobre *K* de la intersección: $B_0 = \left\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, ..., \overrightarrow{b_r}\right\}$

Por el Teorema 13.5.10 podemos extender B_0 a una base de U y también a una base de *W*. Sean $B_1 = \left\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, ..., \overrightarrow{b_r}, \overrightarrow{u_1}, ...\overrightarrow{u_s}\right\}$ $B_2 = \left\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, ..., \overrightarrow{b_r}, \overrightarrow{w_1}, ...\overrightarrow{w_p}\right\}$ bases de los subespacios U y *W* respectivamente.

Veamos que $B = \left\{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, ..., \overrightarrow{b_r}, \overrightarrow{u_1}, ...\overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{w_1}, ...\overrightarrow{w_p}\right\}$ es base de U + *W* sobre *K.*

1) *B* genera U + *W* sobre *K:*

   Si $\vec{v} \in U + W$ entonces $\vec{v} = \vec{u} \oplus \vec{w}$ con $\vec{u} \in U$ y con $\vec{w} \in W$.

   Es así que $\vec{u}$ es generado por B_1 sobre K y $\vec{w}$ es generado por B_2 sobre K,

   pero $B_1 \subseteq \mathrm{B}$ y $B_2 \subseteq B$. Luego $\vec{v}$ es generado por B sobre K.

2) Hay que ver que *B* es linealmente independiente sobre *K* :

Sea (1) la igualdad:

$$k_1 \otimes \overrightarrow{b_1} \oplus k_2 \otimes \overrightarrow{b_2} \oplus ... \oplus k_r \otimes \overrightarrow{b_r} \oplus l_1 \otimes \overrightarrow{u_1} \oplus ... \oplus l_s \otimes \overrightarrow{u_s} \oplus h_1 \otimes \overrightarrow{w_1} \oplus ... \oplus h_p \otimes \overrightarrow{w_p} = \vec{0}$$

entonces usando las propiedades de las operaciones en el espacio vectorial V sobre *K*, despejando:

$$(k_1 \otimes \overrightarrow{b_1} \oplus k_2 \otimes \overrightarrow{b_2} \oplus ... \oplus k_r \otimes \overrightarrow{b_r} \oplus l_1 \otimes \overrightarrow{u_1} \oplus ... \oplus l_s \otimes \overrightarrow{u_s}) = -(h_1 \otimes \overrightarrow{w_1} \oplus ... \oplus h_p \otimes \overrightarrow{w_p})$$

Por definición de las bases B_1 y B_2 , resulta que el primer miembro de la igualdad (1) representa un vector de U y el segundo miembro de la igualdad (1) representa un vector de *W.* Pero al ser iguales, el vector pertenece a ambos espacios entonces es de $U \cap W$. Designémoslo por $\vec{m}$.

Por lo tanto $\vec{m} \in U \cap W$, entonces $\vec{m} = t_1 \otimes \overrightarrow{b_1} \oplus t_2 \otimes \overrightarrow{b_2} \oplus ... \oplus t_r \otimes \overrightarrow{b_r}$

$$\vec{m} - \vec{m} = (k_1 \otimes \overrightarrow{b_1} \oplus k_2 \otimes \overrightarrow{b_2} \oplus ... \oplus k_r \otimes \overrightarrow{b_r} \oplus l_1 \otimes \overrightarrow{u_1} \oplus ... \oplus l_s \otimes \overrightarrow{u_s}) -$$
$$- (t_1 \otimes \overrightarrow{b_1} \oplus t_2 \otimes \overrightarrow{b_2} \oplus ... \oplus t_r \otimes \overrightarrow{b_r}) = \vec{0}$$

Es así que entonces por las propiedades de las operaciones vale que:

$$(k_1 - t_1) \otimes \overrightarrow{b_1} \oplus (k_2 - t_2) \otimes \overrightarrow{b_2} \oplus ... \oplus (k_r - t_r) \otimes \overrightarrow{b_r} \oplus l_1 \otimes \overrightarrow{u_1} \oplus ... \oplus l_s \otimes \overrightarrow{u_s} = \vec{0}$$

que es una combinación lineal de los vectores de la base B_1, por lo tanto

$$k_i - t_i = 0 \text{ para } 1 \le i \le r \quad \wedge \quad l_j = 0 \text{ para } 1 \le j \le s$$

Entonces reemplazando en (1) se tiene que:

$k_1 \otimes \overrightarrow{b_1} \oplus k_2 \otimes \overrightarrow{b_2} \oplus ... \oplus k_r \otimes \overrightarrow{b_r} \oplus h_1 \otimes \overrightarrow{w_1} \oplus ... \oplus h_p \otimes \overrightarrow{w_p} = \vec{0}$ que es una combinación lineal de los vectores de B_2, por lo tanto

$k_i = 0 \quad \text{para } 1 \le i \le r \quad \text{y } h_j = 0 \quad \text{para } 1 \le j \le p$

Por lo tanto *B* es linealmente independiente sobre *K* y en consecuencia es una base de *U + W* sobre *K*, con *r + p + s* elementos. Luego $\dim_K (U + W) = r + p + s$.

Además es $\dim_K U = r + s \quad , \quad \dim_K W = r + p \quad , \quad \dim_K (U \cap W) = r$, entonces efectivamente vale:

$$\dim_K (U + W) = \dim_K U + \dim_K W - \dim_K (U \cap W) = r + s + r + p - r$$

♦

EJEMPLO 13.6.4

Hallar un conjunto de generadores sobre $\mathbb{R}$ de *U + W* siendo

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2} : a + b = 0 \right\} \quad \text{y} \quad W = \overline{\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

Para simplificar anotaremos por + la suma de matrices y por . el producto por el escalar.

Usando las definiciones de los subespacios *U* y de *W* sobre *K* y de la suma de ellos, así si

$\vec{h} \in U + W$ entonces $\vec{h} = \begin{pmatrix} a & -a \\ c & d \end{pmatrix} + k.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, por las propiedades de las operaciones de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sobre $\mathbb{R}$ se tiene que

$$\vec{h} = a.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + k.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ genera *U+W* sobre *K*.

¿Puede ser *B* base sobre *K* ?

Este conjunto de generadores tiene 5 vectores y $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{2x2} = 4$, como $U + W \subseteq \mathbb{R}^{2x2}$, claramente *B* no puede ser base de un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sobre $\mathbb{R}$, pues 5 vectores en un espacio de dimensión 4 son vectores linealmente dependientes sobre $\mathbb{R}$.

Para hallar una base tenemos que “sacar” algún vector de *B* y ver si es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$.

Este proceso de “sacar” algún vector con el propósito que lo que quede sea un conjunto libre, depende de las características del conjunto. Hay que mirar con atención los vectores que se tienen y quedarse con los que a simple vista son independientes (en este caso si los elementos no nulos se dan en posiciones distintas dentro de las matrices, nos asegura que entre sí no son múltiplos escalares) y se pueden conservar otros algo más complicados pero que no nos resulten a la vista suma de otros.
Luego de esa elección habrá que probar si efectivamente son libres.

Consideremos $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq B$ con el criterio descripto.

Construimos la combinación lineal:

$$k_1 . \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + k_2 . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_3 . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + k_4 . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Realizando las operaciones indicadas, resulta:

$\begin{pmatrix} k_1 & -k_1 + k_4 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, por lo tanto $k_i = 0 \text{ para } 1 \le i \le 4$ y entonces los vectores de *B*' son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.

Hemos encontrado una base de U + W sobre $\mathbb{R}$ y como tiene 4 vectores vale que

$$\dim_{\mathbb{R}} (U + W) = 4 \quad \wedge \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^{2x2} = 4 \quad \text{entonces} \quad U + W = \mathbb{R}^{2x2}.$$

¿El subespacio $U \cap W$, puede ser el nulo? Justifique!!! Queda para Ud. hallar cuál es.

EJERCICIO 13.6.5:

Hallar la dimensión de $U + W$ sobre $\mathbb{R}$, siendo

$$U = \overline{\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}} \quad \text{y} \quad W = \overline{\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

EJERCICIO 13.6.6:

Hallar V tal que $U + V = \mathbb{R}^3$ siendo $U = \overline{\{(1,2,3),(1,0,0)\}}$. Es único el V ?

Dados dos subespacios U y W de un espacio vectorial V sobre K, decimos que S es **suma directa** de U más W y se nota

$S = U \oplus W$ si y sólo si $S = U + W$ y $U \cap W = \{\vec{0}\}$.

EJEMPLO 13.6.7:

Sean $S_1 = \{(a,b,0) : a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$ y $S_2 = \{(0,x,y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$ subespacios de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$.

Veamos si $S_1 + S_2$ es suma directa.

Debemos analizar $S_1 \cap S_2$. Tomamos un vector

$\vec{v} \in S_1 \cap S_2$ entonces $\vec{v} \in S_1 \wedge \vec{v} \in S_2$, por lo tanto $\vec{v} = (a,b,0) = (0,x,y)$, se tiene entonces que $a = 0$, $b = x$ y $0 = y$, entonces $\vec{v} = (0,b,0)$, es decir que todos los vectores con primer y tercer componente nula están en la intersección, por lo tanto no es suma directa.

Nuestro resultado es correcto pues cada subespacio es de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$, y por la propiedad 13.6.3 si la intersección fuera nula se superaría a 3 que es la dimensión de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$.

EJERCICIO 13.6.8:

Sean $S_1 = \{(a,b,0) : a,b \in \mathbb{R}\}$ y $S_2 = \{(0,0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ subespacios de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$.
Analizar si $S_1 + S_2$ es suma directa.

♦ Proposición 13.6.7:

Sea *S* un subespacio de vectorial de *V* sobre *K* tal que $S = S_1 \oplus S_2, \quad \text{con } S_1 \text{ y } S_2$ subespacios de *V* sobre *K*. Entonces todo vector se *S* se expresarse de manera única como la suma de un vector de S_1 y un vector de S_2.

Demostración:

Sea $\vec{v} \in S$ entonces $\vec{v} = \vec{s_1} + \vec{s_2}, \quad \vec{s_1} \in S_1, \quad \vec{s_2} \in S_2$ por ser *S* suma directa de S_1 y S_2.

Supongamos que existen vectores $\vec{u_1} \in S_1, \quad \vec{u_2} \in S_2$ tales que $\vec{v} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$ entonces haciendo las cuentas usando las propiedades

$\vec{v} - \vec{v} = \vec{0} = \vec{s_1} + \vec{s_2} - \vec{u_1} - \vec{u_2} = (\vec{s_1} - \vec{u_1}) + (\vec{s_2} - \vec{u_2})$ por lo tanto

$-(\vec{s_1} - \vec{u_1}) = (\vec{s_2} - \vec{u_2}) \quad \text{y además} \quad \vec{s_1} - \vec{u_1} \in S_1 \quad \text{y} \quad \vec{s_2} - \vec{u_2} \in S_2$ y como los vectores son iguales está en la intersección, pero $S_1 \cap S_2 = \{\vec{0}\}$, por lo cual

$-(\vec{s_1} - \vec{u_1}) = \vec{0} \quad \text{y} \quad (\vec{s_2} - \vec{u_2}) = \vec{0} \quad \text{por lo tanto} \quad \vec{s_1} = \vec{u_1} \quad \text{y} \quad \vec{s_2} = \vec{u_2}$. Es decir hay una única forma de escribir a $\vec{v}$.

♦

7. Una selección de Ejercicios

1) Establecer si $(1,-2,-3,-3)$ es o no una combinación $\mathbb{R}$-lineal de los vectores $(0,1,2,3)$, $(-1,1,1,0)$. ¿Esos 3 vectores son dependientes o independientes en $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$?

2) Determinar si los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes o dependientes sobre $\mathbb{R}$:

a) (1, 2 , 4) (3, 6, 2) (0, 0, 1)
b) (1, 2 , 0) (0, 6, 2) (4 , 8, 0)

¿En algún caso puede afirmar que formen una base de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$?

3) Determinar si los siguientes conjuntos de vectores de sobre $\mathbb{R}^2$ son linealmente dependientes o independientes sobre $\mathbb{R}$:

a) { (-4, 5), (2, 7) }
b) { (3, 5, -2), (-3, 0, 4), (3, 1, 2)}

4) Establecer si los siguientes conjuntos son o no subespacios del respectivo $\mathbb{R}$-espacio vectorial. En los casos que sea subespacio encontrar una base del mismo sobre $\mathbb{R}$.

a) R = $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 3x_2\}$

b) U = $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1.x_2 = 9\}$

c) V = $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 5\}$

d) W = $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

e) Z = $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 3x_2 = 0\}$

f) Y = $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 8x_3 = 0\}$

g) T´= $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0 \ ; x_2 + x_3 = 5\}$

h) S = $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_3 = 2x_1 - x_2 \ , \ x_4 = 3x_2\}$

i) U = $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_4 = x_3 + x_2 \ , \ x_2 = x_1 + 5\}$

j) M = $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2} : \ a_{11} - a_{22} = 0 \ , \ a_{21} + a_{12} = 0 \right\}$

k) N = $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2} : \ a_{11} + a_{12} + a_{22} = 0 \ , \ a_{21} = 5a_{12} \right\}$

l) O = $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x3} : \ a_{11} + a_{22} - a_{23} = 0 \ , \ a_{21} = 3.a_{13} \right\}$

m) P = $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3x2} : \ a_{11} + a_{22} - 9a_{32} = 0 \ , \ a_{21} = 6a_{31} \right\}$

n) Q = $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2x2} : \ a_{11} . \ a_{12} = 0 \right\}$

5) Sean los $\mathbb{R}$- subespacios de $\mathbb{R}^2$, $V = \{(x, y): x = 0\}$ y $W = \{(x, y): y = -x\}$.

a) Probar que: $V = \overline{\{(0,1)\}}$ y $W = \overline{\{(1,-1)\}}$

b) Hallar $V \cap W$

c) Describir $V + W$

6) a) Hallar el subespacio T de $\mathbb{C}^3$, $\mathbb{C}$- generado por: { (1, 0, 1) ; (0, 1 , 1)}.

b) Hallar un conjunto de generadores del subespacio T de $\mathbb{C}^3$, sobre $\mathbb{R}$.

7) Determinar el subespacio de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, generado sobre $\mathbb{R}$ por las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8) Los siguientes conjuntos de vectores ¿generan el mismo subespacio de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$?

$A = \{(1, -1, -1) ; (3, 0, 1)\}$ y $B = \{(-2, -1, 0) ; (5, -2, 3)\}$

9) Sea el $\mathbb{R}$-espacio $\mathrm{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f : f \text{ es función} \wedge f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ (13.1.7).

a) Probar que $S = \{f : f'' - f = 0\} \subseteq$ F ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$) es un subespacio sobre $\mathbb{R}$.

b) Probar que $\{e^x, e^{-x}\} \subseteq S$ y que es un conjunto libre sobre $\mathbb{R}$.

c) Si sabe ecuaciones diferenciales lineales podría probar que $\{e^x, e^{-x}\}$ es $\mathbb{R}$-base de S.

10) Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$, que satisface:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 + 5x_2 = 0 \end{cases}$$

Hallar un conjunto finito que genere a S sobre $\mathbb{R}$.

11) Analizar si el vector $\vec{x}$ es combinación lineal de los vectores dados en el espacio vectorial

$\mathbb{Z}_5^{2 \times 2}$ sobre $\mathbb{Z}_5$:

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

12) Sea V un *K*- espacio vectorial. Sean $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n}$ vectores de *V*. Probar que si $t \neq 0 \wedge t \in K$, entonces $\overline{\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n}\}} = \overline{\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., t \otimes \vec{v_i}, ..., \vec{v_n}\}}$ para cualquier $i, 1 \leq i \leq n$.

13) Sean $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \in \mathbb{R}^3$, decir si son o no linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$.
Indicar en
cada caso cuál es el espacio que generan:

a) $\vec{v_1}$ = (1, 0, 0) ; $\vec{v_2}$ = (0, 1, 0)

b) $\vec{v_1}$ = (1, 1, 0) ; $\vec{v_2}$ = (1, 0, 0) ; $\vec{v_3}$ = (0 , 1, 0)

14) Sean *S* y *T* subespacios de $\mathbb{C}^3$ sobre $\mathbb{C}$ definidos por:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 + x_3 = 0 \ ; x_2 - x_3 = 0\}$$
$$T = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0\} \quad a \text{ fijo.}$$

¿Existen valores de *a* tales que *S* + *T* sea suma directa?

15) Estudiar si los siguientes conjuntos son base del espacio vectorial dado sobre $\mathbb{R}$:

a) $\{1,\ x+3,\ (x+3)^2,\ (x+3)^3\} \subseteq \mathbb{R}_4[x]$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$

16) Encontrar una base *B* de $\mathbb{C}^4$ sobre $\mathbb{R}$ que contenga a los vectores (0, 0, 1, 1) y (1, 1, 0, 0).

17) Demostrar que los siguientes conjuntos son bases de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$:

$$B_1 = \{\vec{v_1} = (1,\ 1,\ 0,\ 0);\ \vec{v_2} = (0,\ 1,\ 0,\ 0);\ \vec{v_3} = (0,\ 0,\ 1,\ 1);\ \vec{v_4} = (0,\ 0,\ 0,\ 1)\};$$
$$B_2 = \{\vec{u_1} = (1,\ 2,\ 0,\ 0);\ \vec{u_2} = (0,\ 1,\ 2,-1);\ \vec{u_3} = (1,-1,-1,-1);\ \vec{u_4} = (0,\ 1,\ 1,\ 0)\}$$

18) Demostrar que el conjunto $S = \{ x + 1;\ x - 1;\ x^2 - 1;\ x^2 + 1 \}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}_3[x]$ sobre $\mathbb{R}$. Encontrar un subconjunto U de *S* que sea una base de $\mathbb{R}_3[x]$ sobre $\mathbb{R}$.

19) Decir para qué valores de *a* los vectores (*a* , 0, 1) ; (0, 1, 1) y (2 , -1, *a*) forman una base de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$.

20) Encontrar la dimensión del subespacio generado por los siguientes conjuntos de vectores:

a) {(1, 2); (0, 1); (-1, 3)} en $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$.

b) $\left\{ \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 1 + i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 + i & 1 - i \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ en $\mathbb{C}^{2\times 2}$ sobre $\mathbb{R}$

21) Decir si los siguientes conjuntos son o no bases:

a) { (1,0) ; (1,3) ; (0,2) } de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$.

b) { (1,0,2) ; (1,3,0) } de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$

c) $\{1,\ -2x,\ x^2 + 2x + 1\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ sobre $\mathbb{R}$.

d) { (1,0) ; (2,1)} de $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$.

e) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 3 + \mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 9 + 3\mathrm{i} \\ 0 & 3 + \mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{C}^{2x2}$ sobre $\mathbb{C}$.

¿Y de $\mathbb{C}^{2x2}$ sobre $\mathbb{R}$?

22) a) Probar que $\{1,\ x,\ x^2,\ ...,\ x^n\}$ es independiente en $\mathbb{R}_{n+1}[x]$ sobre $\mathbb{R}$.

b) Probar que $\{1,\ x,\ x^2,\ ...,\ x^n\}$ es base en $\mathbb{R}_{n+1}[x]$ sobre $\mathbb{R}$.

c) ¿Es $\{1,\ x^2,\ x^3\}$ base de $\mathbb{R}_4[x]$ sobre $\mathbb{R}$? Justifique.

d) ¿Es $\{\mathrm{x}^2, \mathrm{x}^3, \mathrm{x} + 1, 2\}$ base de $\mathbb{R}_4[x]$ sobre $\mathbb{R}$? Justifique.

23) Si $V = \mathbb{C}^{2\times 2}$

a) Hallar una base de V sobre $\mathbb{C}$. ¿Cuál es la $\dim_{\mathbb{C}} V$?

b) Hallar una base de V sobre $\mathbb{R}$. ¿Cuál es la $\dim_{\mathbb{R}} V$?

24) Sea V es un conjunto de vectores tal que admite la estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y también de espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Si V tiene sobre $\mathbb{C}$ dimensión *n*, entonces sobre $\mathbb{R}$ tiene dimensión *2n*.

25) Sea $V = K^{2x2}$ y sean $U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & z \end{pmatrix} : x \in K \wedge y \in K \wedge z \in K \right\}$ y

$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -c \end{pmatrix} : a \in K \wedge b \in K \wedge c \in K \right\}$

Probar que:

a) U y *W* son subespacios de V sobre *K*.

b) Hallar las dimensiones de U, de *W*, de U+*W* y de $U \cap W$ sobre K.

26) Si $V = \mathbb{C}^3$, probar que *S* y *S'* son subespacios de V y hallar bases y dimensiones para *S, S, S + S'* y $S \cap S'$ sobre $\mathbb{C}$:

a) $S = \{(a,0,0) : a \in \mathbb{C}\}, \quad S' = \{(0,b,b) : b \in \mathbb{C}\}$

b) $S = \{(a,a,0) : a \in \mathbb{C}\}, \quad S' = \{(0,b,b) : b \in \mathbb{C}\}$

c) Analizar si en a) y en b) la suma es directa.

27) En $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$ ¿puede la suma $\overline{\{(2,\ 0,\ 1);\ (1,\ 2,\ 3)\}} + \overline{\{(1,\ 2,-1);\ (0,\ 1,\ 2)\}}$ ser directa? Justifique.

28) Probar que el $\mathbb{R}$- espacio vectorial $\mathbb{R}^4 \neq S_1 \oplus S_2$, donde:

$$S_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x + y + t = 0 \ \wedge \ x - y = 0\}$$
$$S_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x = 0, \ \ y - t = 0, \ \ x - z + t = 0\}$$

CAPÍTULO 14

TRANSFORMACIONES LINEALES

Se han estudiado a lo largo de este Curso y de otros Cursos, distintos tipos de funciones.
Además, se han visto varios ejemplos de *K*-espacios vectoriales y propiedades y conceptos relacionados con ellos.
En este Capítulo se trabajará con un tipo especial de funciones definidas entre los conjuntos subyacentes de espacios vectoriales definidos sobre un mismo cuerpo *K*.

En lo que sigue se trabajará con espacios sobre cuerpos conmutativos.

1. Primeras definiciones

Sean V y V' espacios vectoriales sobre *K*.
Una función $f: V \to V'$, es una **transformación *K*- lineal** si cumple:

1) Si $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$ entonces $f\left(\vec{v_1} \oplus \vec{v_2}\right) = f\left(\vec{v_1}\right) \dagger f\left(\vec{v_2}\right)$

Suma en V — Suma en V'

2) Si $k \in K, \vec{v} \in V$ entonces $f\left(k \otimes \vec{v}\right) = k \odot f\left(\vec{v}\right)$

Producto externo en V — Producto externo en V'

La imagen por f de vectores de V son vectores de V'.

Se dice que es una transformación *K*–lineal de V en V', para enfatizar que los espacios son sobre el cuerpo *K*.
Queda claro a partir de la definición que tanto dominio como codominio deben ser algebrizados como espacios sobre el mismo cuerpo, pues debe tener sentido que se pueda hacer el producto por el mismo escalar en los elementos de V y de V'.

Analicemos qué significa cada una de las condiciones que se exigen en la definición: 1) se puede resumir como "primero sumo los vectores en V y luego aplico la función f, resulta igual que "primero aplico f a los vectores de V y luego sumo sus imágenes en V'".
2) se puede resumir como "primero multiplico por el escalar el vector en V y luego aplico la función f", resulta igual que "multiplicar por el escalar en V' a la imagen por f del vector de V".

EJEMPLO 14.1.1:
Sean $V=\mathbb{R}^2$ y $V'=\mathbb{R}^3$, V y V' son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.

$$f\left((a,b)\right)=(3a-b,a,0)$$

¿Será f una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$?.

Claramente es función (justifique), sean $\overrightarrow{v_1}=(a_1,b_1)$ y $\overrightarrow{v_2}=(a_2,b_2)$.
Por simplificación se hará un abuso de notación simbolizando como + la suma en ambos espacios y como . el producto por el escalar en ambos casos.
Se tiene $\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}=(a_1+a_2,b_1+b_2)$, y para

$$k\in\mathbb{R} \text{ y } \vec{v}=(a,b)\in\mathbb{R}^2 \text{ es } k.\vec{v}=(k.a,k.b)$$

Y para $\overrightarrow{u_1}=(a_1,b_1,c_1)$ y $\overrightarrow{u_2}=(a_2,b_2,c_2)$ de $\mathbb{R}^3$, y para

$$k\in\mathbb{R} \text{ y } \vec{u}=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \text{ es } k.\vec{u}=(k.a,k.b,kc)$$

Luego:

$$f\left(\vec{v}_1+\vec{v}_2\right)=f\left(\left(a_1+a_2,b_1+b_2\right)\right)\underbrace{\text{por definición de } f}_{=}$$

$$=\left(3.\left(a_1+a_2\right)-\left(b_1+b_2\right),a_1+a_2,0\right)\underbrace{\text{en cada componente son operaciones en } \mathbb{R}}_{=}$$

$$=\left(3.a_1-b_1+3.a_2-b_2,a_1+a_2,0\right)\underbrace{\text{por definición de la suma en } V'}_{=}$$

$$=\left(3.a_1-b_1,a_1,0\right)+\left(3.a_2-b_2,a_2,0\right)\underbrace{\text{por definición de } f}_{=}$$

$$=f\left(\vec{v_1}\right)+f\left(\vec{v_2}\right)$$

$$f\left(k.\vec{v}\right)=f\left(\left(k.a,k.b\right)\right)\underbrace{\text{por definición de } f}_{=}$$

$$=\left(3.ka-kb,ka,0\right)\underbrace{\text{en cada componente son operaciones en } \mathbb{R}}_{=}$$

$$=\left(k.(3a-b),k.a,0\right)\underbrace{\text{por el producto por el escalar en } V'}_{=}$$

$$=k.\left(3a-b,a,0\right)\underbrace{\text{por definición de } f}_{=}$$

$$=k.\,f\left(\vec{v}\right)$$

Luego, f es una transformación $\mathbb{R}$-lineal.

EJEMPLO 14.1.2:

Sean $V=\mathbb{R}^2$ y $V'=\mathbb{R}^{2x2}$, ambos espacios sobre $\mathbb{R}$ y

$$f\left(\left(a,b\right)\right)=\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Puede verificarse fácilmente que f es función.

Para simplificar se hará un abuso de notación simbolizando como + la suma en ambos espacios y como . el producto por el escalar en ambos casos.

Sean $\overrightarrow{v_1}=(a_1,b_1)$ y $\overrightarrow{v_2}=(a_2,b_2)$, entonces $\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}=(a_1+a_2,b_1+b_2)$, y para $k\in\mathbb{R}$ y $\vec{v}=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ es $k.\vec{v}=(k.a,k.b)$. Y recordar como se definen la suma en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ (elemento a elemento) y la multiplicación de un escalar por una matriz (multiplica cada elemento por el escalar).



Analicemos si f es una transformación lineal.

$$f\left(\vec{v}_1+\vec{v}_2\right)=f\left((a_1+a_2,b_1+b_2)\right)\underbrace{\text{por definición de } f}_{=}$$

$$=\begin{pmatrix} a_1+a_2+b_1+b_2 & 0 \\ -b_1-b_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix}\underbrace{\text{en cada entrada son operaciones en } \mathbb{R}}_{=}$$

$$=\begin{pmatrix} a_1+b_1+a_2+b_2 & 0 \\ -b_1-b_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix}\underbrace{\text{por la suma en } V'}_{=}$$

$$=\begin{pmatrix} a_1+b_1 & 0 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_2+b_2 & 0 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}=\underbrace{\text{por definición de } f}_{=}$$

$$=f\left((a_1,b_1)\right)+f\left((a_2,b_2)\right)=f\left(\vec{v}_1\right)+f\left(\vec{v}_2\right)$$

$$f\left(k.\vec{v}\right)=f\left((k.a,k.b)\right)\underbrace{\text{por definición de } f}_{=}$$

$$=\begin{pmatrix} k.a+k.b & 0 \\ -kb & ka \end{pmatrix}\underbrace{\text{en cada entrada son operaciones en } \mathbb{R}}_{=}$$

$$=\begin{pmatrix} k(a+b) & 0 \\ -b & a \end{pmatrix}\underbrace{\text{por el producto por el escalar en } V'}_{=}$$

$$=k.\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ -b & a \end{pmatrix}\underbrace{\text{por definición de } f}_{=}$$

$$=k.f\left((a,b)\right)=k.f\left(\vec{v}\right)$$

Luego, f es una transformación $\mathbb{R}$-lineal.

EJEMPLO 14.1.3:

Sean los $\mathbb{R}$-espacios vectoriales $V=\mathbb{R}^2$ y $V'=\mathbb{R}^{2x2}$, y la función

$$f\left(\left(a,b\right)\right)=\begin{pmatrix} a+b & 1 \\ -b & a \end{pmatrix}$$

no es transformación lineal porque si bien f puede verificarse que es una función, al analizar si es una transformación $\mathbb{R}$-lineal:

$$f\left(\left(a_1+a_2,b_1+b_2\right)\right)=\begin{pmatrix} a_1+a_2+b_1+b_2 & 1 \\ -b_1-b_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix}$$ pero

$$f\left(\left(a_1,b_1\right)\right)+f\left(\left(a_2,b_2\right)\right)=\begin{pmatrix} a_1+b_1 & 1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_2+b_2 & 1 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+a_2+b_1+b_2 & 2 \\ -b_1-b_2 & a_1+a_2 \end{pmatrix}$$

Luego, queda claro que no toda función es transformación $\mathbb{R}$-lineal.

EJEMPLO 14.1.4:

Sean los $\mathbb{R}$-espacios vectoriales $V=\mathbb{R}\left[x\right]$ y $V'=\mathbb{R}\left[x\right]$

La función *D* (la de derivación) es una transformación $\mathbb{R}$-lineal:

$D\left(p(x)+q(x)\right)=D\left(p(x)\right)+D\left(q(x)\right)$ y $D\left(c.p(x)\right)=c.D\left(p(x)\right)$

Muy fácil queda par Ud. el desarrollo.

♦ PROPIEDAD 14.1.5

Cualquiera sea $f:V\longrightarrow V'$, donde V y V' son *K*–espacios vectoriales y f es una transformación *K*–lineal de V en V', se cumple:

$$f\left(\overrightarrow{0_V}\right)=\overrightarrow{0_{V'}}$$

son $\overrightarrow{0_V}$ y $\overrightarrow{0_{V'}}$ los vectores nulos de los espacios V y V' respectivamente.

Demostración:

$f\left(\overrightarrow{0_V}\right)=f\left(0_K\otimes\vec{v}\right)$ porque $\overrightarrow{0_V}=0_K\otimes\vec{v}$, el nulo de V es igual al producto del escalar 0_K por cualquier vector de V.

$f\left(0_K\otimes\vec{v}\right)=0_K\odot f\left(\vec{v}\right)$ porque f es una transformación K-lineal

$0_K\odot f\left(\vec{v}\right)=\overrightarrow{0_{V'}}$ porque $f\left(\vec{v}\right)$ es un vector de V' y el vector nulo de V' coincide con el producto del escalar 0_K por cualquier vector de V'.

♦

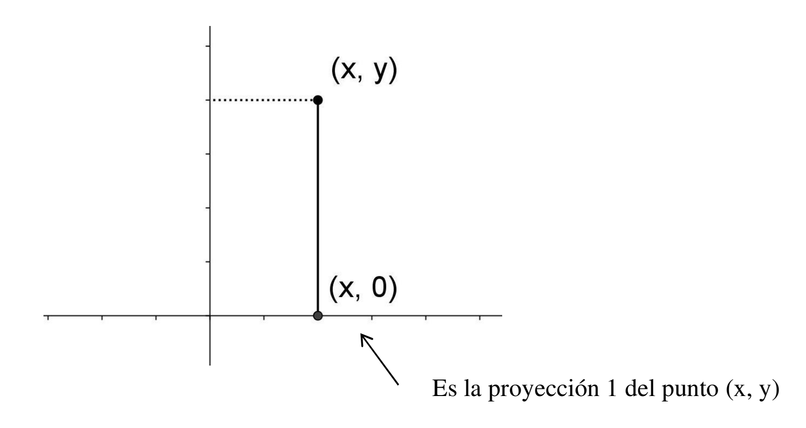
EJEMPLO 14.1.6:

Dado el espacio real $\mathbb{R}^2$, se definen las funciones:

$p_1:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ dada por $p_1\left((x,y)\right)=(x,0)$ se denomina la **proyección 1** de $\mathbb{R}^2$

y

$p_2:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ siendo $p_2\left((x,y)\right)=(0,y)$ se denomina la **proyección 2** de $\mathbb{R}^2$



Dibuje la p_2 para algún punto.

En general dado un cuerpo K, se define la **proyección i-ésima** como:

$p_i:K^n\longrightarrow K^n$ donde

$$p_i\left(x_1,x_2,.....,x_i,.....,x_n\right)=\left(0,0,.....,x_i,.....,0\right)$$

Es elemental probar que las proyecciones son transformaciones K-lineales. Tanto en el caso particular como en la generalización.

Para cualquier transformación *K*-lineal se definirán dos subconjuntos de los espacios V y V' relacionados con las transformaciones lineales. Estos subconjuntos más adelante se verán que importantes resultan para clasificar las transformaciones lineales.

Se define el **Núcleo de f** como el conjunto de elementos de V que por la función f van al vector nulo de V'. Es decir:

$$Núc(f)=\left\{\vec{v}\in V : f\left(\vec{v}\right)=\overrightarrow{0_{V'}}\right\}$$

La **Imagen de f** es el subconjunto de V' que son correspondientes por la función f de vectores de V. Es decir:

$$Img(f)=\left\{\vec{u}\in V' : (\exists\vec{v})(\vec{v}\in V \wedge f\left(\vec{v}\right)=\vec{u})\right\}$$

Por la PROPIEDAD 14.1.5 se tiene que para toda transformación *K*-lineal $f\left(\overrightarrow{0_V}\right)=\overrightarrow{0_{V'}}$, por lo cual $Núc(f)\neq\varnothing$ e $Img(f)\neq\varnothing$

EJEMPLO 14.1.7

Con las definiciones de 14.1.6.

¿Cuál es $Núc(p_1)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : p_1\left((x,y)\right)=(0,0)\right\}$?

Como $p_1\left((x,y)\right)=(x,0)$, si $(x,0)=(0,0)$ resulta que $x=0$. Y para la componente segunda *y* no hay condición.

Luego: $Núc(p_1)=\left\{(0,y) : y\in\mathbb{R}\right\}$

¿Cuál es $Img(p_1)=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : \exists((x,y))((x,y)\in\mathbb{R}^2 \wedge p_1\left((x,y)\right)=(u,v))\right\}$?

Como $p_1\left((x,y)\right)=(x,0)$. Por lo cual $Img(p_1)=\left\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\right\}$

♦ TEOREMA 14.1.8

Sea $f : V \longrightarrow V'$ una transformación *K*–lineal. Entonces:

a) $Núc(f) = \left\{ \vec{v} \in V : f\left(\vec{v}\right) = \overrightarrow{0_{V'}} \right\}$ es un subespacio de *V* sobre *K*.

b) $Img(f) = \left\{ \vec{u} \in V' : (\exists \vec{v})(\vec{v} \in V \wedge f\left(\vec{v}\right) = \vec{u}\,) \right\}$ es un subespacio de V' sobre *K*.

c) Si $B = \left\{ \overrightarrow{b_1}, ..., \overrightarrow{b_n} \right\}$ es una base e *V*, entonces $Img(f) = \overline{\left\{ f\left(\overrightarrow{b_1}\right), ..., f\left(\overrightarrow{b_n}\right) \right\}}$

Por simplificación se hará un abuso de notación simbolizando como + la suma en ambos espacios y como . la multiplicación por el escalar en ambos casos.

Demostración :

a) Debemos analizar que se verifican las condiciones de la Propiedad 13.2.1:

i) Claramente $Núc(f) \subseteq V$

ii) $\overrightarrow{0_V} \in Núc(f)$ porque $f\left(\overrightarrow{0_V}\right) = \overrightarrow{0_{V'}}$, por lo tanto $Núc(f) \neq \emptyset$

iii) Sean $\overrightarrow{v_1} \in Núc(f)$ y $\overrightarrow{v_2} \in Núc(f)$, hay que ver que $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} \in Núc(f)$

Como *f* es *K*- lineal: $f\left(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}\right) = f\left(\overrightarrow{v_1}\right) + f\left(\overrightarrow{v_2}\right) = \overrightarrow{0_{V'}} + \overrightarrow{0_{V'}} = \overrightarrow{0_{V'}}$

iv) Sean $k \in K, \vec{v} \in Núc(f)$, queremos ver que $k.\vec{v} \in Núc(f)$

Por la linealidad de *f* resulta $f\left(k.\vec{v}\right) = k.f\left(\vec{v}\right) = k.\overrightarrow{0_{V'}} = \overrightarrow{0_{V'}}$

Por tanto $Núc(f)$ es subespacio de *V* sobre *K*.

b) Debemos analizar que se verifican las condiciones de la Propiedad 13.2.1:

i) Es obvio que $Img(f) \subseteq V'$

ii) $\overrightarrow{0_{V'}} \in Img(f)$ pues $f\left(\overrightarrow{0_V}\right) = \overrightarrow{0_{V'}}$, por lo tanto $Img(f) \neq \emptyset$

iii) Dados $\overrightarrow{w_1} \in Img(f)$ y $\overrightarrow{w_2} \in Img(f)$, queremos ver que $\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2} \in Im(f)$:

Como $\overrightarrow{w_1} \in Img(f)$ y $\overrightarrow{w_2} \in Img(f)$, existen $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ en *V* tales que $\overrightarrow{w_1} = f\left(\overrightarrow{v_1}\right)$ y $\overrightarrow{w_2} = f\left(\overrightarrow{v_2}\right)$, luego $\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2} = f\left(\overrightarrow{v_1}\right) + f\left(\overrightarrow{v_2}\right)$, pero *f* es transformación *K*-lineal, así resulta $\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2} = f\left(\overrightarrow{v_1}\right) + f\left(\overrightarrow{v_2}\right) = f\left(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}\right)$ con $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$ en *V*

iv) Si $k \in K$ y $\overrightarrow{w} \in Img(f)$, queremos ver que $k.\overrightarrow{w} \in Img(f)$

Como $\overrightarrow{w} \in Img(f)$, entonces hay algún $\vec{v}$ en V tal que $f\left(\vec{v}\right) = \overrightarrow{w}$

Consideremos $k.\overrightarrow{w}$, se tiene entonces $k.\overrightarrow{w} = k.f\left(\vec{v}\right) = f\left(k.\vec{v}\right)$ pues f es

k- lineal y además como $k.\vec{v}$ es en V, $k.\overrightarrow{w} \in Img(f)$

Es entonces que $Img(f)$ es un subespacio de V' sobre *K*.

c) Se quiere probar que todo vector de la imagen de f es combinación lineal sobre *K* de los vectores que son imagen por f de los vectores de la base *B* de V.

Sea $\overrightarrow{w} \in Img(f)$, entonces hay algún $\vec{v}$ en V tal que $f\left(\vec{v}\right) = \overrightarrow{w}$.

Como *B* es base de V sobre *K*, para cualquier $\vec{v}$ en V existen escalares tales que

$$\vec{v} = h_1.\overrightarrow{b_1} + ... + h_n.\overrightarrow{b_n}.$$

Por ser f transformación *K*-lineal resulta

$$\overrightarrow{w} = f\left(\vec{v}\right) = f\left(h_1.\overrightarrow{b_1} + ... + h_n.\overrightarrow{b_n}\right) = h_1.f\left(\overrightarrow{b_1}\right) + ... + h_n.f\left(\overrightarrow{b_n}\right)$$

Por lo tanto $\overrightarrow{w} \in \overline{\left\{f\left(\overrightarrow{b_1}\right), ..., f\left(\overrightarrow{b_n}\right)\right\}}$.

Por otra parte si $\vec{u} \in \overline{\left\{f\left(\overrightarrow{b_1}\right), ..., f\left(\overrightarrow{b_n}\right)\right\}}$, existen elementos de *K* tales que:

$\vec{u} = m_1.f\left(\overrightarrow{b_1}\right) + m_2.f\left(\overrightarrow{b_2}\right) + ... + m_n.f\left(\overrightarrow{b_n}\right)$, que como f es transformación *K*-lineal, se puede expresar $\vec{u} = f\left(m_1.\overrightarrow{b_1} + m_2.\overrightarrow{b_2} + ... + m_n.\overrightarrow{b_n}\right)$ y por lo tanto $\vec{u} \in Img\left(f\right)$

♦

La demostración de c) vale para todo espacio V de dimensión finita $n > 0$ sobre K. Además el conjunto $\left\{f\left(\overrightarrow{b_1}\right),........,f\left(\overrightarrow{b_n}\right)\right\}$ en general no es una base, es sólo un conjunto de generadores de la imagen.

EJEMPLO 14.1.9:

Se ha visto que el espacio $\mathbb{R}^2 = \overline{\{(1,0);(0,1)\}}$ sobre $\mathbb{R}$.

Consideremos las proyecciones definidas en 14.1.6. En particular se obtiene

$$p_1((1,0)) = (1,0)$$
$$p_1((0,1)) = (0,0)$$

Luego, $Img(p_1) = \overline{\{(1,0),(0,0)\}}$. Pero este conjunto no puede ser una base porque es dependiente por estar $(0,0)$.

Para obtener una base se deben eliminar los vectores dependientes.

En este caso claramente quedará el $(1,0)$ y {(1,0)} que es una base de la $Img(p_1)$.

En general, si tenemos los vectores generadores de un espacio vectorial y deseamos obtener una base, deberemos eliminar los vectores dependientes de ese conjunto.

Por este hecho para espacios de dimensión finita la dimensión de la imagen es menor o igual que la dimensión del conjunto de partida.

Sean V y V' espacios vectoriales sobre el cuerpo K y si $f: V \longrightarrow V'$ es una transformación K- lineal inyectiva se denomina **monomorfismo.**

♦ PROPIEDAD 14.1.10

Sean V y V' espacios vectoriales sobre el cuerpo K y sea $f: V \longrightarrow V'$ una transformación K–lineal.

f es monomorfismo si y sólo si $Núc(f) = \left\{\overrightarrow{0_V}\right\}$

Demostración:

Simplificando la notación designaremos con + y . las operaciones de suma y producto por el escalar de manera igual en ambos espacios V y V'.

Sea f monomorfismo y supongamos $\vec{u} \in Núc(f)$. Por definición del núcleo y sus propiedades

$f\left(\vec{u}\right) = \overrightarrow{0_{V'}}$ y $f\left(\overrightarrow{0_V}\right) = \overrightarrow{0_{V'}}$ entonces $\vec{u} = \overrightarrow{0_V}$ pues f es monomorfismo.

Luego $Núc(f) = \left\{\overrightarrow{0_V}\right\}$

Para la recíproca, sea $f\left(\vec{u}\right) = f\left(\vec{w}\right)$, como V' tiene la estructura de grupo:

$$f\left(\vec{u}\right) - f\left(\vec{w}\right) = \overrightarrow{0_{V'}}$$

Ya que f es transformación *K*- lineal:

$f\left(\vec{u} - \vec{w}\right) = \overrightarrow{0_{V'}}$. Por lo tanto $\vec{u} - \vec{w} \in Núc(f) = \left\{\overrightarrow{0_V}\right\}$

Luego $\vec{u} - \vec{w} = \overrightarrow{0_V}$, y resulta que $\vec{u} = \vec{w}$.

Por lo tanto f es monomorfismo, ya que es inyectiva.

♦

♦ PROPIEDAD 14.1.11

Sean V y V' espacios vectoriales sobre el cuerpo *K*.

Sea $f: V \longrightarrow V'$ un monomorfismo.

Si $L = \left\{\overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_r}\right\} \subseteq V$ y *L* es libre (conjunto de vectores linealmente independientes sobre *K*) entonces $f(L)$ es libre en V'. Siendo

$$f(L) = \left\{f\left(\overrightarrow{v_1}\right), ..., f\left(\overrightarrow{v_r}\right)\right\}$$

Demostración:

Simplificando la notación escribiremos con + y . las operaciones de suma y producto por el escalar de manera igual en ambos espacios V y V'.

Sea $k_1.f\left(\overrightarrow{v_1}\right)+........+k_r.f\left(\overrightarrow{v_r}\right)=\overrightarrow{0_{V'}}$. Debe probarse que: $k_1=........=k_r=0_K$

$\overrightarrow{0_{V'}}=k_1.f\left(\overrightarrow{v_1}\right)+........+k_r.f\left(\overrightarrow{v_r}\right)=f\left(k_1.\overrightarrow{v_1}+........+k_r.\overrightarrow{v_r}\right)$ por ser f una transformación *K*- lineal.

Pero entonces $k_1.\overrightarrow{v_1}+........+k_r.\overrightarrow{v_r}\in Núc(f)=\left\{\overrightarrow{0_V}\right\}$ porque f es monomorfismo (propiedad 14.1.9)

Luego $k_1.\overrightarrow{v_1}+........+k_r.\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{0_V}$ y como $\left\{\overrightarrow{v_1},........,\overrightarrow{v_r}\right\}$ es libre sobre *K*, resulta que $k_1=........=k_r=0_K$.

♦

Si f es un monomorfismo de V en V' y la dimensión de V es finita sobre *K*, entonces f aplica bases del dominio en bases de la imagen de f.

EJEMPLO 14.1.12

Sean V y V' espacios vectoriales sobre el cuerpo *K*.

Sea $f:V\longrightarrow V'$ la función definida por $f\left(\vec{u}\right)=\overrightarrow{0_{V'}}$ para todo vector $\vec{u}\in V$

Es MUY fácil probar que f es transformación *K*- lineal.

Se denomina **transformación nula.**



Hallemos su núcleo: claramente su núcleo es todo el espacio V. ¿Sí? Justifique.

EJEMPLO 14.1.13

Sea la transformación $\mathbb{R}$-lineal $f:\mathbb{R}_2[x]\longrightarrow\mathbb{R}^{2x2}$ definida como:

$$f(a_0+a_1.x)=\begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ -a_1 & a_0-a_1 \end{pmatrix}$$

Puede comprobar que efectivamente es una transformación $\mathbb{R}$-lineal.

Por simplificación notaremos por + y . las operaciones de suma y producto por el escalar de manera igual en ambos espacios vectoriales.

Calcularemos $Núc(f)=\left\{p(x)\in \mathbb{R}_2[x]: f(p(x))=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$

Sea $p(x)=a_0+a_1.x\in \mathbb{R}_2[x]$, así

$$f(p(x))=f(a_0+a_1.x)=\begin{pmatrix}a_0 & 0\\ -a_1 & a_0-a_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Por lo cual

$\left.\begin{array}{r} a_0=0\\ -a_1=0\\ a_0-a_1=0\end{array}\right\}$ entonces $p(x)=0+0.x$ es decir el vector nulo de $\mathbb{R}_2[x]$.

Por lo tanto f es un monomorfismo.

Calculemos la $Img(f)=\left\{A\in \mathbb{R}^{2\times 2}: (\exists\, p(x))(p(x)\in \mathbb{R}_2[x]\wedge f(p(x))=A\right\}$

Usando 14.1.8, dada B una base de $\mathbb{R}_2[x]$ sobre $\mathbb{R}$, por ejemplo $B=\{1+x,3\}$.

Es base pues $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_2[x]=2$ y $B=\{1+x,3\}$ es libre sobre $\mathbb{R}$.

Luego la imagen se genera con: $f(B)=\{f(1+x),f(3)\}=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\right\}$

Este conjunto genera la imagen de f sobre $\mathbb{R}$ y es base de la imagen por 14.1.11 pues f es un monomorfismo $Img(f)=\overline{\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\right\}}$

En este ejemplo se cumple que

$\dim_{\mathbb{R}}(Img(f))=2$

$\dim_{\mathbb{R}}(Núc(f))=0$

Por lo tanto:

$$\dim_{\mathbb{R}}(Img(f))+\dim_{\mathbb{R}}(Núc(f))=\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2[x])$$

En general se cumple, como en este caso, que si V y V' espacios vectoriales sobre el cuerpo K y $f:V\longrightarrow V'$ es una transformación K-lineal con la dimensión de V finita sobre K vale que

$$\dim_K\left(Img\left(f\right)\right)+\dim_K\left(Núc\left(f\right)\right)=\dim_K\left(V\right).$$

Ya se probará!!!

EJEMPLO 14.1.14

La derivación $d:\mathbb{R}_4\left[x\right]\longrightarrow\mathbb{R}\left[x\right]$ es una transformación $\mathbb{R}$- lineal.

Anotaremos $d\left(p\left(x\right)\right)=p'\left(x\right)$

Simplificando la notación escribiremos con + y . las operaciones de suma y producto por el escalar de manera igual en ambos espacios.

Para esta transformación lineal calcularemos el

$Núc\left(d\right)=\left\{p\left(x\right)\in\mathbb{R}_4\left[x\right]:d\left(p\left(x\right)\right)=0\left(x\right)\right\}$ para $p\left(x\right)=a_0+a_1.x+a_2.x^2+a_3.x^3$

Aplicando las definiciones de *d* y el núcleo es

$$Núc\ \left(d\left(p\left(x\right)\right)\right)=a_1+2.a_2.x+3.a_3.x^2=0\left(x\right)$$

Entonces por igualdad de polinomios debe ser:

$$\begin{aligned}&a_1=0\\&2.a_2=0\Rightarrow a_2=0\\&3.a_3=0\Rightarrow a_3=0\\&\therefore a_1=a_2=a_3=0\end{aligned}$$

Luego $p\left(x\right)=a_0$. Cualquier sea el $a_0\in\mathbb{R}$ de *p*(*x*).

Esta transformación obviamente no es un monomorfismo, pues en el núcleo de *d* no está solamente el polinomio nulo. Y puede ser generado sobre $\mathbb{R}$ por cualquier real no nulo, por ejemplo $Núc(d)=\overline{\left\{1\right\}}$. Desde ya que $\left\{1\right\}$ es una base sobre $\mathbb{R}$ del subespacio de los polinomios constantes de $\mathbb{R}_4\left[x\right]$

Busquemos la imagen de *d.* Consideremos una base de $\mathbb{R}_4\left[x\right]$ sobre $\mathbb{R}$.

Por ejemplo $B=\left\{1,1+x,1-x^2,x^3+x\right\}$, es base sobre $\mathbb{R}$ porque está formado por cuatro vectores, todos son de distinto grado. Luego es libre y generador de $\mathbb{R}_4\left[x\right]$, por lo tanto es una base de $\mathbb{R}_4\left[x\right]$ sobre $\mathbb{R}$.

Calculemos $d\left(B\right)$:

$$d(B)=\{d(1),d(1+x),d(1-x^2),d(x^3+x)\}=\{0,1,-2.x,3x^2+1\}$$

Está claro que no es una base (está el 0(x) = 0). Si eliminamos el 0, se obtiene:

$B_I=\{1,-2.x,3x^2+1\}$ que es un conjunto de elementos linealmente independientes (pues todos los polinomios tiene distinto grado) y además generador por 14.1.8, por ello forman una base de la imagen.

Vemos que también se verifica:

$\dim_{\mathbb{R}}(Img(d))+\dim_{\mathbb{R}}(Núc(d))=\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_4[x])$ ya que $\dim_{\mathbb{R}}(Img(d))=3$, $\dim_{\mathbb{R}}(Núc(d))=1$ y $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_4[x])=4$

♦ TEOREMA 14.1.15

Dados V y $V´$ espacios vectoriales sobre el cuerpo *K*. Con $\dim_K V=n<\infty$

Sea $f:V\longrightarrow V´$ una transformación *K*–lineal. Entonces:

$$\dim_K V=\dim_K(Núc(f))+\dim_K(Img(f))$$

Demostración:

Simplificando la notación escribiremos con + y . las operaciones de suma y producto por el escalar de manera igual en ambos espacios V y $V´$.

Por hipótesis $\dim_K V=n$

Analizaremos dos casos:

1) El $Núc\,(f)$ no tiene base.

Si el núcleo no tiene base, significa que $Núc(f)=\{\overrightarrow{0_V}\}$.

Por lo tanto f es un monomorfismo.

Si *B* es una base de V, como $\dim_K V=n$, entonces $|B|=n$.

Y $f(B)$ es una base de $Img(f)$ por las propiedades 14.1.8 y 14.1.11.

Así $|f(B)|=n$ y entonces $f(B)$ es un conjunto de *n* vectores linealmente independientes sobre *K*.

Luego, si $Núc(f)=\{\overrightarrow{0_V}\}$, por definición $\dim_K(Núc(f))=0$ y se cumple:

$\dim_K V = \dim_K \left(Núc\left(f \right) \right) + \dim_K \left(Img(f) \right)$ pues $n = 0 + n$; por lo tanto el teorema vale.

2) El $Núc\ (f)$ tiene base.

Por lo cual $Núc(f) \neq \left\{ \overrightarrow{0_V} \right\}$, sea B_N una base de $Núc(f)$ sobre *K*.

Por ser el núcleo de f un subespacio de *V* sobre *K*, resulta que $\dim_K \left(Núc\left(f \right) \right) \leq n$.

Por lo cual consideremos $\left| B_N \right| = r \leq n$

Analicemos ahora:

i) Si $r = n$.

Se tiene que $Núc(f) = V$.

Por lo tanto f es la transformación nula.

Entonces $Img(\ f\ ) = \left\{ \overrightarrow{0_{V'}} \right\}$ y resulta por definición que $\dim_K \left(Img(f) \right) = 0$

Luego se tiene:

$\dim_K V = \dim_K \left(Núc\left(f \right) \right) + \dim_K \left(Im\left(f \right) \right)$ ya que $n = r + 0$; y por lo tanto el teorema vale.

ii) Si $r < n$. Sea $B_N = \left\{ \overrightarrow{b_1}, ..., \overrightarrow{b_r} \right\}$ una base del $Núc(f)$ sobre *K.*

Luego existe *B* base de *V* sobre *K* construida como:

$B = B_N \cup \left\{ \overrightarrow{b_{r+1}}, \overrightarrow{b_{r+2}}, ..., \overrightarrow{b_n} \right\}$ (Por 13.5.12)

De 14.1.8 $f(B)$ genera $Img(f)$.

Por propiedades de la imagen por una función:

$$f\left(B \right) = f\left(B_N \right) \cup f\left(\left\{ \overrightarrow{b_{r+1}}, \overrightarrow{b_{r+2}}, ..., \overrightarrow{b_n} \right\} \right)$$

Claramente $f\left(b_i \right) = 0$, para todos los $b_i \in B_N$ por definición del núcleo.

Así $f\left(\left\{ \overrightarrow{b_{r+1}}, \overrightarrow{b_{r+2}}, ..., \overrightarrow{b_n} \right\} \right)$ es el conjunto generador efectivo de la $Img(f)$

Probaremos que es base, es decir que

$f\left(\left\{ \overrightarrow{b_{r+1}}, \overrightarrow{b_{r+2}}, ..., \overrightarrow{b_n} \right\} \right) = \left\{ f\left(\overrightarrow{b_{r+1}} \right), f\left(\overrightarrow{b_{r+2}} \right), ..., f\left(\overrightarrow{b_n} \right) \right\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente sobre *K*.

Ya sabemos que generan la imagen de f. Analicemos que son libres sobre *K.*

Sea $k_1.f\left(\overrightarrow{b_{r+1}}\right)+k_2.f\left(\overrightarrow{b_{r+2}}\right)+.........+k_{n-r}.f\left(\overrightarrow{b_n}\right)=\overrightarrow{0_{V'}}$.

Hay que demostrar que los escalares k_j para $1\leq j\leq n-r$ son el 0_K.

Como f es transformación *K*- lineal resulta:

$$\overrightarrow{0_{V'}}=k_1.f\left(\overrightarrow{b_{r+1}}\right)+k_2.f\left(\overrightarrow{b_{r+2}}\right)+....+k_{n-r}.f\left(\overrightarrow{b_n}\right)=$$

$$=f\left(k_1.\overrightarrow{b_{r+1}}+k_2.\overrightarrow{b_{r+2}}+k_{n-r}.\overrightarrow{b_n}\right)$$

Por lo tanto: $k_1.\overrightarrow{b_{r+1}}+k_2.\overrightarrow{b_{r+2}}+k_{n-r}.\overrightarrow{b_n}\in Núc(f)$

Luego, se puede escribir como combinación lineal de

$B_N=\left\{\overrightarrow{b_1},........,\overrightarrow{b_r}\right\}$

Es decir existen escalares t_i para $1\leq i\leq r$ y

$k_1.\overrightarrow{b_{r+1}}+k_2.\overrightarrow{b_{r+2}}+k_{n-r}.\overrightarrow{b_n}=t_1.\overrightarrow{b_1}+.......+t_r.\overrightarrow{b_r}$,

operando en el espacio V sobre K resulta

$t_1.\overrightarrow{b_1}+.......+t_r.\overrightarrow{b_r}-k_1.\overrightarrow{b_{r+1}}-k_2.\overrightarrow{b_{r+2}}-k_{n-r}.\overrightarrow{b_n}=\overrightarrow{0_V}$

Luego como *B* es base de *V* sobre *K*, vale que

$$t_i=0_K \quad \text{con } 1\leq i\leq r$$
$$k_j=0_K \quad \text{con } r+1\leq j\leq n-r$$

De donde $\left\{f\left(\overrightarrow{b_{r+1}}\right),f\left(\overrightarrow{b_{r+2}}\right),........,f\left(\overrightarrow{b_n}\right)\right\}$ es base de $Img(f)$ sobre *K.*

Por lo tanto, $\dim_K\left(Núc(f)\right)=r$ y $\dim_K\left(Img(f)\right)=n-r$

Finalmente se tiene:

$\dim_K V=\dim_K\left(Núc(f)\right)+\dim_K\left(Img(f)\right)$ ya que $n=r+(n-r)$; y por lo tanto el teorema vale.

♦

Otro caso particular de transformación lineal es el **endomorfismo,** que es una transformación *K*-lineal de *V* en *V*. Es decir, el espacio de salida y de llegada es el mismo, de allí lo de "endo"

¡Ah!

Se define además el conjunto $End_K(V)=\{f : f \text{ es un endomorfismo de } V\}$

Hay varios ejemplos interesantes, ya vimos algunos.

EJEMPLO 14.1.16

En ejemplos anteriores se definió y trabajó con las transformaciones

$p_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, así p_1 es un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$

$p_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, también p_2 es un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$

Por lo ello $p_1 \in End_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^2\right)$ y $p_2 \in End_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^2\right)$

➢**Más definiciones**

•Una transformación *K*–lineal $f : V \longrightarrow V'$,suryectiva, f es un **epimorfismo.**

•Si la transformación *K*-lineal $f : V \longrightarrow V'$, biyectiva, f es un **isomorfismo.**

•Un endomorfismo f de V que además es un monomorfismo, f es un **automorfismo**.

Se define el conjunto

$$\begin{aligned} Aut_K(V) &= \{f : f \text{ es un monomorfismo de } V \text{ en } V\} = \\ &= \{f : f \text{ es una transformación } K\text{- lineal inyectiva de } V \text{ en } V\} \end{aligned}$$

Las propiedades de estos tipos de transformaciones lineales tienen interesantes consecuencias.

Estas categorías de transformaciones *K*-lineales existen, ya se vieron ejemplos y se verán otros.

Dado un espacio vectorial *V* sobre *K*. Una función que resulta muy sencillo de probar que pertenece a todas estas categorías es $id_V : V \to V$. 🙂

♦ PROPIEDAD 14.1.17

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre K, si f es un automorfismo entonces:

$$\dim_K V = \dim_K \left(Img(f) \right)$$

Y además f es epimorfismo.

Demostración:

Como V es de dimensión finita sobre K, se cumple que:

$\dim_K V = \dim_K \left(Núc(f) \right) + \dim_K \left(Img(f) \right)$; como f es un automorfismo, por tanto f es inyectiva y luego $\dim_K \left(Núc(f) \right) = 0$.

Así $\dim_K V = \dim_K \left(Im(f) \right)$.

Pero además como f es un automorfismo, es decir que va de V en V, por lo cual $Img(f) \subseteq V$. Como la imagen es subespacio de V resulta que $V = Img(f)$ (13.5.13), y por lo tanto f es suryectiva. Luego f es también un epimorfismo.

♦

♦ PROPIEDAD 14.1.18

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre K y si f es un endomorfismo, son equivalentes:

a) f es monomorfismo
b) f es epimorfismo
c) f es isomorfismo

Demostración:

Para hacer la demostración haremos una “cadena de implicaciones”.

Veremos que si vale a) entonces vale b); que si vale b) entonces vale c) y por último si vale c) entonces vale a). Así se cierra el ciclo, lo que las hace a todas equivalentes….

Si f es monomorfismo, entonces $Núc(f) = \left\{ \overrightarrow{0_V} \right\}$ por la propiedad 14.1.10

Luego $\dim_K V = \dim_K \left(Img(f)\right)$ por la propiedad 14.1.16 y así $V = Img(f)$.

Por lo tanto *f* es un epimorfismo.

Si *f* es epimorfismo, $\dim_K V = \dim_K \left(Img(f)\right)$. Luego por 14.1.15,

$Núc(f) = \left\{\overrightarrow{0_V}\right\}$,así f resulta ser inyectiva y por lo tanto f es un isomorfismo.

Si *f* es un isomorfismo se cumple trivialmente que *f* es monomorfismo.

♦

EJERCICIO 14.1.19

Sean (V, ⊕), (V',Ⓢ) y (V'', ⊖) espacios vectoriales sobre el cuerpo conmutativo *K.* Demostrar:

a) Si $f : V \longrightarrow V'$ es una transformación *K*-lineal biyectiva (isomorfismo) entonces f^{-1} es un isomorfismo.

b) Si $f : V \longrightarrow V'$ y $g : V' \longrightarrow V''$ son transformaciones *K*–lineales entonces $g \circ f : V \to V''$ es transformación *K*-lineal.

2. Homomorfismos

En este punto se harán nuevas abstracciones, que no son difíciles de comprender y sus consecuencias son interesantes e importantes.

Sean (V, ⊕), (V',Ⓢ) espacios vectoriales sobre un cuerpo conmutativo *K.*

Al conjunto de todas las transformaciones lineales de V en V' se lo anota $Hom_K(V,V')$.

EJERCICIO 14.2.1

Sean (V, ⊕), (V',Ⓢ) espacios vectoriales sobre un cuerpo conmutativo *K.*

Si $f : V \longrightarrow V'$ y $g : V \longrightarrow V'$ son transformaciones *K*-lineales, entonces: $f + g$ es una transformación *K*-lineal, y cualquiera sea $k \in K$ entonces $k.f$ es transformación *K*- lineal.

Se definen: (i) $(f+g)\left(\vec{v}\right) = f\left(\vec{v}\right) Ⓢ\, g\left(\vec{v}\right)$ para $\vec{v} \in V$

(ii) $(k.f)(\vec{v}) = k * f(\vec{v})$ para $\vec{v} \in V$, siendo $*$ el producto por el escalar en V'

Por el ejercicio 14.2. 1 resulta que $Hom_K(V,V')$ es un *K*–espacio vectorial sobre *K*. Pues $(Hom_K(V,V'),+)$ es un grupo conmutativo por la definición (i), donde el elemento neutro es la transformación nula. Y el producto por el escalar está definido en (ii). El lector puede verificar estos hechos.



EJERCICIO 14.2.2

Definir un endomorfismo de $\mathbb{Z}_5^{3\times 3}$ que no sea automorfismo.

EJEMPLO 14.2.3

Demostrar que $\mathbb{R}_3[x]$ es isomorfo a $\mathbb{R}^3$.

La demostración puede hacerse verificando que para cualquier base $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ sobre $\mathbb{R}$, si se define f por:

$$f(\vec{v}) = f(a_1 \otimes \vec{b_1} \oplus a_2 \otimes \vec{b_2} \oplus a_3 \otimes \vec{b_3}) = (a_1, a_2, a_3)$$ claramente es un isomorfismo (pues las coordenadas de un vector en una base son únicas) o como Corolario del siguiente teorema.

♦ TEOREMA 14.2.4:

Sean V y V' espacios vectoriales sobre *K*.

Sea $B = \{\vec{b_1}, \ldots\ldots\ldots, \vec{b_n}\}$ una base de V sobre *K*. Sea $g : B \longrightarrow V'$ una función.

Entonces existe una única transformación lineal $f : V \longrightarrow V'$ tal que $f_{|B} = g$.

Dónde $f_{|B}$ quiere decir f restringida a *B*

Además: i) f es monomorfismo si y sólo si g es inyectiva y $g(B)$ es libre.

ii) f es epimorfismo si y sólo si $g(B)$ genera V'

Demostración:

Simplificando la notación escribiremos con + y . las operaciones de suma y producto por el escalar de manera igual en ambos espacios V y V'.

Si g es una función de *B* en V'; para ver la existencia de la transformación lineal f basta con ver como se define para cada vector $\vec{v} \in V$ y probar sus propiedades.

Cualquiera sea $\vec{v} \in V$, se escribe de manera única como $\vec{v} = k_1.\vec{b_1} + ... + k_n.\vec{b_n}$.

Definimos entonces f por:

$$f\left(\vec{v}\right) = k_1.g\left(\vec{b_1}\right) + ... + k_n.g\left(\vec{b_n}\right)$$

No hay ambigüedad pues g es función y por ser *B* base de V sobre *K*, los k_i, $1 \leq i \leq n$, son únicos, por lo tanto f es función.

Por lo tanto todo vector $\vec{v} \in V$ tiene un único correspondiente.

Veamos ahora que f es transformación lineal.

Sean vectores arbitrarios del espacio V:

$$\vec{u} = l_1.\vec{b}_1 + ... + l_n.\vec{b_n}$$
$$\vec{w} = h_1.\vec{b}_1 + ... + h_n.\vec{b_n}$$
$$\vec{u} + \vec{w} = (l_1 + h_1).\vec{b_1} + ... + (l_n + h_n).\vec{b_n}$$

$$f(\vec{u} + \vec{w}) = f(\,(l_1 + h_1).\vec{b_1} + ... + (l_n + h_n).\vec{b_n}\,) =$$
$$= (l_1 + h_1).g(\vec{b_1}) + ... + (l_n + h_n).g(\vec{b_n}\,)$$

Por definición de *f.*

Si se aplican las propiedades de las operaciones del espacio $V\,'$ resulta igual a

$$\left(l_1.g\left(\vec{b_1}\right) + ... + l_n.g\left(\vec{b_n}\right)\right) + \left(h_1.g\left(\vec{b_1}\right) + ... + h_n.g\left(\vec{b_n}\right)\right) =$$

$= f\left(\vec{u}\right) + f\left(\vec{w}\right)$ y nuevamente por definición de f.

Considerando $k \in K$ y $\vec{v} \in V$

$$f(k.\vec{u}\,) = f(\,k.\left(l_1.\vec{b_1} + ... + l_n.\vec{b_n}\,\right)) =$$

$= f(\,\left(k.\,l_1.\vec{b_1} + ... + k.\,l_n.\vec{b_n}\,\right))$ por las propiedades del espacio V

Y por la definición de f y las propiedades de $V\,'$ resulta:

$$k.l_1.g\left(\vec{b_1}\right) + ... + k.l_n.g\left(\vec{b_n}\right) = k.\left(l_1.g\left(\vec{b_1}\right) + ... + l_n.g\left(\vec{b_n}\right)\right) = k.f\left(\vec{u}\right)$$

Veamos ahora que $f_{|B} = g$:

Esto significa que ambas funciones coinciden en los vectores de *B.*

Dado $\overrightarrow{b_i} \in B,\ 1 \leq i \leq n$. Luego se tiene la única combinación:

$$\overrightarrow{b_i} = 0.\overrightarrow{b_1} + ... + 1.\overrightarrow{b_i} + ... + 0.\overrightarrow{b_n}\ .$$

Es decir la combinación tiene el 1 de *K* afectando al b_i y 0 de *K* afectando al resto de los vectores de la base.

Por la definición de f:

$$f\left(\overrightarrow{b_i}\right) = 0.g\left(\overrightarrow{b_1}\right) + ... + 1.g\left(\overrightarrow{b_i}\right) + ... + 0.g\left(\overrightarrow{b_n}\right) = g\left(\overrightarrow{b_i}\right)$$

Veamos ahora que f es única (con la propiedad de extender a g):

Supongamos que existe $h : V \longrightarrow V'$ transformación lineal tal que: $h_{|B} = g$

Probaremos que *h* = f

Dos funciones son iguales si tienen igual dominio, codominio (cosa que se da por la definición de ambas) y cuando coinciden para todo elemento del dominio.

Sea $\vec{v} \in V$:

$$f\left(\vec{v}\right) = k_1.g\left(\overrightarrow{b_1}\right) + ... + k_n.g\left(\overrightarrow{b_n}\right) \text{ por definición de } f$$

$$= k_1.h\left(\overrightarrow{b_1}\right) + ... + k_n.h\left(\overrightarrow{b_n}\right)\ g \text{ y } h \text{ coinciden sobre B}$$

$$= h\left(\vec{v}\right) \text{ por ser } h \text{ transformación } K\text{-lineal}$$

Por lo tanto: *h* = *f*, es decir que f es única.

i) f es monomorfismo si y sólo si g es inyectiva y $g(B)$ es libre:

Si f es monomorfismo, f es inyectiva.

Entonces, vectores distintos del dominio (V) tienen por correspondientes vectores distintos. En particular para los vectores de $B \subseteq V$ donde f y g coinciden.

Luego g es inyectiva.

$g(B) = f_{|B}(B) = f(B)$.

Como *B* es libre, $f(B)$ es libre sobre *K* por la propiedad 14.1.11.y por lo tanto $g(B)$ es libre.

Si g es inyectiva y $g(B)$ es libre, queremos ver que f es monomorfismo.

Calcularemos el $Núc(f)$ y se analizará si $Núc(f)=\{\overrightarrow{0_V}\}$

Sea $\vec{w}\in V$, tal que $\vec{w}\in Núc(f)$, entonces $f(\vec{w})=\overrightarrow{0_{V'}}$

Como *B* es base, $\vec{w}=l_1.\vec{b_1}+........+l_n.\vec{b_n}$, y por la definición de f

$$f(\vec{w})=l_1.g(\vec{b_1})+........+l_n.g(\vec{b_n})=\overrightarrow{0_{V'}}.$$

Pero como $g(B)$ es libre sobre *K*, entonces $l_1=........=l_n=0$.

Por lo tanto $\vec{w}=\overrightarrow{0_V}$ y así $Núc(f)=\{\overrightarrow{0_V}\}$, luego f es un monomorfismo.

ii) f es epimorfismo si y sólo si $g(B)$ genera V'

Si f es epimorfismo, entonces $Img(f)=V'$

Y por la propiedad 14.1.8 es $Img(f)=\overline{f(B)}=\overline{g(B)}$. Ya que f y g coinciden sobre *B*.

Luego $\overline{g(B)}=V'$ por ello $g(B)$ genera V' sobre *K.*

Si $g(B)$ genera V' sobre *K*, $\overline{g(B)}=V'$ y entonces $\overline{f(B)}=V'$ (f y g coinciden sobre *B*)

Por lo tanto por 14.1.8, $Img(f)=V'$ y f resulta ser un epimorfismo.

♦



Sean V y V' espacios vectoriales sobre *K*. Si V es de dimensión finita sobre *K*, este teorema permite definir transformaciones *K*-lineales desde V en cualquier V' conociendo el valor de una función sobre una base *B* de V.

EJERCICIO 14.2.5

COROLARIO: Dada $B=\{\vec{b_1},........,\vec{b_n}\}$ base de V sobre *K* y sean $\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2},.......,\overrightarrow{w_n}$ vectores arbitrarios de un espacio vectorial *W* sobre *K*, existe una única transformación lineal $f:V\longrightarrow W$ tal que $f(\vec{b_i})=\overrightarrow{w_i}$, $1\leq i\leq n$.

Luego, para conocer un homomorfismo basta conocerlo en una base de un espacio dominio de dimensión finita sobre *K.*

EJEMPLO 14.2.6

Sean los $\mathbb{R}$-espacios $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ y sean los vectores $(1,0,1)$; $(0,1,1)$ y $(2,0,0)$ de

$\mathbb{R}^3$ que son base. Se define

$$g((1,0,1)) = (3,4)$$
$$g((0,1,1)) = (-2,7)$$
$$g((2,0,0)) = (0,1)$$

Veamos que los vectores $(1,0,1)$; $(0,1,1)$ y $(2,0,0)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.(-1) = -2 \neq 0$$

Como son linealmente independientes, y son tres, entonces:

Si designamos por $B = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}\} = \{(1,0,1),\ (0,1,1),\ (2,0,0)\}$ es una base de

$\mathbb{R}^3$.

Simplificando la notación escribiremos con $+$ y $.$ las operaciones de suma y producto por el escalar de manera igual en ambos espacios V y V'.

Y cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se puede escribir como:

$(x,y,z) = k_1.\overrightarrow{b_1} + k_2.\overrightarrow{b_2} + k_3.\overrightarrow{b_3}$, luego aplicando el teorema 14.2.4, se define

$$f((x,y,z)) = k_1.g(\overrightarrow{b_1}) + k_2.g(\overrightarrow{b_2}) + k_3.g(\overrightarrow{b_3}).$$

Los valores de $g(\overrightarrow{b_i})$ se conocen y falta conocer los valores de

k_i para $1 \leq i \leq 3$.

$$(x,y,z) = k_1.(1,0,1) + k_2.(0,1,1) + k_3.(2,0,0).$$

Operando en el espacio se tiene que:

$$x = k_1 + 2.k_3$$
$$\boxed{y = k_2}$$

$$z = k_1 + k_2 = k_1 + y$$
$$\boxed{k_1 = z - y}$$

$$x = z - y + y + 2.k_3$$
$$\boxed{\frac{x+y-z}{2} = k_3}$$

Por las operaciones de $\mathbb{R}^3$ se tiene:

$$f(x,y,z)=(z-y).(3,4)+y.(-2,7)+\left(\frac{x+y-z}{2}\right).(0,1)=$$
$$=\left(3z-3y-2y,4z-4y+7y+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-\frac{z}{2}\right)=$$
$$f(x,y,z)=\left(-5y-3z,\frac{x}{2}+\frac{7}{2}y+\frac{7}{2}z\right)$$

Analicemos si f es un monomorfismo.

La g es inyectiva y genera $\mathbb{R}^2$. Pero $g(B)$ no es libre sobre $\mathbb{R}$, pues son tres vectores en un espacio de dimensión 2 sobre $\mathbb{R}$.

Luego, f no es inyectiva porque:

$$\dim_{\mathbb{R}}(Img(f))+\dim_{\mathbb{R}}(Núc(f))=\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$$
$$\dim_{\mathbb{R}}(Núc(f))=3-\dim_{\mathbb{R}}(Img(f))=3-2=1\neq 0$$

Es decir f no es un monomorfismo.

Calculemos el $Núc(f)$. Queremos ver cuando:

$$\begin{cases}-5y-3z=0\\ \frac{x}{2}+\frac{7}{2}y+\frac{7}{2}z=0\end{cases}$$

Resolviendo se llega a:

$$z=\frac{5}{3}y$$
$$x=-\frac{53}{3}y$$
$$\left(-\frac{53}{3}y,\ y,\frac{5}{3}y\right)\in Núc(f) \text{ por lo cual}$$

$$y.\left(-\frac{53}{3},1,\frac{5}{3}\right)\in Núc(f)$$

Es decir: $Núc(f)=\overline{\left\{\left(-\frac{53}{3},1,\frac{5}{3}\right)\right\}}$. Confirmándose que: $\dim_{\mathbb{R}}(Núc(f))=1$.

EJEMPLO 14.2.7

Definir una transformación $\mathbb{Z}_3$ - lineal $f:\mathbb{Z}_3^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{Z}_{3_3}[x]$

Sean $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_2 = \{1,\ 1+1.x,\ 1+2.x+1.x^2\}$

bases de $\mathbb{Z}_3^{2\times 2}$ y $\mathbb{Z}_{3_3}[x]$ sobre $\mathbb{Z}_3$ respectivamente.

Por simplificación a los elementos de $\mathbb{Z}_3$ no se los anotó como clase de equivalencia, pero no perder la noción que así son. Esto es $0=\bar{0}, 1=\bar{1}$ y $2=\bar{2}$.
Ídem para lo que se usará más abajo como *a, b, c* y *d*.

Se sabe que si la transformación se define sobre una base se conoce para cualquier vector, extendiéndola por linealidad… (Teorema anterior).
Por lo tanto se definirá una *f* de modo que:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 \qquad f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1+2.x+1.x^2$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1+1.x \qquad f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

De hecho f NO es única.

Simplificando la notación escribiremos con + y . las operaciones de suma y producto por el escalar de manera igual en ambos espacios V y V'.

La forma explícita de f es, usando las operaciones definidas en ambos espacios vectoriales:

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a.f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + b.f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + c.f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) + d.f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= a.1 + b.\left(1+2x+x^2\right) + c.(1+x) + d.0 = (a+b+c).1 + (2b+c).\,x + b.\,x^2$$

Claramente es $Img(f) = \overline{f(B_1)} = \overline{B_2} = \mathbb{Z}_{3_3}[x]$

Para el $Núc(f)$, que por definición es

$$Núc(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{2\times 2} : f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = 0 \right\}$$, es decir:

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a.1 + b.\left(1 + 2.x + 1.x^2\right) + c.\left(1 + 1.x\right) + d.0 = \left(a + b + c\right) + \left(2.b + c\right).x + b.x^2 = 0$$

Que por igualdad de polinomios, equivale a:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2b + c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.0 + c = 0 \\ c = 0 \\ a + 0 + 0 = 0 \\ a = 0 \\ \boxed{d \quad \text{cualquiera}} \end{cases}$$

Así, $Núc\left(f\right) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a = b = c = 0\right\}$ y como $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = d.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

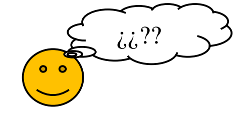
Por lo que resulta: $Núc\left(f\right) = \overline{\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}}$.

Observar que por cómo hemos definido a f, es un epimorfismo y claramente como se debe cumplir: $\dim_{\mathbb{Z}_3}\left(Img(f)\right) + \dim_{\mathbb{Z}_3}\left(Núc\left(f\right)\right) = \dim_{\mathbb{Z}_3}\left({\mathbb{Z}_3}^{2\times 2}\right)$

Y efectivamente se cumple que:

- $\dim_{\mathbb{Z}_3}\left(Img(f)\right) + \dim_{\mathbb{Z}_3}\left(Núc\left(f\right)\right) = 3 + 1 = \dim_{\mathbb{Z}_3}\left({\mathbb{Z}_3}^{2\times 2}\right)$

¿Podría haberse definido una transformación $\mathbb{Z}_3$ - lineal $f : \mathbb{Z}_3^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{Z}_{3_3}\left[x\right]$ que fuera isomorfismo??



EJERCICIO 14.2.8:

Hallar una transformación $\mathbb{C}$-lineal $f : \mathbb{C}_4\left[x\right] \longrightarrow \mathbb{C}^6$ tal que $Núc\left(f\right) = \overline{\left\{x - 1,\ x^2\right\}}$

- ***Una relación importante***

Dos espacios vectoriales V y V' sobre *K* se dicen **isomorfos** si existe un isomorfismo entre ellos.

Si dos espacios son isomorfos lo anotaremos $V \approx V'$, que se lee los **espacios *V* y *V´* son isomorfos**.

Sea $f : V \longrightarrow V'$ un f isomorfismo entre los espacios vectoriales V y V' sobre K, si V y V' son de dimensión finita sobre *K*, entonces:

$$\dim_K V = \dim_K \left(Img(f) \right) = \dim_K V'$$

Por la propiedad 14.1.15.

En algunas oportunidades se anota $V \overset{f}{\approx} V'$, para indicar cuál es el isomorfismo entre los espacios.

♦ COROLARIO 14.2.9

Sean V y V' espacios vectoriales sobre un cuerpo *K.*

$V \simeq V'$ es una relación de equivalencia dentro del conjunto de espacios vectoriales sobre *K*.

Demostración:

Simplificando la notación escribiremos con $+$ y $.$ las operaciones de suma y producto por el escalar de manera igual en ambos espacios V y V'.

i) Es reflexiva: ¿es $V \simeq V$?.

Existe id_V que es una transformación *K*- lineal biyectiva. La demostración queda como ejercicio.

ii) Es simétrica: ¿Si $V \simeq V'$ entonces $V' \simeq V$?

Si $V \simeq V'$, entonces existe $f : V \longrightarrow V'$ tal que f es un isomorfismo y por lo tanto por ser f biyectiva su función inversa también es biyectiva $f^{-1} : V' \longrightarrow V$ que es biyectiva.

Además f^{-1} es una transformación *K*-lineal:

$f^{-1}\left(\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}\right) = f^{-1}\left(f\left(\overrightarrow{u_1}\right) + f\left(\overrightarrow{u_2}\right)\right)$, porque f^{-1} es biyectiva y entonces existen $\overrightarrow{u_1}$ y $\overrightarrow{u_2}$ tales que: $\overrightarrow{w_1} = f\left(\overrightarrow{u_1}\right)$ y $\overrightarrow{w_2} = f\left(\overrightarrow{u_2}\right)$.

Como f es transformación lineal resulta:

$$f^{-1}\left(f\left(\overrightarrow{u_1}\right)+f\left(\overrightarrow{u_2}\right)\right)=f^{-1}\left(f\left(\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}\right)\right)=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}=f^{-1}\left(\overrightarrow{w_1}\right)+f^{-1}\left(\overrightarrow{w_2}\right)$$

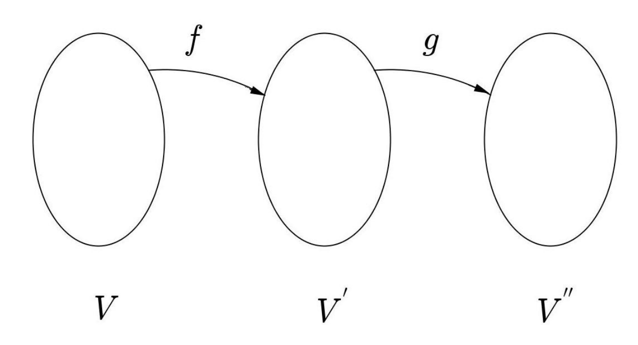
Luego: $f^{-1}\left(\overrightarrow{w_1}+\overrightarrow{w_2}\right)=f^{-1}\left(\overrightarrow{w_1}\right)+f^{-1}\left(\overrightarrow{w_2}\right)$

Queda como ejercicio, comprobar que $f^{-1}\left(k.\vec{w}\right)=k.f^{-1}\left(\vec{w}\right)$

Luego f^{-1} es *K*-lineal y por lo tanto la relación de isomorfismo es simétrica. (es la demostración de 14.1.19).

iii) Es transitiva: ¿Si $V\simeq V'$ y $V'\simeq V''$ entonces $V\simeq V''$?

Si $V\simeq V'$, existe $f:V\longrightarrow V'$ y f es un isomorfismo y si $V'\simeq V''$, existe $g:V'\longrightarrow V''$ y g es un isomorfismo.



Luego existe $g\circ f:V\longrightarrow V''$ que es una composición de biyectivas y por eso resulta $g\circ f$ biyectiva. Por 14.1.19 es una transformación *K*-lineal.

Luego, la relación es transitiva.

Por las tres propiedades verificadas, la relación de isomorfismo entre espacios vectoriales es una **relación de equivalencia**.

♦

♦ COROLARIO 14.2.10

Todo espacio V de dimensión *n* sobre *K* es isomorfo a K^n.

Demostración:

Simplificando la notación escribiremos con $+$ y $.$ las operaciones de suma y producto por el escalar de manera igual en ambos espacios V y K^n.

Sean $B=\left\{\overrightarrow{b_1},........,\overrightarrow{b_n}\right\}$ una base de V sobre *K* y $B'=\left\{\overrightarrow{e_1},........,\overrightarrow{e_n}\right\}$ la base canónica de K^n sobre *K*.

Se define f sobre la base y luego se extiende por linealidad por el teorema 14.2.4: $f\left(\overrightarrow{b_i}\right)=\overrightarrow{e_i}$, con $1\leq i\leq n$ y se extiende luego como transformación lineal para cualquier $\vec{v}=k_1.\vec{b_1}+........+k_n.\overrightarrow{b_n}$ de V:

$$f\left(\vec{v}\right)=k_1.f\left(\overrightarrow{b_1}\right)+........+k_n.f\left(\overrightarrow{b_n}\right)=k_1.\overrightarrow{e_1}+........+k_n.\overrightarrow{e_n}=$$
$$=\left(k_1,........,k_n\right)$$

Y por el mismo teorema resulta un isomorfismo.

♦

EJEMPLO 14.2.11

a) Sean $V=\mathbb{C}^{2\times 2}$, como $\mathbb{C}$-espacio, así la $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^{2\times 2}=4$ y como $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^4=4$, resulta que $\mathbb{C}^{2\times 2}\simeq\mathbb{C}^4$. Es decir ambos espacios son isomorfos.
b) También resulta $\mathbb{R}^2\simeq\mathbb{R}^{2\times 1}\simeq\mathbb{R}^{1\times 2}$, por lo que es equivalente pensar en (a,b), en $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ o en $\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$, según sea conveniente.

EJEMPLO 14.2.12

Definir un isomorfismo entre $\mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\mathbb{R}^4$ ambos como $\mathbb{R}$-espacios.

Sean $B_1=\left\{\overrightarrow{b_1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix};\overrightarrow{b_2}=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix};\overrightarrow{b_3}=\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix};\overrightarrow{b_4}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ y $B_2=\left\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4}\right\}$ las bases canónicas sobre $\mathbb{R}$ de ambos espacios respectivamente.

Se define $g\left(\overrightarrow{b_i}\right)=\overrightarrow{e_i}$ que es inyectiva para $1\leqslant i\leqslant 4$; además así definida resulta $g(B)$ libre. Y como $g(B_1)=B_2$ genera a $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$, por lo tanto, la transformación lineal asociada f es un isomorfismo.

Simplificando la notación escribiremos con + y . las operaciones de suma y producto por el escalar de manera igual en ambos espacios vectoriales.

Veamos ahora cuánto vale f :

$$\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=a.\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}+c.\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}+d.\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a.g\left(\overrightarrow{b_1}\right) + b.g\left(\overrightarrow{b_2}\right) + c.g\left(\overrightarrow{b_3}\right) + d.g\left(\overrightarrow{b_4}\right) =$$
$$= a.\overrightarrow{e_1} + b.\overrightarrow{e_2} + c.\overrightarrow{e_3} + d.\overrightarrow{e_4} = (a,b,c,d)$$

Si se define:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{g}\left(\overrightarrow{b_1}\right) = \overrightarrow{e_2} \\ \tilde{g}\left(\overrightarrow{b_2}\right) = \overrightarrow{e_4} \\ \tilde{g}\left(\overrightarrow{b_3}\right) = \overrightarrow{e_1} \\ \tilde{g}\left(\overrightarrow{b_4}\right) = \overrightarrow{e_4} \end{array}\right\} \text{claramente } \tilde{g} \text{ es distinta que } g\text{, por lo cual genera otra función, digamos } \tilde{f}.$$

Además no resultará isomorfismo.

La forma explícita resulta:

$$\tilde{f}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a.\tilde{g}\left(\overrightarrow{b_1}\right) + b.\tilde{g}\left(\overrightarrow{b_2}\right) + c.\tilde{g}\left(\overrightarrow{b_3}\right) + d.\tilde{g}\left(\overrightarrow{b_4}\right) =$$
$$= a.\overrightarrow{e_2} + b.\overrightarrow{e_4} + c.\overrightarrow{e_1} + d.\overrightarrow{e_4} = (c,a,0,b+d)$$

El teorema 14.2.4 dice que la f es única una vez determinada la g.

Si dos espacios vectoriales tienen distinta dimensión finita nunca se puede encontrar un isomorfismo entre ellos. Al igual si uno tiene dimensión finita y el otro no.

EJEMPLO 14.2.13:

Sea el espacio vectorial que es suma directa de dos espacios vectoriales.

$$V = V_1 \oplus V_2 = \left\{\vec{v} : \vec{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} \text{ con } \overrightarrow{v_i} \in V_i,\ i = 1,\ 2\right\}$$ (+ es la suma en V)

Como $V_1 \cap V_2 = \left\{\vec{0}\right\}$ y la expresión de cada vector de la suma es única.

Se definen:

$p_1\left(\vec{v}\right) = p_{V_1V_2}\left(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}\right) = \overrightarrow{v_1}$ y análogamente $p_2\left(\vec{v}\right) = p_{V_2V_1}\left(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}\right) = \overrightarrow{v_2}$

Es fácil probar que ambas funciones son transformaciones lineales. Queda como ejercicio la demostración.

¿siempre yo….?

Hallemos $Núc(p_1)$:

$Núc(p_1)=\left\{\vec{v}\in V: p_1\left(\vec{v}\right)=\vec{0}\right\}$; como $\vec{v}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$, $p_1\left(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}\right)=\overrightarrow{v_1}=\vec{0}$

Por lo tanto $\vec{v}=\overrightarrow{v_2}$ resultando $Núc(p_1)=V_2$.

Por otra parte $Img(p_1)=V_1$. Verifique.



Realizar un trabajo análogo para p_2

Estas proyecciones generalizan las proyecciones sobre los ejes coordenados pues $\mathbb{R}^2=S_1\oplus S_2$, siendo:

$$S_1=\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}=\overline{\{(1,0)\}}$$

$$S_2=\{(0,y): y\in\mathbb{R}\}=\overline{\{(0,1)\}}$$

La notación de p_1 como $p_{V_1V_2}$ se lee proyección sobre V_1 paralelamente a V_2 y la de p_2 como $p_{V_2V_1}$ se lee proyección sobre V_2 paralelamente a V_1.

En este sentido se destaca la similitud con las proyecciones del plano euclídeo con coordenadas ortogonales que son sobre un eje paralelamente al otro….

EJERCICIO 14.2.14:

Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de todas las funciones reales que sean derivables para todos los órdenes.

$\mathcal{D}=\left\{f: f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\wedge \text{exite } D^n(f) \text{ para cualquier } n\in\mathbb{N}\right\}\subset\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Se conviene que si $n=0$, la $D^0(f)=f$.

Probar que $\mathcal{D}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

EJEMPLO 14.2.15:

Sea $L_a=D-a.I$, a es un número real fijo, $D:\mathcal{D}\longrightarrow\mathcal{D}$ es la derivación y $I:\mathcal{D}\longrightarrow\mathcal{D}$ es la identidad.

Simplificando la notación escribiremos con + y . las operaciones de suma y producto por el escalar el espacio vectorial.

Como L_a es suma de transformaciones lineales resulta ser una transformación lineal, que aplicada a *f* da:

$$\boxed{L_a(f) = f' - a.f}$$

Calcularemos $Núc(L_a)$.

Como $Núc(L_a) = \{f : f' - a.f = 0\}$, resulta que los elementos que están en el $Núc(L_a)$ son las $f \in \mathcal{D}$ que verifican : $f' = a.f$, es decir :

$$f'(x) = a.f(x) \qquad (\forall x)(x \in \mathbb{R})$$

Probemos que $E_a \in Núc(L_a)$: tal que $E_a(x) = e^{a.x}$

$$D\left(e^{a.x}\right) = a.e^{a.x}$$

Veamos que si $f \in Núc(L_a)$ entonces $f = k.E_a$:

Sea $f \in Núc(L_a)$ entonces $f' - a.f = 0$ (*)

Calculando $\left(\dfrac{f}{e^{a.x}}\right)' = \dfrac{f'.e^{a.x} - a.f.e^{a.x}}{e^{2.a.x}} = \dfrac{e^{a.x}.(f' - a.f)}{e^{2.a.x}} = 0$ por (*).

Por lo tanto $\dfrac{f(x)}{e^{a.x}} = k \quad \therefore f(x) = k.e^{a.x}$

La recíproca es inmediata. Si $f(x) = k.e^{a.x}$, demostrar que $f \in Núc(L_a)$.

Es decir, las soluciones de la ecuación diferencial: $f' - a.f = 0$ que son las $f \in Núc(L_a)$ son un subespacio que además verifica $Núc(L_a) = \overline{\{e^{a.x}\}}$

3. Matrices asociadas a una transformación lineal

La siguiente definición entre otras cosas explicara el porqué de la definición del producto de matrices y además tiene aplicaciones dentro de la teoría de las transformaciones lineales muy importantes.

Sean *V* y *V’* dos *K*-espacios vectoriales de dimensión finita sobre *K*.

Consideremos $B=\left(\overrightarrow{b_1},........,\overrightarrow{b_n}\right)$ y $B'=\left(\overrightarrow{b_1'},........,\overrightarrow{b_m'}\right)$ bases ordenadas de V y V' respectivamente (por eso las hemos indicado entre paréntesis…).

Simplificando la notación escribiremos con + y . las operaciones de suma y producto por el escalar de manera igual en ambos espacios vectoriales.

Dada $f:V\longrightarrow V'$ una transformación *K*- lineal.

Se llama **matriz asociada a** f **respecto de** *B* **y** B' :

$$[f]_{BB'}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

los elementos de la matriz se construyen así:

$$f\left(\overrightarrow{b_1}\right)=a_{11}.\overrightarrow{b_1'}+........+a_{m1}.\overrightarrow{b_m'}$$

$$\vdots$$

en general:

$$f\left(\overrightarrow{b_i}\right)=a_{1i}.\overrightarrow{b_1'}+........+a_{mi}.\overrightarrow{b_m'} \quad 1\le i\le n$$

Calculamos los transformados por f de la base *B* y los expresamos en *B´*.

Las coordenadas del transformado del *i*-ésimo vector de la base, son los elementos de la *i*-ésima columna de la matriz.

EJEMPLO 14.3.1:

Sea la transformación $\mathbb{R}$-lineal $t:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^4$ definida por:

$$t\big((x,y,z)\big)=(x,x+y,z,x-z)$$

Si consideramos como bases:

$B=\big((1,2,1);(0,1,4);(0,0,1)\big)$ base de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$

$B'=\left(\overrightarrow{e_1}=(1,0,0,0);\overrightarrow{e_2}=(0,1,0,0);\overrightarrow{e_3}=(0,0,1,0);\overrightarrow{e_4}=(0,0,0,1)\right)$ base de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$.

Simplificando la notación escribiremos con + y . las operaciones de suma y producto por el escalar de manera igual en ambos espacios vectoriales.

Calculamos los transformados de la base *B* y los expresamos en *B´*.
Resulta que:

$$t\big((1,2,1)\big)=(1,3,1,0)=1.e_1+3.e_2+1.e_3+0.e_4$$
$$t\big((0,1,4)\big)=(0,1,4,-4)=0.e_1+1.e_2+4.e_3+(-4).e_4$$
$$t\big((0,0,1)\big)=(0,0,1,-1)=0.e_1+0.e_2+1.e_3+(-1).e_4$$

Luego:

$$[t]_{BB'}=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\1&4&1\\0&-4&-1\end{pmatrix}$$

Trabajemos ahora con otra base B'' de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$, sea: $B''=\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_4},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right)$.

Así se obtiene:

$$t\big((1,2,1)\big)=(1,3,1,0)=1.\overrightarrow{e_1}+0.\overrightarrow{e_4}+3.\overrightarrow{e_2}+1.\overrightarrow{e_3}$$
$$t\big((0,1,4)\big)=(0,1,4,-4)=0.\overrightarrow{e_1}+(-4).\overrightarrow{e_4}+1.\overrightarrow{e_2}+4.\overrightarrow{e_3}$$
$$t\big((0,0,1)\big)=(0,0,1,-1)=0.\overrightarrow{e_1}+(-1).\overrightarrow{e_4}+0.\overrightarrow{e_2}+1.\overrightarrow{e_3}$$

Luego:

$$[t]_{BB''}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-4&-1\\3&1&0\\1&4&1\end{pmatrix}$$

IMPORTANTE:
Es decir que si cambiamos el orden de los vectores de una base, la matriz asociada cambia. Luego por eso no es irrelevante que las bases se consideren **ordenadas**.

Además claramente si cambiamos alguna de las bases.

EJEMPLO 14.3.2:

Tomemos un endomorfismo de $\mathbb{R}_3[x]$ sobre $\mathbb{R}$ y se considera la base *B* = *B´*

Sea $B=(1+x,\ x^2,\ 2)$ una base de $\mathbb{R}_3[x]$ sobre $\mathbb{R}$ y sea la transformación:

$d:\mathbb{R}_3[x]\longrightarrow\mathbb{R}_3[x]$, donde $d(p(x))=p'(x)$ (el polinomio derivado de *p*)

Simplificando la notación escribiremos con + y . las operaciones de suma y producto por el escalar en el espacio vectorial.

Determinemos la matriz asociada a la transformación.

$$d(1+x)=1=0.(1+x)+0.x^2+\frac{1}{2}.2$$
$$d(x^2)=2x=2.(1+x)+0.x^2+(-1).2$$
$$d(2)=0=0.(1+x)+0.x^2+0.2$$

Hemos encontrado aquí una combinación lineal de los transformados de elementos de la base en elementos de la base, pero como la expresión es única, entonces **es esa** la combinación.

Luego, la matriz asociada es:

$$[d]_B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Se anota $[f]_B$ en lugar de $[f]_{BB}$ si se considera la base *B* = *B´*. Esto vale en general para cualquier endomorfismo en que se considera una sola base.

➢ Volviendo a $Hom_K(V,V')$…

Recordemos que es el conjunto de todas las transformaciones *K*-lineales entre los espacios V y V'.

$Hom_K(V,V')=\{f: f \text{ es una transformación } K\text{-lineal}, f:V\longrightarrow V'\}$

En el conjunto $Hom_K(V,V')$ se definió una suma y un producto externo que lo algebrizó como *K*–espacio vectorial (14.2.1)
Veamos que es isomorfo a un espacio de matrices.

♦ TEOREMA 14.3.3:

Sean V y V' *K*–espacios vectoriales de dimensión finita. Si $B=\left(\overrightarrow{b_1},........,\overrightarrow{b_n}\right)$ y $B'=\left(\overrightarrow{b_1'},........,\overrightarrow{b_m'}\right)$ son bases ordenadas, sobre K, de V y V' respectivamente, con $|B|=n, |B'|=m$

Existe un isomorfismo entre los *K*-espacios vectoriales $Hom_K(V,V')$ y K^{mxn}.

Demostración: Sea $\tau_{BB'}: Hom_K(V,V') \longrightarrow K^{m\times n}$, definido por:

$$\tau_{BB'}(f)=[f]_{BB'}$$

Nota : τ es la letra griega tau

Tenemos que probar que $\tau_{BB'}$ es una transformación *K*- lineal biyectiva.

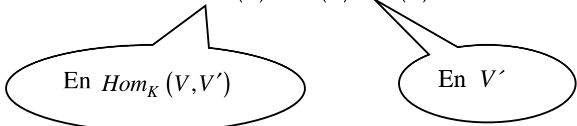
Simplificando la notación escribiremos con + y . las operaciones de suma y producto por el escalar en ambos espacios vectoriales.

i) $\tau_{BB'}: Hom_K(V,V') \longrightarrow K^{m\times n}$, $\tau_{BB'}$ es función porque la matriz asociada a cada transformación es única, ya que las coordenadas de todo vector en una base son únicas.

ii) Veamos que es una transformación *K*-lineal:

1) $\tau_{BB'}(f+h) \overset{?}{=} \tau_{BB'}(f)+\tau_{BB'}(h)$

Sabemos que: $(f+h)(\vec{v})=f(\vec{v})+h(\vec{v})$ para cualquier vector.



$$(f+h)\left(\overrightarrow{b_1}\right)=f\left(\overrightarrow{b_1}\right)+h\left(\overrightarrow{b_1}\right)=$$
$$=a_{11}.\overrightarrow{b_1'}+a_{21}.\overrightarrow{b_2'}+........+a_{m1}.\overrightarrow{b_m'}+c_{11}.\overrightarrow{b_1'}+c_{21}.\overrightarrow{b_2'}+........+c_{m1}.\overrightarrow{b_m'}=$$
$$=\left(a_{11}+c_{11}\right).\overrightarrow{b_1'}+\left(a_{21}+c_{21}\right).\overrightarrow{b_2'}+........+\left(a_{m1}+c_{m1}\right).\overrightarrow{b_m'}$$

Por las propiedades de las operaciones

En general, para cualquier otro vector de la base, por ejemplo el *i*-ésimo:

$$(f+h)\left(\overrightarrow{b_i}\right)=f\left(\overrightarrow{b_i}\right)+h\left(\overrightarrow{b_i}\right)=$$
$$=a_{1i}.\overrightarrow{b_1'}+a_{2i}.\overrightarrow{b_2'}+........+a_{mi}.\overrightarrow{b_m'}+c_{1i}.\overrightarrow{b_1'}+c_{2i}.\overrightarrow{b_2'}+........+c_{mi}.\overrightarrow{b_m'}=$$
$$=\left(a_{1i}+c_{1i}\right).\overrightarrow{b_1'}+\left(a_{2i}+c_{2i}\right).\overrightarrow{b_2'}+........+\left(a_{mi}+c_{mi}\right).\overrightarrow{b_m'}$$

Por lo tanto:

$$\tau_{BB'}(f+h)=[f+h]_{BB'}=\begin{pmatrix} a_{11}+c_{11} & a_{12}+c_{12} & ... & a_{1i}+c_{1i} & ... & a_{1n}+c_{1n} \\ a_{21}+c_{21} & a_{22}+c_{22} & ... & a_{2i}+c_{2i} & ... & a_{2n}+c_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1}+c_{m1} & a_{m2}+c_{m2} & ... & a_{mi}+c_{mi} & ... & a_{mn}+c_{mn} \end{pmatrix}=$$

Por suma de matrices

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1i} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2i} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mi} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1i} & ... & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2i} & ... & c_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ c_{m1} & c_{m2} & ... & c_{mi} & ... & c_{mn} \end{pmatrix}=$$

$$=[f]_{BB'}+[h]_{BB'}=\tau_{BB'}(f)+\tau_{BB'}(h)$$

Por la definición de matriz asociada tanto a f como a h y de $\tau_{BB'}$.

2) $\tau_{BB'}(k.f)\overset{?}{=}k.\tau_{BB'}(f)$

Sabemos que: $(k.f)\left(\vec{v}\right)=k.f\left(\vec{v}\right)=k.\alpha_1.\overrightarrow{b_1'}+k.\alpha_2.\overrightarrow{b_2'}+........+k.\alpha_n.\overrightarrow{b_m'}$ para cualquier vector. Si lo aplicamos a los vectores de la base B:

$$(k.f)\left(\overrightarrow{b_1}\right)=k.f\left(\overrightarrow{b_1}\right)=k.\left(a_{11}.\overrightarrow{b_1'}+a_{21}.\overrightarrow{b_2'}+........+a_{m1}.\overrightarrow{b_m'}\right)=$$
$$=k.a_{11}.\overrightarrow{b_1'}+k.a_{21}.\overrightarrow{b_2'}+........+k.a_{m1}.\overrightarrow{b_m'}$$

Por las propiedades de las operaciones

En general, para cualquier otro vector de la base, por ejemplo el *i*-ésimo:

$$(k.f)(b_i) = k.f(b_i) = k.\left(a_{1i}.b_1' + a_{2i}.b_2' + ... + a_{mi}.b_m'\right) =$$

$$= k.a_{1i}.b_1' + k.a_{2i}.b_2' + ... + k.a_{mi}.b_m'$$

Por lo tanto:

$$\tau_{BB'}(k.f) = [k.f]_{BB'} = \begin{pmatrix} k.a_{11} & k.a_{12} & ... & k.a_{1i} & ... & k.a_{1n} \\ k.a_{21} & k.a_{22} & ... & k.a_{2i} & ... & k.a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ k.a_{m1} & k.a_{m2} & ... & k.a_{mi} & ... & k.a_{mn} \end{pmatrix} =$$

Por la definición de multiplicación de escalar por matriz .

$$= k.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1i} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2i} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mi} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} = k.[f]_{BB'} = k.\tau_{BB'}(f)$$

iii) Veamos que $\tau_{BB'}$ es un monomorfismo, para ello busquemos su Núcleo.

$$Núc(\tau_{BB'}) = \left\{ f \in Hom_K(V, V') : \tau_{BB'}(f) = 0_{K^{m\times n}} \right\}$$

Es decir que para cualquier vector de la base *B* su transformado debe ser el $\vec{0}_{V'}$, para que los elementos de su matriz asociada sean cero.

$$[f]_{BB'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\vec{b_i}\right) = 0.\overrightarrow{b_1'} + 0.\overrightarrow{b_2'} + ... + 0.\overrightarrow{b_m'} \quad \text{con } 1 \le i \le n$$

De aquí tenemos que si $\vec{v} \in V$, $\vec{v} = \alpha_1.\overrightarrow{b_1} + \alpha_2.\overrightarrow{b_2} + ... + \alpha_n.\overrightarrow{b_n}$ y como $f\left(\vec{b_i}\right) = 0_{V'}$ para todo $b_i \in B$, resulta que para todo $\vec{v} \in V$, $f\left(\vec{v}\right) = \overrightarrow{0_{V'}}$

Luego f es la transformación nula.

Por lo tanto $Núc(\tau_{BB'}) = \left\{ O_{Hom_K(V,V')} \right\}$, luego $\tau_{BB'}$ es un monomorfismo sobre *K*.

iv) Veamos que es un epimorfismo.

Debemos estudiar que la imagen son todas las matrices.

Claramente $Img(\tau_{BB'}) \subset K^{m\times n}$.

Sea ahora $A \in K^{m\times n}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Debemos ver que existe, $f : V \longrightarrow V'$ una transformación lineal tal que

$[f]_{BB'} = A$

Se define para ello $f : V \longrightarrow V'$ tal que restringida a la base B sea:

$f\left(\overrightarrow{b_i}\right) = a_{1i}.\overrightarrow{b_1'} + a_{2i}.\overrightarrow{b_2'} + ... + a_{mi}.\overrightarrow{b_m'}$ con $1 \le i \le n$ y por 14.2.4

hay una única transformación lineal que coincide en la base. Luego f es la transformación deseada y $[f]_{BB'} = A$

♦

Si V y V' *K*–espacios vectoriales de dimensión finita *n* y *m* respectivamente

$$\dim_K\left(Hom_K\left(V,V'\right)\right) = m\times n = \dim_K\left(K^{m\times n}\right)$$

Piense que ocurre si V y V' *K*–espacios vectoriales de dimensión finita *m* y *n* respectivamente.

EJEMPLO 14.3.4:

Sea $id_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donde $id_{\mathbb{R}^3}\left((x,y,z)\right) = (x,y,z)$.

Sea $B = \left(\overrightarrow{b_1} = (1,0,0), \overrightarrow{b_2} = (0,3,1), \overrightarrow{b_3} = (0,0,-5)\right)$

Por simplificación se hará un abuso de notación simbolizando como + la suma en el espacio y como . el producto por el escalar.

$$id_{\mathbb{R}^3}\left(\overrightarrow{b_1}\right)=\overrightarrow{b_1}=1.\overrightarrow{b_1}+0.\overrightarrow{b_2}+0.\overrightarrow{b_3}$$
$$id_{\mathbb{R}^3}\left(\overrightarrow{b_2}\right)=\overrightarrow{b_2}=0.\overrightarrow{b_1}+1.\overrightarrow{b_2}+0.\overrightarrow{b_3}$$
$$id_{\mathbb{R}^3}\left(\overrightarrow{b_3}\right)=\overrightarrow{b_3}=0.\overrightarrow{b_1}+0.\overrightarrow{b_2}+1.\overrightarrow{b_3}$$

Así la matriz de la transformación es:

$$\left[id_{\mathbb{R}^3}\right]_B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

EJEMPLO 14.3.5:

Sea V un espacio vectorial sobre K de dimensión finita n.

Sea $id_V : V \longrightarrow V$ donde $id_V\left(\vec{v}\right)=\vec{v}$.

Por simplificación se hará un abuso de notación simbolizando como + la suma en el espacio V y como . el producto por el escalar.

Sea $B=\left(\overrightarrow{b_1},........,\overrightarrow{b_n}\right)$, para cada vector de la base B:

$$id_V\left(\overrightarrow{b_i}\right)=\overrightarrow{b_i}=0.\overrightarrow{b_1}+......+1.\overrightarrow{b_i}+......+0.\overrightarrow{b_n}$$

Luego, la matriz de la transformación es :

$$\left[id_V\right]_B=\begin{pmatrix}1&...&0&...&0\\...&...&...&...&...\\0&...&1&...&0\\...&...&...&...&...\\0&...&0&...&1\end{pmatrix}=I_n$$

Si se toma la misma base de partida y de llegada, la matriz que se obtiene es la identidad.

¿Qué ocurre si no son iguales las bases del espacio y la transformación sigue siendo la identidad?

Sea $id_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donde $id_{\mathbb{R}^3}\left((x,y,z)\right)=(x,y,z)$.

Sean las bases $B=\left(\overrightarrow{b_1}=(1,0,0),\overrightarrow{b_2}=(0,3,1),\overrightarrow{b_3}=(0,0,-5)\right)$ y $B_C=\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right)$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Por simplificación se hará un abuso de notación simbolizando como + la suma en el espacio y como . el producto por el escalar.

$$id_{\mathbb{R}^3}\left((1,0,0)\right)=(1,0,0)=1.\overrightarrow{e_1}+0.\overrightarrow{e_2}+0.\overrightarrow{e_3}$$
$$id_{\mathbb{R}^3}\left((0,3,1)\right)=(0,3,1)=0.\overrightarrow{e_1}+3.\overrightarrow{e_2}+1.\overrightarrow{e_3}$$
$$id_{\mathbb{R}^3}\left((0,0,-5)\right)=(0,0,-5)=0.\overrightarrow{e_1}+0.\overrightarrow{e_2}+(-5).\overrightarrow{e_3}$$

Luego, la matriz de la transformación es:

$$\left[id_{\mathbb{R}^3}\right]_{BB_C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&1&-5\end{pmatrix}$$

La matriz de la transformación identidad será la matriz identidad en el caso de que la base de partida y de llegada sean las mismas, en otro caso no.

EJEMPLO 14.3.6:

Se desea calcular la transformación, conociéndose la matriz asociada a dos bases determinadas y conocidas.

Por ejemplo hallar $f:\mathbb{R}^{2\times 2}\longrightarrow\mathbb{R}^3$, considerando las bases

$$B_C=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right) \text{ de } \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$B=\left((1,0,1);(0,1,0);(0,0,5)\right) \text{ de } \mathbb{R}^3$$

Dada la matriz asociada a esas bases:

$$[f]_{B_CB}=\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\2&0&1&5\\0&4&1&0\end{pmatrix}$$

Por simplificación se hará un abuso de notación simbolizando como + la suma en ambos espacios y como . el producto por el escalar en ambos casos.

Por la definición de la matriz asociada a una transformación lineal respecto a las bases significa que:

$$f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=1.(1,0,1)+2.(0,1,0)+0.(0,0,5)=(1,2,1)$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=-1.(1,0,1)+0.(0,1,0)+4.(0,0,5)=(-1,0,19)$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)=0.(1,0,1)+1.(0,1,0)+1.(0,0,5)=(0,1,5)$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=-1.(1,0,1)+5.(0,1,0)+0.(0,0,5)=(-1,5,-1)$$

Se sabe además que:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=a.\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+c.\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+d.\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Se tiene entonces que si f es una transformación lineal:

$$f\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right)=a.f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)+b.f\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)+c.f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)+d.f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=$$

$$=a.(1,2,1)+b.(-1,0,19)+c.(0,1,5)+d.(-1,5,-1)$$

Por lo tanto haciendo las cuentas, resulta:

$$f\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right)=(a-b-d,2a+c+5d,a+19b+5c-d)$$

EJEMPLO 14.3.7

Ídem ejemplo anterior pero sustituyendo la base de $\mathbb{R}^{2\times2}$ por:

$$B_1=\left(\overrightarrow{b_1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};\overrightarrow{b_2}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix};\overrightarrow{b_3}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix};\overrightarrow{b_4}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)$$

Es decir hallar $f:\mathbb{R}^{2\times2}\longrightarrow\mathbb{R}^3$, considerando las bases B_1 de $\mathbb{R}^{2\times2}$ y $B=((1,0,1);(0,1,0);(0,0,5))$ de $\mathbb{R}^3$.

Y sea $[f]_{B_1 B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Por simplificación se hará un abuso de notación simbolizando como + la suma en ambos espacios y como . el producto por el escalar en ambos casos.

Por ser B_1 base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tiene que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha_1.\overrightarrow{b_1} + \alpha_2.\overrightarrow{b_2} + \alpha_3.\overrightarrow{b_3} + \alpha_4.\overrightarrow{b_4} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_4 \end{pmatrix}$$

Haciendo las cuentas en $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Por igualdad de matrices resulta:

$$\boxed{\alpha_1 = a}$$

$$\boxed{\alpha_2 = b}$$

$$d = \alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_4 \Rightarrow \boxed{\alpha_4 = d - a + 3b}$$

$$\alpha_3 + \alpha_4 = c \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_3 = c - d + a - 3b}$$

Además, por la definición de la matriz asociada a una transformación respecto de dos bases fijas:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1.(1,0,1) + 2.(0,1,0) + 0.(0,0,5) = (1,2,1)$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\right) = -1.(1,0,1) + 0.(0,1,0) + 4.(0,0,5) = (-1,0,19)$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0.(1,0,1) + 1.(0,1,0) + 1.(0,0,5) = (0,1,5)$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = -1.(1,0,1) + 5.(0,1,0) + 0.(0,0,5) = (-1,5,-1)$$

Por lo cual:

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a.(1,2,1) + b.(-1,0,19) + (c - d + a - 3b).(0,1,5) +$$

$$+ (d - a + 3b).(-1,5,-1) =$$

$$= (a - b - d + a - 3b, 2a + c - d + a - 3b + 5d - 5a + 15b, a + 19b + 5c - 5d + 5a - 15b - d + a - 3b)$$

Y así: $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (2a - 4b - d, -2a + 12b + c + 4d, 7d + b + 5c - 6d)$

Estos dos ejemplos muestran que las bases asociadas son determinantes para la definición de la matriz asociada a una transformación lineal.

4. Composición de transformaciones lineales

Ya se ha probado que la composición de transformaciones lineales, cuando es posible, es una transformación lineal. Se estudiará qué relación tiene este hecho con las matrices asociadas.

♦ PROPIEDAD 14.4.1

Sean V, V' y V'' *K*-espacios vectoriales de dimensión finita sobre *K*.

Con dimensiones *n, m* y *p* respectivamente.

Sean $B=\left(\overrightarrow{b_1},........,\overrightarrow{b_n}\right)$, $B'=\left(\overrightarrow{b_1'},........,\overrightarrow{b_m'}\right)$, $B''=\left(\overrightarrow{b_1''},........,\overrightarrow{b_p''}\right)$ bases ordenadas de V, V' y V'' respectivamente.

Si $f:V\longrightarrow V'$, $g:V'\longrightarrow V''$ son transformaciones *K*-lineales.

Entonces:

$$[g\circ f]_{BB''}=[g]_{B'B''}\cdot[f]_{BB'}$$

Demostración:

Por simplificación se hará un abuso de notación simbolizando como + la suma en los espacios y como . el producto por el escalar en esos casos.

Definamos las matrices asociadas a f y a g como

$$A=[f]_{BB'}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{siendo } f\left(\overrightarrow{b_i}\right)=a_{1i}.\overrightarrow{b_1'}+........+a_{mi}.\overrightarrow{b_m'}\ ,\ 1\le i\le n \quad (1)$$

$$B=[g]_{B'B''}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pm} \end{pmatrix} \text{siendo } g\left(\overrightarrow{b_k'}\right)=a_{1k}.\overrightarrow{b_1''}+........+a_{pk}.\overrightarrow{b_p''}\ ,\ 1\le k\le m \quad (2)$$

Además, aplicando la definición de composición de funciones y usando que son transformaciones lineales sobre K en lo determinado en (1) y (2) para cualquier vector de la base B, por ejemplo el i-ésimo:

$$g\left(f\left(\overrightarrow{b_i}\right)\right)=a_{1i}.g\left(\overrightarrow{b_1'}\right)+........+a_{mi}.g\left(\overrightarrow{b_m'}\right)=$$

$$=a_{1i}.\left(b_{11}.\overrightarrow{b_1''}+........+b_{p1}.\overrightarrow{b_p''}\right)+a_{2i}.\left(b_{12}.\overrightarrow{b_1''}+........+b_{p2}.\overrightarrow{b_p''}\right)+........+a_{mi}.\left(b_{1m}.\overrightarrow{b_1''}+........+b_{pm}.\overrightarrow{b_p''}\right)=$$

$$=\left(a_{1i}.b_{11}+a_{2i}.b_{12}+........+a_{mi}.b_{1m}\right).\overrightarrow{b_1''}+..........+\left(a_{1i}.b_{p1}+a_{2i}.b_{p2}+........+a_{mi}.b_{pm}\right).\overrightarrow{b_p''}=$$

$$=.\left(\sum_{k=1}^{m}b_{1k}.a_{ki}\right).\overrightarrow{b_1''}+........\left(\sum_{k=1}^{m}b_{pk}.a_{ki}\right).\overrightarrow{b_p''}$$

Luego para cualquier otro vector de B será análogo el resultado, por lo cual podemos formar las columnas de $[g\circ f]_{BB''}$

Es decir:

$$[g\circ f]_{BB''}=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{m}b_{1k}.a_{k1} & ... & \sum_{k=1}^{m}b_{1k}.a_{ki} & ... & \sum_{k=1}^{m}b_{1k}.a_{km}\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ \sum_{k=1}^{m}b_{pk}.a_{k1} & ... & \sum_{k=1}^{m}b_{pk}.a_{ki} & ... & \sum_{k=1}^{m}b_{pk}.a_{km}\end{pmatrix}$$

Calculemos $B\cdot A=C$.

Por definición de producto de matrices, el elemento genérico de la fila s y columna i está dado por:

$$c_{si}=\sum_{k=1}^{m}b_{sk}.a_{ki}$$

Y por lo tanto analizando y por definición de igualdad de matrices se tiene:

$$[g\circ f]_{BB''}=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{m}b_{1k}.a_{k1} & ... & \sum_{k=1}^{m}b_{1k}.a_{ki} & ... & \sum_{k=1}^{m}b_{1k}.a_{km}\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ \sum_{k=1}^{m}b_{pk}.a_{k1} & ... & \sum_{k=1}^{m}b_{pk}.a_{ki} & ... & \sum_{k=1}^{m}b_{pk}.a_{km}\end{pmatrix}=B.A$$

♦

EJEMPLO 14.4.2

MUY IMPORTANTE!!!

Sean las transformaciones *K*- lineales:

$f:\mathbb{R}^{2\times 2}\longrightarrow\mathbb{R}^3$, considerando las bases B_1 de $\mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$B_1=\left(\overrightarrow{b_1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix};\overrightarrow{b_2}=\begin{pmatrix}0&1\\0&-3\end{pmatrix};\overrightarrow{b_3}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix};\overrightarrow{b_4}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right)$$

y $B=\big((1,0,1);(0,1,0);(0,0,5)\big)$ de $\mathbb{R}^3$ con $[f]_{B_1B}=\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\2&0&1&5\\0&4&1&0\end{pmatrix}$

del ejercicio 14.3.7.

$t:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^4$ definida por:

$$t\big((x,y,z)\big)=(x,x+y,z,x-z)$$

$B^*=\big((1,2,1);(0,1,4);(0,0,1)\big)$ base de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$

$B'=\big(\overrightarrow{e_1}=(1,0,0,0);\overrightarrow{e_2}=(0,1,0,0);\overrightarrow{e_3}=(0,0,1,0);\overrightarrow{e_4}=(0,0,0,1)\big)$ base de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$ con $[t]_{B^*B'}=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\1&4&1\\0&-4&-1\end{pmatrix}$ del ejercicio 14.3.1..

Claramente se puede hacer la composición de f con t

$\mathbb{R}^{2\times 2}\xrightarrow{f}\mathbb{R}^3\xrightarrow{t}\mathbb{R}^4$ es decir $t\circ f:\mathbb{R}^{2\times 2}\longrightarrow\mathbb{R}^4$.

¿¿Para calcular la matriz asociada a la composición podemos aplicar directamente el teorema 14.4.1 teniendo estas matrices calculadas??

NO, pues para que sea aplicable haciendo el producto observar que la "base central" debe ser la misma. ¿Qué queremos expresar con "base central"? Cuando es factible una composición de funciones, en particular de transformaciones lineales el espacio de llagada de la primera transformación debe coincidir con el espacio de partida de la segunda transformación que se aplica. Luego en ese espacio HAY QUE CONSIDERAR LA MISMA BASE.

Eso es lo que referimos como "base central". Y en el ejemplo planteado $B \neq B^*$.

Por lo cual se calcula la matriz $[t]_{BB'}$ que resulta ser (verifique…)

$$[t]_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $[t \circ f]_{B_1 B_C} = [t]_{BB_C} . [f]_{B_1 B} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 19 & 5 & -1 \\ 0 & -20 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$ También verifique!!!.

Una recomendación para recordar lo que dice el teorema 14.4.1, es diagramarlo así:

$$\underset{B}{V} \xrightarrow{f} \underset{B'}{V'} \xrightarrow{g} \underset{B''}{V''} \quad \text{es decir } g \circ f : \underset{B}{V} \longrightarrow \underset{B''}{V''}$$

Y así queda claro: $[g \circ f]_{BB''} = [g]_{B'B''} \cdot [f]_{BB'}$

Si no le gustan las recetas no lo use…..

En la definición de existencia de la matriz inversa de una dada $A \in K^{n\times n}$, para K cuerpo conmutativo se pidió que existiera otra matriz $B \in K^{n\times n}$ tal que $A.B = B.A = I_n$, en el siguiente ejercicio se verá que con la ayuda del Algebra Lineal alcanza con tener una sola igualdad:

EJEMPLO 14.4.3

Probar que si $A \in K^{n\times n}$ y $B \in K^{n\times n}$ y además $A \cdot B = I_n$, entonces $A = B^{-1}$

$A \in K^{n\times n}$ y $B \in K^{n\times n}$ entonces por el teorema 14.3.3 existen $f \in Hom_K(V, V'), g \in Hom_K(V', V)$ para espacios vectoriales V y V', ambos de dimensión *n*, fijando una base *B** de V sobre *K* y fijando una base *B*** de V' sobre *K* y se pueden considerar que $[f]_{B^*B^{**}} = A$ y que $[g]_{B^{**}B^*} = B$.

De acuerdo con la hipótesis: $A \cdot B = [f]_{B^*B^{**}} \cdot [g]_{B^{**}B^*} = [f \circ g]_{B^{**}} = I_n$

Entonces $f \circ g = id_{V'}$ por el isomorfismo τ

Como $id_{V'}$ es inyectiva, entonces g resulta inyectiva. Y como $id_{V'}$ es suryectiva, resulta que f es suryectiva. (Ver en el capítulo de funciones las propiedades de la composición de funciones inyectivas y suryectiva,)

Por tanto, como $n = \dim_K V = \dim_K \left(Núc(f)\right) + \dim_K \left(Img(f)\right)$ y también

$$n = \dim_K V' = \dim_K \left(Núc(g)\right) + \dim_K \left(Img(g)\right)$$

Como g es inyectiva entonces $\dim_K \left(Núc(g)\right) = 0$ por lo tanto

$n = \dim_K \left(Img(g)\right)$ luego $V = Img(g)$ es por tanto g un isomorfismo.

De manera similar se puede probar que f es un isomorfismo.

Al ser g un isomorfismo, tiene inversa. Es decir existe g^{-1}.

Vale que:

$$f = f \circ id_{V'}$$

Por la propiedad de g y su inversa:

$$f = f \circ \left(g \circ g^{-1}\right)$$

Asociando de otra manera la composición de las transformaciones:

:

$$f = (f \circ g) \circ g^{-1}$$

$$f = id_{V'} \circ g^{-1}$$

Entonces:

$$f = g^{-1}$$

Por lo cual: $[f]_{B^*B^{**}} = \left[g^{-1}\right]_{B^*B^{**}}$

Además se tiene: $f \circ g = id_{V'}$ es decir que $g^{-1} \circ g = id_{V'}$ y $g \circ g^{-1} = id_V$

$\left[g \circ g^{-1}\right]_{B^*} = [id_V]_{B^*} = I_n$ y por el teorema 14.4.1:

$$I_n = [g]_{B^{**}B^*} \cdot \left[g^{-1}\right]_{B^*B^{**}} = B \cdot A$$

Luego, como: $A \cdot B = I_n$ y $B \cdot A = I_n$, entonces: $A = B^{-1}$

Y también como $f = g^{-1}$, entonces $g = f^{-1}$

Luego, tenemos: $B^{-1} = \left[f^{-1} \right]_{B^{**}B^{*}}$ lo que significa algo MUY IMPORTANTE!!!

$$A^{-1} = B = [f]_{B^{*}B^{**}}{}^{-1} = \left[f^{-1} \right]_{B^{**}B^{*}}$$



Entonces:

Las matrices invertibles son matrices que se corresponden con isomorfismos.

Es decir, hay un isomorfismo entre las matrices invertibles y los isomorfismos.

♦PROPIEDAD 14.4.4

Corolario del ejercicio 14.4.3

f es invertible si y sólo si $A = [f]_{BB^{*}}$ es invertible

EJERCICIO 14.4.5

Hallar explícitamente $g \circ f$, si se sabe que: $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ y que:

$$[f]_{B_C B_C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad [g]_{B_C B'_C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siendo B_C la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $B´_C$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

EJEMPLO 14.4.6

Analizar si la transformación lineal es invertible y calcular en ese caso su inversa, si

$$f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x], \text{ con } [f]_{B_C} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = A \text{ y } B_C = \left(1, x, x^2\right)$$

Por simplificación se hará un abuso de notación simbolizando como + la suma en el espacio y como . el producto por el escalar.

Por la matriz asociada se puede calcular la forma explícita de f pues se sabe cuánto vale en una base:

$$f(1) = 1.1 + 1.x^2$$

$$f(x) = -3.1 + 4.x + 2.x^2$$

$$f(x^2) = 1.1 + 2.x^2$$

Así $f(p(x)) = f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0.f(1) + a_1.f(x) + a_2.f(x^2) =$

$$= a_0(1.1 + 1.x^2) + a_1(-3.1 + 4.x + 2.x^2) + a_2(1.1 + 2.x^2) =$$

$$= (a_0 - 3.a_1 + a_2).1 + 4.a_1.x + (a_0 + 2.a_1 + 2.a_2).x^2$$

Para analizar que la matriz es invertible, lo que equivale a que la transformación lo sea, se hará por el criterio del determinante (det(A)≠0 si y sólo si A es invertible)

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4.(2-1) = 4 \neq 0$$

Por lo tanto existe A^{-1} y $A^{-1} = \left[f^{-1}\right]_{B_C}$.

Se calculará la inversa de A por el método de la adjunta….

$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 8 & 1 & -5 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (verifique!!!). Luego: $A^{-1} = |A|^{-1}.(\operatorname{adj} A)^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -1 & -\frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix}$

Así queda:

$$\left[f^{-1}\right]_{B_C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -1 & -\frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix}.$$

La transformación $f^{-1} : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ se determina a partir de la matriz, sobre los vectores de la base:

$$f^{-1}(1) = 2.1 + (-1).x^2$$

$$f^{-1}(x) = 2.1 + \frac{1}{4}.x + \left(-\frac{5}{4}\right).x^2$$

$$f^{-1}\left(x^2\right) = -1.1 + 1.x^2$$

Para obtener su forma explícita

$$f^{-1}(p(x)) = f^{-1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0.f^{-1}(1) + a_1.f^{-1}(x) + a_2.f^{-1}(x^2) =$$

$$= a_0.(2.1 + (-1).x^2) + a_1.(2.1 + \frac{1}{4}.x + \left(-\frac{5}{4}\right).x^2) + a_2.(-1.1 + 1.x^2) =$$

$$= (2.a_0 + 2.a_1 - 1.a_2).1 + (\frac{1}{4}.a_1).x + (-1.a_0 - \frac{5}{4}.a_1 + a_2).x^2$$

EJERCICIO 14.4.7

Analizar si la transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es invertible, de la que se da su matriz asociada. En caso de serlo, hallar f^{-1}

Sabiendo que $[f]_{B_C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Siendo B_C la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

5. Cálculo de transformaciones empleando matrices

Se verá otra aplicación de las matrices asociadas a las transformaciones lineales para bases determinadas.

Si V es un espacio de dimensión finta *n* sobre *K* y dada $B = \left(\overrightarrow{b_1}, ..., \overrightarrow{b_n}\right)$ una base de V sobr*e* *K* entonces todo vector se expresa de manera única por

$$\vec{v} = v_1.\overrightarrow{b_1} + ... + v_n.\overrightarrow{b_n}$$

Si se define $f\left(\overrightarrow{b_i}\right) = \overrightarrow{e_i}$, con $1 \le i \le n$, como en el Corolario 14.2.10, así se tiene

$V \approx K^n$ y $K^n \approx K^{n\times 1}$ determinando $\vec{v} \mapsto (v_1,........,v_n) \mapsto \begin{pmatrix} v_1 \\ ... \\ v_n \end{pmatrix}$

Los elementos de la matriz son las coordenadas de $\vec{v}$ en la base *B*.

Como V, K^n y $K^{n\times 1}$ todos tienen dimensión *n* se justifica que los tres son isomorfos, además de que las coordenadas en una base son únicas!!!

Se define la **matriz de un vector asociado a una base *B***, por

$$\vec{v} \mapsto \begin{pmatrix} v_1 \\ ... \\ v_n \end{pmatrix} = \left[\vec{v}\right]_B$$

♦ PROPIEDAD 14.5.1

Sea $f: V \longrightarrow V'$ una transformación *K*- lineal.

Si la matriz asociada a f respecto de *B* y B' es

$$[f]_{BB'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

entonces

$$\left[f\left(\vec{v}\right)\right]_{B'} = [f]_{BB'} \cdot \left[\vec{v}\right]_B$$

Demostración:

Por simplificación se hará un abuso de notación simbolizando como + la suma en ambos espacios y como . el producto por el escalar en ambos casos.

Sea $B = \left(\overrightarrow{b_1},........,\overrightarrow{b_n}\right)$ la base de V. Como $\vec{v} = v_1.\overrightarrow{b_1} + ... + v_n.\overrightarrow{b_n}$, aplicando la transformación lineal f y la definición de su matriz asociada resulta que:

$$f\left(\vec{v}\right) = v_1.f\left(\overrightarrow{b_1}\right) + ... + v_n.f\left(\overrightarrow{b_n}\right) = v_1.\left(a_{11}.\overrightarrow{b_1'} + a_{21}.\overrightarrow{b_2'} + ... + a_{m1}.\overrightarrow{b_m'}\right) +$$

$$+ v_2.\left(a_{12}.\overrightarrow{b_1'} + a_{22}.\overrightarrow{b_2'} + ... + a_{m2}.\overrightarrow{b_m'}\right) + ... + v_n.\left(a_{1n}.\overrightarrow{b_1'} + a_{2n}.\overrightarrow{b_2'} + ... + a_{mn}.\overrightarrow{b_m'}\right) =$$

$$= (v_1.a_{11} + v_2.a_{12} + ... + v_n.a_{1n}).\overrightarrow{b_1'} + ... + (v_1.a_{m1} + v_2.a_{m2} + ... + v_n.a_{mn}).\overrightarrow{b_m'}$$

Y entonces por la definición de la matriz asociada a un vector en una base:

$$\left[f\left(\vec{v}\right)\right]_{B'} = \begin{pmatrix} v_1.a_{11} + v_2.a_{12} + \ldots\ldots.. + v_n.a_{1n} \\ v_1.a_{21} + v_2.a_{22} + \ldots\ldots.. + v_n.a_{2n} \\ \ldots \\ v_1.a_{m1} + v_2.a_{m2} + \ldots\ldots.. + v_n.a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se calculará el producto: $[f]_{BB'} \cdot \left[\vec{v}\right]_B = \left[c_{ij}\right]$, con

$1 \le i \le m$ y $j = 1$ y tal que cada

$c_{ij} = c_{i1}$ vale:

$$c_{i1} = \sum_{k=1}^{n} f_{jk}.v_{k1} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}.v_k = \sum_{k=1}^{n} v_k\,a_{jk} = v_1.a_{j1} + v_2.a_{j2} + \ldots\ldots.. + v_n.a_{jn}\ ,$$

con lo que queda demostrada la igualdad propuesta.

♦

EJEMPLO 14.5.2

Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$, con $[f]_{B_C} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B_C = \left(1, x, x^2\right)$.

Hallar $f(2+\sqrt{3}.x+5.x^2)$. (En el espacio la suma la representamos por + y el producto por el escalar por .)

La matriz del polinomio en la base $B_C = \left(1, x, x^2\right)$ es $\overrightarrow{p(x)} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \\ 5 \end{pmatrix}$ por lo tanto

$$\left(f(2+\sqrt{3}.x+5.x^2)\right)_{B_C} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-3\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} \\ 12+2\sqrt{3} \end{pmatrix}_{B_C}$$

y de allí el transformado buscado es

$f(2+\sqrt{3}.x+5.x^2) = (7-3\sqrt{3}).1 + 4\sqrt{3}\ .x + (12+2\sqrt{3}).\ x^2$

EJERCICIO 14.5.3

Sea $g:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que su matriz $[g]_{B_C B'_C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con B_C la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y B'_C la base canónica de $\mathbb{R}^4$. Hallar $[g((-3,5,6))]_{B'C}$.

➢ Cambio de base

Como vimos en un ejemplo hay veces que para calcular la matriz de una composición de transformaciones lineales usando el producto de las matrices asociadas hay que cambiar la base del espacio de partida o de llegada según sea el caso. Se verá un resultado que es aplicable para solucionar esa situación, también usando matrices.

1) Supongamos que se tiene $\underset{B_1}{V} \xrightarrow{f} \underset{B_2}{V'}$ y se conoce su matriz: $[f]_{B_1 B_2}$

Se quiere hallar la matriz de f asociada $[f]_{B_1 B_2'}$. Esto es cambiar la base del espacio de llegada.

Es sabido que: $\underset{B_1}{V} \xrightarrow{f} \underset{B_2}{V'} \xrightarrow{id_{V'}} \underset{B_2'}{V'}$ donde $id_{V'} \circ f = f$

Por lo tanto:

$$[f]_{B_1 B_2'} = [id_{V'} \circ f]_{B_1 B_2'} = [id_{V'}]_{B_2 B_2'} \cdot [f]_{B_1 B_2}$$

$[id_{V'}]_{B_2 B_2'}$ es una de las matrices que se define como **matriz cambio de base.**

2) Supongamos que se tiene $\underset{B_1}{V} \xrightarrow{f} \underset{B_2}{V'}$ y se conoce su matriz: $[f]_{B_1 B_2}$

Se quiere hallar la matriz f asociada $[f]_{B_1'B_2}$. Esto es cambiar la base del espacio de partida.

Ya que: $\underset{B_1'}{V} \xrightarrow{id_V} \underset{B_1}{V} \xrightarrow{f} \underset{B_2}{V'}$ donde $f \circ id_V = f$

Por lo tanto:

$$[f]_{B_1'B_2} = [f \circ id_V]_{B_1'B_2} = [f]_{B_1B_2} \cdot [id_V]_{B_1'B_1}$$

$[id_V]_{B_1'B_1}$ es otra de las matrices que se define como **matriz cambio de base.**

3) Es un caso particular de estas situaciones. Qué pasa si f va de V en V ?

Sea $\underset{B_1}{V} \xrightarrow{f} \underset{B_2}{V}$ y se tiene que su matriz asociada: $[f]_{B_1B_2}$

Y se quiere hallar la matriz de f asociada $[f]_{B_3B_4}$.

Esto es cambiar las bases del espacio en la partida y la llegada de f.

Vale que: $\underset{B_3}{V} \xrightarrow{id_V} \underset{B_1}{V} \xrightarrow{f} \underset{B_2}{V} \xrightarrow{id_V} \underset{B_4}{V}$ además $id_V \circ f \circ id_V = f$

Por lo tanto:

$$[f]_{B_3B_4} = [id_V \circ f \circ id_V]_{B_3B_4} = [id_V]_{B_2B_4} \cdot [f]_{B_1B_2} \cdot [id_V]_{B_3B_1}$$

4) Y si lo que se quiere es $[f]_{B_3} = [f]_{B_3B_3}$ y se conoce: $[f]_B$

Ya que: $\underset{B_3}{V} \xrightarrow{id_V} \underset{B}{V} \xrightarrow{f} \underset{B}{V} \xrightarrow{id_V} \underset{B_3}{V}$ y $id_V \circ f \circ id_V = f$

Por lo cual:

$$[f]_{B_3} = [id_V \circ f \circ id_V]_{B_3} = [id_V]_{BB_3} \cdot [f]_B \cdot [id_V]_{B_3B}$$

En este caso tan especial resulta que: $[id_V]_{BB_3}^{-1} = [id_V]_{B_3B}$

Las matrices que representan a un mismo $f \in End_K(V)$ en distintas bases, se dicen **similares** o **semejantes**. Es decir, si *A* = $[f]_{B_1}$ y *B* = $[f]_{B_2}$ entonces *A* y *B* están asociadas en un mismo endomorfismo en distintas bases, entonces *A* y *B* son semejantes.

Por el resultado anterior $A = C \cdot B \cdot C^{-1}$, siendo $C = [id_V]_{BB_3}$.

Esta definición se generaliza a matrices cuadradas pues por el teorema 14.3.3, ellas siempre están en correspondencia con endomorfismos para bases fijas.

A y *B* **son semejantes** si y sólo si existe una matriz *C* invertible tal que: $A \cdot C = C \cdot B$

EJERCICIO 14.5.4

Probar que la semejanza de matrices es una relación de equivalencia.

EJEMPLO 14.5.5

Sea $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 1}$ y sean respectivamente $B_1 = (1, x+1, x^2)$ y

$B_2 = \left(\overrightarrow{w_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{w_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ las bases de $\mathbb{R}_3[x]$ y $\mathbb{R}^{3\times 1}$ sobre $\mathbb{R}$

Si $[f]_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

f será un isomorfismo si su matriz asociada es invertible, para ello podemos analizar su determinante.

$$\det\left([f]_{B_1B_2}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -1.\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1.(-6-8) + 2.(-5) =$$

$$= 14 - 10 = 4 \neq 0$$

Luego, f es isomorfismo pues es invertible al igual que su matriz asociada.

Sea $B_2' = \left(\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ otra base de $\mathbb{R}^{3\times1}$ sobre $\mathbb{R}$.

Cuál será $[f]_{B_1 B_2'}$?

Por lo anterior

$[f]_{B_1 B_2'} = \left[id_{\mathbb{R}^{3\times1}} \right]_{B_2 B_2'} \cdot [f]_{B_1 B_2}$ con $\underset{B_1}{\mathbb{R}_3[x]} \xrightarrow{f} \underset{B_2}{\mathbb{R}^{3\times1}} \xrightarrow{id_{\mathbb{R}^{3\times1}}} \underset{B_2'}{\mathbb{R}^{3\times1}}$

Por simplificación se hará un abuso de notación simbolizando como + la suma en ambos espacios y como . el producto por el escalar en ambos casos.

Se calculará $\left[id_{\mathbb{R}^{3\times1}} \right]_{B_2 B_2'}$:

$$id_{\mathbb{R}^{3\times1}}\left(\overrightarrow{w_1}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.\overrightarrow{u_1} + 1.\overrightarrow{u_2} + 0.\overrightarrow{u_3}$$

$$id_{\mathbb{R}^{3\times1}}\left(\overrightarrow{w_2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.\overrightarrow{u_1} + (-1).\overrightarrow{u_2} + 1.\overrightarrow{u_3}$$

$$id_{\mathbb{R}^{3\times1}}\left(\overrightarrow{w_3}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1).\overrightarrow{u_1} + 1.\overrightarrow{u_2} + 0.\overrightarrow{u_3}$$

Así resulta:

$$\left[id_{\mathbb{R}^{3\times1}} \right]_{B_2 B_2'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Luego: $[f]_{B_1 B_2'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ¡¡ termine las cuentas!!

6. Rango de matrices

Recordemos algunas cuestiones ya estudiadas en el capítulo correspondiente a matrices y determinantes.
El rango de una matriz *A* se conserva por operaciones elementales.
Es decir: Si $A \sim_f A'$ **entonces** $r(A) = r(A')$**.**

El $r(A)$ es el número de filas no nulas de A_R , siendo A_R la matriz reducida por filas y escalonada equivalente con *A* y es por lo cual el número máximo de filas linealmente independientes de *A*.

También el $r(A)$ = *r* si existe una submatriz *B* de *A* de orden *r* x *r* con

det(*B*) $\neq$0 y toda submatriz *D* de *A* de orden mayor que *r* x *r* es tal que

det(D) = 0.

De ello se desprenden las propiedades ya estudiadas (con otros números…)

♦ PROPIEDAD 14.6.1

$A \sim_f I_r$ si y sólo si $r(A) = r$

♦ PROPIEDAD 14.6.2

$r(A) = r(A^t)$

♦ COROLARIO 14.6.3

El número de filas linealmente independientes en A coincide con el número de columnas linealmente independientes de A.

Se ligarán ahora esos conceptos con las transformaciones lineales.

Sea $f \in Hom_K(V, V')$ se llama **rango de f** a la $\dim_K(Img(f))$ y **nulidad de f** a la $\dim_K(Núc(f))$.

TEOREMA 14.6.4

Sean V y V' espacios vectoriales de dimensión finita sobre *K* y $f \in Hom_K(V, V')$.

Sean *B* una base de V sobre *K* y B' una base de V' sobre *K* si $A = [f]_{BB'}$, entonces

$$r(A) = \dim_K (Img(f))$$

Demostración:

Sean $B = (\overrightarrow{b_1}, ..., \overrightarrow{b_n})$ y $B' = \left(\overrightarrow{b_1'}, ..., \overrightarrow{b_m'}\right)$ bases ordenadas de V y V' respectivamente.

Es sabido que $Img(f) = \overline{\left\{f\left(\overrightarrow{b_1}\right), ..., f\left(\overrightarrow{b_n}\right)\right\}}$, por lo tanto una base de $Img(f)$ es un subconjunto de $f(B)$.

El $r(A)$ es el número máximo de filas de *A* que son linealmente independientes y coincide con el número máximo de columnas linealmente independientes de *A*.

Es decir un subconjunto de $\{A^1, A^2, ..., A^n\}$ siendo las A^i, $1 \le i \le n$ las columnas de *A*. Por la definición de la matriz asociada en las bases dadas y podemos expresarla:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^1 & A^2 & ... & A^n \end{pmatrix}$$

Cada A^i es la columna *i*-ésima de *A*, es decir $A^i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ ... \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in K^{m\times 1}$

Por simplificación se hará un abuso de notación simbolizando como + la suma en ambos espacios y como . el producto por el escalar en ambos casos.

Para probar la propiedad se hará en etapas.

Veamos que para $k_i \in K$: $\sum_{i=1}^{n} k_i . f\left(\overrightarrow{b_i}\right) = 0$ si y sólo si $\sum_{i=1}^{n} k_i . A^i = O, O \in K^{m\times 1}$

Por la definición de la matriz asociada a la transformación y a las bases dadas:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i . f\left(\overrightarrow{b_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i . \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} . \overrightarrow{b_j'}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(k_i . a_{ji}\right) . \overrightarrow{b_j'}\right) = 0$$

Como los elementos $\overrightarrow{b_j'}$ de la base *B´* son linealmente independientes sobre *K*, queda

$$\sum_{i=1}^{n} k_i . a_{ji} = 0 \quad (\forall j)(1 \leq j \leq m)$$

Así, si se extienden estas sumas, que se verifican simultáneamente:

$$\begin{aligned}
&\text{si } j = 1 \quad k_1 . a_{11} + k_2 . a_{12} + \ldots\ldots.. + k_n . a_{1n} = 0 \\
&\text{si } j = 2 \quad k_1 . a_{21} + k_2 . a_{22} + \ldots\ldots.. + k_n . a_{2n} = 0 \\
&\ldots \\
&\text{si } j = m \quad k_1 . a_{m1} + k_2 . a_{m2} + \ldots\ldots.. + k_n . a_{mn} = 0
\end{aligned}$$

Y por lo tanto: $k_1 . A^1 + k_2 . A^2 + \ldots\ldots.. + k_n . A^n = 0$, que es lo mismo que decir:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i . A^i = 0$$

Analizar que todos los pasos son “reversibles” ….. 

La demostración del teorema:

Sea $r = r(A)$, el número máximo de columnas linealmente independientes. Supongamos, sin pérdida de generalidad y por comodidad, que son las *r* primeras.

Por lo tanto al considerar:

$$k_1 . f\left(\overrightarrow{b_1}\right) + k_2 . f\left(\overrightarrow{b_2}\right) + \ldots\ldots.. + k_r . f\left(\overrightarrow{b_r}\right) = 0$$ por lo anterior,

$k_1 . A^1 + k_2 . A^2 + \ldots\ldots.. + k_r . A^r = 0$, y como las columnas son libres, entonces:

$$k_1 = k_2 = \ldots\ldots.. = k_r = 0$$

Por lo tanto: $\dim_K Img(f) \geq r$.

Supongamos que $\dim_K Img(f) > r$

Es decir: $\left\{f\left(\overrightarrow{b_1}\right), \ldots\ldots.., f\left(\overrightarrow{b_s}\right)\right\}$ es linealmente independiente, con $s > r$.

Consideramos $k_1.A^1 + ... + k_s.A^s = 0$ si y sólo si $k_1.f\left(\overrightarrow{b_1}\right) + ... + k_s.f\left(\overrightarrow{b_s}\right) = 0$

Entonces $k_1 = ... = k_s = 0$

Por lo tanto hay *s* columnas de *A* linealmente independientes. Absurdo.

Por lo tanto $\dim_K Img(f) = r = r(A)$

♦

♦ PROPIEDAD 14.6.5 (Corolario del teorema 14.6.4)

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre *K*.

Las matrices semejantes tienen igual rango.

Demostración: Sea $f \in End_K(V)$ entonces existen matrices

$A = [f]_{B_1B_2}$ y $B = [f]_{B_3B_4}$ para bases convenientes de *V* sobre *K*

Y entonces por el teorema anterior, $r(A) = \dim_K Img(f) = r(B)$

♦

EJERCICIO 14.6.6

Hallar la $\dim_{\mathbb{R}} Img(f)$, en los siguientes casos:

a) $f : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ y $[f]_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 1}$ y $[f]_{BB^*} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $[f]_{B_C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre *K*. Si $f \in End_K(V)$. Se llama **determinante de *f*,** al $\det A$, siendo $A = [f]_B$ para alguna base *B* de V.

Es decir el determinante de f es el determinante de cualquiera de sus matrices asociadas.

♦ PROPIEDAD 14.6.7

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre *K*. Si $f \in End_K(V)$.

f es no singular (es invertible) si y sólo si $dim_K(Img(f)) = n$ si y sólo si $r(A) = n$ si y sólo si $\det f \neq 0$

Demostración:

Queda como ejercicio (es simplemente encadenar todos los resultados anteriores)

♦

CAPÍTULO 15
Aplicación de las transformaciones lineales a los sistemas de ecuaciones

En este capítulo se usarán las herramientas que provee el Algebra Lineal para justificar resultados importantes de los sistemas de m ecuaciones lineales y n incógnitas. Además se aplicarán las identificaciones del capitulo anterior entre las matrices columnas de n filas, las n-uplas y las matrices de coordenadas de un vector asociadas a una base.

1. Sistemas nuevamente…

Dado un sistema $A.X = B$, $m \times n$, es decir de m ecuaciones con n incógnitas, verificar que se puede expresar como

$$x_1.A^1 + x_2.A^2 + \dots\dots + x_n.A^n = B$$

Siendo:

$A^i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$ la columna i-ésima de la matriz de los coeficientes del sistema y $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ la columna de los términos independientes. Siendo x_1, $x_2, \dots, x_n$ los elementos de la matriz de las incógnitas X.

Recordemos que una n-upla $s = (s_1, \dots\dots, s_n) \in K^n$ es solución si y sólo si

$$s_1.A^1 + s_2.A^2 + \dots\dots + s_n.A^n = B$$

Es decir, $A.X = B$ tiene solución si y sólo si B es combinación lineal sobre K de $A^1, A^2, \dots\dots, A^n$

o sea $B \in \overline{\{A^1, A^2, \dots\dots, A^n\}}$.

Así se tiene:

♦ TEOREMA 15.1.1 :
Sea un sistema $A.X = B$, de m ecuaciones con n incógnitas.
$A.X = B$ tiene solución si y sólo si $\dim_K \overline{\{A^1,........,A^n\}} = \dim_K \overline{\{A^1, A^2,........,A^n, B\}}$

♦

O equivalentemente:

♦ TEOREMA 15.1.2
Sea un sistema $A.X = B$, de m ecuaciones con n incógnitas.
$A.X = B$ tiene solución si y sólo $r(A) = r(A^*)$, siendo $A^* = (A^1, A^2,........,A^n, B)$ la matriz ampliada.

♦

Como $A \in K^{m\times n}$, existen espacios vectoriales sobre K, de dimensiones m y n sobre K, V y $V´$ respectivamente, y para bases fijas convenientes B_V y $B'_{V'}$ respectivas, tales que $Hom_K(V,V') \approx K^{m\times n}$, por lo tanto existe $f \in Hom_K(V,V')$ tal que $[f]_{BB'} = A$, donde $r(A) = \dim_K Im(f)$ (resultado del capítulo anterior).

Además si se considera el subconjunto S_0 de K^n (haciendo identificaciones destacadas en el capitulo anterior y usando la matriz de las coordenadas de un vector en la base canónica):

$$S_0 = \{s = (s_1,........,s_n) : A.s^t = 0\} = \{s = (s_1,........,s_n) : s_1.A^1 + ...s_n.A^n = 0\} =$$
$$= \{s = (s_1,........,s_n) : f(s) = 0\} = Núc(f)$$

Por lo cual, S_0 es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $A.X = 0$ asociado a $A.X = B$ es también el conjunto de elementos del $Núc(f)$.

Por lo tanto:

♦ PROPIEDAD 15.1.3
Sea un sistema $A.X = B$, de m ecuaciones con n incógnitas. El conjunto S_0 de soluciones de $A.X = 0$ es un subespacio de K^n .

La demostración se deja al lector.

♦

Notación: En un K-espacio vectorial V,
si $T \subseteq V, \vec{w} \in V$ se define $\vec{w} + T = \{ \vec{s} : \vec{s} = \vec{w} + \vec{t} \text{ con } \vec{t} \in T\}$

Se tienen todas las herramientas para demostrar la siguiente propiedad:

♦ PROPIEDAD 15.1.4 :
Sea el sistema $A.X = B$, de m ecuaciones con n incógnitas. El conjunto S de soluciones de $A.X = B$ es el conjunto vacío o bien $S = c^* + S_0$, donde c^* es una solución particular de $A.X = B$ y $S_0 = Núc(f)$ tal que $[f]_{B_V B'_{V'}} = A$ para $f \in Hom_K(V,V') \approx K^{m\times n}$,con bases convenientes B_V y $B'_{V'}$

Demostración:
Si $S \neq \varnothing$ entonces existe s^* , $s^* \in S$.

Veamos que $s^* + S_0 \subseteq S$
Sea $\vec{v} \in s^* + S_0$, entonces $\vec{v} = s^* + \vec{u}$ con $\vec{u} \in Núc(f)$, o equivalentemente $A.\vec{u} = 0$; por propiedades de las operaciones $A.\vec{v} = A.s^* + A.\vec{u} = A.s^* = B$.
Por lo tanto: $\vec{v} \in S$.

Veamos que $S \subseteq s^* + S_0$
Sea $\vec{w} \in S$. Entonces vale que $A.\vec{w} = B$ y además por hipótesis $A.s^* = B$, entonces $\vec{w} - s^* \in S_0$ pues haciendo "cuentas" $A.\left(\vec{w} - s^*\right) = B - B = 0$
Y como $\vec{w} = s^* + \left(\vec{w} - s^*\right)$ resulta que $\vec{w} \in s^* + S_0$

♦

EJEMPLO 15.1.5
Sea el sistema

$$\begin{cases} 3.x_1 + 2.x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + 2.x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 4 \end{cases}$$

La matriz del sistema es $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Las filas de A son vectores libres debido a los 0 que están en la segunda y tercer fila de A, claramente permiten observar que ninguna suma de las tres filas pueden dar el vector nulo de K^4.

$$A^* = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

A lo sumo, $r(A) = 3$ (no hay más que tres filas....)

Sea la submatriz: $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, su determinante es :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3-2+1 = -4 \neq 0.$$ Así, $r(A) = 3.$

(Lo que confirma lo dicho antes sobre la independencia de las filas de A)

Por lo tanto, $r(A) = r(A^*) = 3$ porque M es submatriz de A y es submatriz de A^*, y no hay posibilidades de agregar filas para obtener una submatriz de mayor orden que M.

Determinaremos una solución particular.

Para ello buscaremos un s^* y luego solucionaremos el sistema homogéneo.
Es posible imponer condiciones para hallar una solución particular s^* para simplificar el problema.
Sea $s^* = (...,...,...,0)$, con lo que queda:

$$\begin{cases} 3.x_1 + 2.x_2 - x_3 = 1 \\ \qquad\quad x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 \qquad\; = 4 \end{cases}$$

Por lo tanto se pueden calcular las x_i^* $1 \leq i \leq 3$ con el Método de Determinantes o de Cramer:

$$x_1^* = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{3-8+4-1}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2^* = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-1+3+12}{-4} = -\frac{7}{2}$$

$$x_3^* = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{12+6-1+9}{-4} = -\frac{13}{2}$$

Luego, una solución particular será $s^* = \left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{13}{2}, 0\right)$

Resolvamos ahora el sistema homogéneo:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{f1 con f3}}{\overset{\text{permutando}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{el triple de f1}}{\overset{\text{restando a f3}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\text{quintuple de f2}}{\overset{\text{sumando a f1 la f2 / restando a f3 el}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -12 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{multiplicando f3 por } \frac{1}{4}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{la f3}}{\overset{\text{sumando a la f1}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{la f3}}{\overset{\text{sumando a la f2}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Es decir: $\begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = x_4^* \\ x_3^* = 3.\, x_4^* \end{cases}$

Así, $S_0 = \{(0,t,3t,t) : t \in \mathbb{R}\}$, o de otra manera $S_0 = \overline{\{(0,1,3,1)\}}$

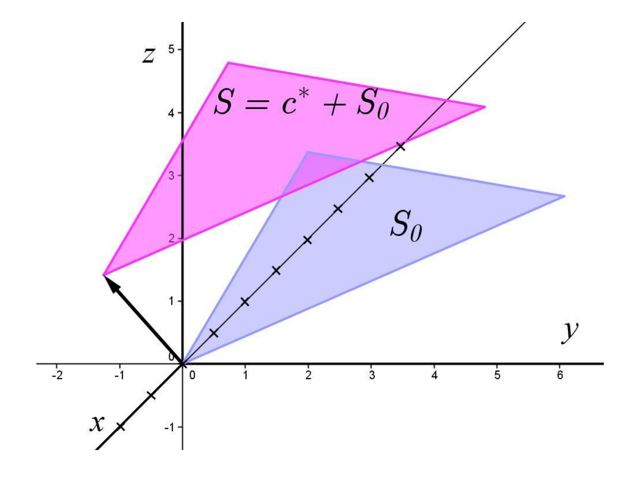
Por lo tanto $S = s^* + S_0 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{13}{2}, 0\right) + \lambda.(0,1,3,1)$, para $\lambda \in \mathbb{R}$

Luego: $s = \left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{2} + \lambda, -\frac{13}{2} + 3.\lambda, \lambda\right)$, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ es una solución del sistema.

El conjunto S no es un subespacio porque el $\vec{0} \notin S$.

$S = s^* + S_0$ es el subespacio S_0 desplazado un vector fijo s^*, S se denomina **variedad** o **hiperplano.** El conjunto de soluciones de los sistemas de ecuaciones no homogéneos son traslaciones de subespacios, son variedades.

En $\mathbb{R}^3$ podría pensarse gráficamente de la siguiente manera:



Se obtendría un plano S, desplazado por un vector s^*, paralelo a un subespacio S_0 de $\mathbb{R}^3$.

♦ PROPIEDAD 15.1.6
Para todo sistema lineal homogéneo $A.X = 0$, de m ecuaciones con n incógnitas, se verifica que $\dim_K S_0 \geq n - m$.
Siendo $S_0 = Núc(f)$ tal que $[f]_{B_V B'_{V'}} = A$ para bases convenientes B_V y $B'_{V'}$ de V y V' respectivamente pues existe $f \in Hom_K(V, V') \approx K^{m \times n}$

Demostración:
Sea $S_0 = Núc(f)$

$$\dim_K V = n = \dim_K S_0 + \dim_K Im(f) \leq \dim_K S_0 + m$$

Pues $\dim_K Im(f) \leq m = \dim_K V'$

Por lo tanto: $\dim_K S_0 \geq n - m$

♦

Observación 1: S_0 tiene al menos $n - m$ vectores linealmente independientes que son soluciones de $A.X = 0$.

Observación 2: Si el número m de ecuaciones es menor que el número n de incógnitas, es decir $m < n$, entonces $\dim_K S_0 > 0$, por lo tanto S_0 tiene otro vector distinto del $\overrightarrow{0_{K^n}}$.
Es decir el sistema $A.X = 0$ admite soluciones distintas de la trivial, y ellas son infinitas si K lo es pues S_0 es un subespacio de K^n, son todas las combinaciones lineales sobre K de elementos de una base de S_0.

♦ PROPIEDAD 15.1.7 :
Sea $A.X = B$ un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, un sistema con solución $\left(r(A) = r(A^*)\right)$.
Si $S_0 = Núc(f)$ tal que $[f]_{B_V B'_{V'}} = A$ para bases convenientes B_V y $B'_{V'}$ de V y V' respectivamente pues existe $f \in Hom_K(V, V') \approx K^{m \times n}$

$S_0 = \{\vec{0}\}$ si y sólo si $\dim_K Im(f) = r(A) = n$.

Por lo tanto $A.X = B$ tiene solución única.

Demostración:
Recordemos que $\dim_K V = n = \dim_K S_0 + \dim_K Im(f)$

Si $S_0 = \{\vec{0}\}$, entonces $\dim_K S_0 = 0$, entonces $\dim_K Im(f) = r(A) = n$.

Si $\dim_K Im(f) = r(A) = n$, entonces $\dim_K S_0 = \dim_K Núc(f) = 0$. Por lo tanto $S_0 = \{\vec{0}\}$.

Además toda solución $\vec{s} \in S$, $\vec{s} = s^* + \vec{0}$. Por lo tanto $\vec{s} = s^*$ única. ♦

♦ PROPIEDAD 15.1.8 :

Sea $A.X = B$, un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, un sistema con solución, $\left(r(A) = r(A^*)\right)$

Siendo $[f]_{B_V B'_{V'}} = A$ para bases convenientes B_V y $B'_{V'}$ de espacios V y V' respectivamente pues existe $f \in Hom_K(V, V') \approx K^{m \times n}$

Si $r(A) = r < n$ entonces el sistema tiene más de una solución (infinitas si K es infinito), que dependen de $n - r$ valores arbitrarios.

Demostración:

Sea $S_0 = Núc(f)$.

Si $\dim_K Im(f) = r = r(A)$ entonces $\dim_K S_0 = n - r$, pues $\dim_K V = n = \dim_K S_0 + \dim_K Im(f)$

Dado el conjunto $\left\{\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_{n-r}}\right\}$ si es base de S_0 sobre K es $\overline{\left\{\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_{n-r}}\right\}} = S_0$

Como $S = s^* + S_0$, dada $\vec{s} \in S$, $\vec{s} \in s^* + S_0$

Es decir cada $\vec{s} = s^* + \vec{u}$, para algún $\vec{u} \in S_0$, por lo cual $\vec{u} = k_1.\overrightarrow{u_1} + ... + k_{n-r}.\overrightarrow{u_{n-r}}$.

Así entonces : $\vec{s} = s^* + k_1.\overrightarrow{u_1} + ... + k_{n-r}.\overrightarrow{u_{n-r}}$, y dándole valores arbitrarios a los $n - r$ elementos k_i de K se obtiene cada una de las soluciones.

♦

Cómo ya se ha visto antes hay sistemas que tienen solución única, otros no tienen solución y los hay con más de una solución.

Es usual designar como:

- **incompatible** al sistema que no tiene solución
- **compatible** al sistema que tiene solución
  - **Determinado**: posee solución única
  - **Indeterminado**: posee más de una solución

Resumiendo todo lo anterior, respecto a un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas, $A.X = B$, se tiene el siguiente teorema de Roché-Frobenius:

♦ TEOREMA 15.1.9
Teorema de Roché-Frobenius:
Dado un sistema lineal $A.X = B$, sistema de m ecuaciones con n incógnitas.

El sistema tiene solución, es compatible, si y sólo si $r(A) = r(A^*)$, el rango de la matriz del sistema es igual al rango de la matriz orlada.

Si $r(A) = r(A^*) = n$ el sistema tiene solución única, y diremos que es compatible determinado
Si $r(A) = r(A^*) < n$ el sistema tiene más de una solución, que dependen de $n - r$ valores, y diremos que es compatible indeterminado.

♦

EJEMPLO 15.1.10
Analizar la compatibilidad del siguiente sistema, de incógnitas en $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

El sistema es 3 x 3. Si el rango de A es 3, también lo será el de la ampliada, pues A es submatriz de la ampliada y como 3 es el número de filas, esa es la "mayor aspiración de rango" para $(A|B)$.
Si el rango es 3, la solución es única.

- Cálculo del rango de A:

Como A es cuadrada se calcula primeramente el determinante de A, pues A es la mayor submatriz de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 4 + 12 - 9 + 8 - 6 = 0$$ luego el rango no es 3.

Por lo tanto, el sistema no tiene solución única.

Si tomamos la submatriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, resulta que $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5 \neq 0$. Así el rango de *A* es 2.
Es decir que, si tiene solución, tendrá infinitas soluciones.

- ¿Cómo sabremos si el sistema tiene solución?
  Calculamos el rango de la matriz ampliada :

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

Hay que comenzar evaluando determinantes de orden 3. Debemos considerar 3 columnas tales que una de ellas sea la columna B (pues por lo visto antes si son sólo columnas de A el determinante es 0).
Si algún menor de orden 3 es no nulo el rango de la ampliada es 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9+8+6-18+6+4 \neq 0$$ luego el rango de la ampliada es 3.

- Conclusión:
  $r(A)=2$ **distinto** de $r((A|B))=3$ el sistema NO tiene solución. Es decir es **incompatible.**

EJEMPLO 15.1.11

Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar el rango de A.

b) Hallar el conjunto solución en $\mathbb{R}^3$ de $A.X=0$

c) Hallar el rango de $A^*=\left(A\left|\begin{matrix}10\\-20\\-10\end{matrix}\right.\right)$

d) Hallar una solución de $A.X=\begin{pmatrix}10\\-20\\-10\end{pmatrix}$

Solución:

a) Claramente la segunda fila es el opuesto del doble de la primera fila, y la tercera es el opuesto de la primera. Por ello estas dos filas son combinaciones lineales de la primera, y por lo tanto el rango de A es 1. Es decir $r(A)=1$

Así toda la información del sistema está dada por una sola ecuación.

b) Resolviendo, por operaciones elementales sobre las filas, se anulan dos de ellas y queda:

$$x_1 - 2.x_2 - x_3 = 0.$$

Por lo tanto los números reales solución deben cumplir

$$x_1^* = 2.x_2^* + x_3^*$$

Las soluciones son los vectores de la forma : $\overrightarrow{\left(2.x_2^* + x_3^*, x_2^*, x_3^*\right)} = x_2^*.\overrightarrow{(2,1,0)} + x_3^*.\overrightarrow{(1,0,1)}$.

Por lo tanto se tiene que $S_0 = \overline{\left\{\overrightarrow{(2,1,0)}, \overrightarrow{(1,0,1)}\right\}}$

c) Para calcular el rango de $r\left(A^*\right)$, se analizará la relación que cumplen los elementos de la columna

$$B = \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Como $b_2 = -2.b_1$ y $b_3 = -b_1$ ya que – 20 = -2. 10 y –10 = –(10), se tiene que cumplen igual relación estas filas de B que las filas de la matriz A, por lo tanto es $r\left(A^*\right) = 1$

d) El conjunto solución es $S = s^* + S_0$.



Se puede verificar que una solución particular de $A.X = \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ -10 \end{pmatrix}$ es $s^* = \overrightarrow{(10,0,0)}$, luego

$$S = \overrightarrow{(10,0,0)} + \overline{\left\{\overrightarrow{(2,1,0)}, \overrightarrow{(1,0,1)}\right\}}$$

EJEMPLO 15.1.12

¿Admite soluciones no triviales el sistema $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

Admitirá soluciones no triviales si el rango de A es menor que 4.

Observar que todo sistema homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas $AX=0$ es compatible.

A esta conclusión puede arribarse aplicando el Teorema de Roché – Frobenius, ya que claramente el rango de A coincide con el rango de la ampliada que en este caso es $\left(A|0\right)$ o también comprobando que la matriz nula $X^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n$ satisface la igualdad matricial $A.X=0$.

Esta solución X^* se llama **trivial**.

Prosigamos con el ejemplo.

- Cálculo del rango de A:

Primero se evalúa el determinante de A, que es la submatriz de A de mayor orden...

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$ por ser un determinante de orden 4 se bajará el orden

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+3.(-1) & -2-2(-1) & 1-1 & -1 \\ 2+3.1 & 1-2.1 & -3+1 & 1 \\ 1+3.2 & 3-2.2 & -1+2 & 2 \\ 2+3.1 & -1-2.1 & 2+1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & -2 & 1 \\ 7 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & -2 & 1 \\ 7 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -(-1).\begin{vmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 7 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -15+42-5-10+15+21 = 48 \neq 0$$

Luego, el rango de A es igual a 4.

- Conclusión

r(A) = *4* coincide con el número de incógnitas. La solución es única.

Por lo tanto no hay soluciones distintas de la trivial.

EJERCICIO 15.1.13
Analizar las soluciones de los siguientes sistemas

$$\text{a)}\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - 2.x_2 = 0 \\ 2.x_1 + 2.x_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{b)}\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - 2.x_2 = 0 \\ 2.x_1 + 2.x_2 = 2 \end{cases}$$

EJERCICIO15.1.14
Analizar la compatibilidad de los siguientes sistemas y resolver... los compatibles

$$\text{a)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2i \\ 5 & -6 & 2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & -3 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 15.1.15

a) Sea el sistema $A.X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Para que $\lambda \in \mathbb{R}$ el sistema tiene solución única?

Para que $\lambda \in \mathbb{R}$ el sistema tiene infinitas soluciones?.

b) Sea el sistema $A.X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. De ser posible hallar $\lambda \in \mathbb{R}$ para que :

i) El sistema tenga solución única.

ii) Admita infinitas soluciones.

iii) No tenga solución.

2. Algunas aplicaciones

EJEMPLO 15.2.1

Analizar si los vectores $\vec{a} = (1,0,3)$, $\vec{b} = (0,1,-2)$ y $\vec{c} = (2,1,3)$ son base de $\mathbb{R}^3$.

Queremos ver si son linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$, es decir que si se cumple

$k_1.\vec{a} + k_2.\vec{b} + k_3.\vec{c} = \vec{0}$, entonces $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

Este problema equivale a resolver el sistema: $\begin{cases} 1.k_1 + 0.k_2 + 2.k_3 = 0 \\ 0.k_1 + 1.k_2 + 1.k_3 = 0 \\ 3.k_1 + (-2).k_2 + 3.k_3 = 0 \end{cases}$

Dicho sistema homogéneo posee tres incógnitas reales k_1, k_2, k_3. Si el rango de la matriz del sistema es 3 la solución es única y por lo tanto los tres vectores son linealmente independientes.

Calculemos entonces el determinante de la matriz del sistema:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

Por lo tanto los tres vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$.

EJERCICIO 15.2.2

Para poder determinar una función polinómica $y = p(x)$, con $p(x)$ mónico de quinto grado, cuántos puntos de su gráfica debemos conocer al menos para que quede determinado?

Idea de la solución: Sea entonces $p(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + a_3.x^3 + a_4.x^4 + x^5$ hay que lograr plantear un sistema que tenga al menos cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas y que tenga solución única (para que el polinomio quede determinado)

Las autoras

Ferre, Natalia

Lic. Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de La Plata (UNLP), Especialista en Docencia Universitaria de la Universidad Nacional de La Plata (UNLP). Profesora Adjunta y Coordinadora de la cátedra de Matemática 1 de la Facultad de Informática de la UNLP, Jefe de Trabajos Prácticos de la cátedra de Algebra (FCE-UNLP) para las carreras de Licenciatura en Matemática, Licenciatura en Física, Profesorado de Matemática y carreras de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas de la UNLP. Coautora de: Funciones y sucesiones, una mirada literaria (2009) ISBN978-987-20239-6-6. Coordinó la catedra de Algebra, Cálculo Numérico y Geometría Analítica de FCE (UNLP).

Galli, Adriana Claudia

Lic. Matemática, Fac. Cs. Exactas (FCE) (UNLP). Esp. en Tecnología Informática Aplicada en Educación, Fac. Informática (FINF) (UNLP). Prof. Asociado, Área Lógica, Algebra y M. Discreta. Coordinó Algebra, Cálculo Numérico y Geometría Analítica. Prof. de Algebra (para Licenciaturas de Matemática, Física, Astronomía, Meteorología, Geofísico, Prof. Matemática). Y JTP de la misma área, todo en FCE (UNLP). Prof. Adj. Algebra, Fac. Ingeniería (UNLP). Prof. Adj.de Mate.1 en FINF (UNLP). Coordinó Cursos de Nivelación e Ingresos en Facultades de UNLP. Coautora de: Strong Amalgamation, Beck-Chevalley for equivalence relations and Interpolation in Algebraic Logic, (2003) Issn 0165-0114; The Logic of Equilibrium and Abelian Lattice Ordered Groups (2004) Issn 0933-5846; Univocal Paraconsistent Logics, (2010) Issn 0034-720. Codirector de Proyectos en: Lógica Algebraica y Teoría de Categorías, FCE-UNLP (2009-2016). Organizadora de reuniones de Educación y Científicas. Secretaria de la UMA.

Guzmán Mattje, Elena Beatriz

Lic. Matemática, Fac. Cs. Exactas (FCE), Universidad de La Plata (UNLP). Especialista en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria, Universidad Pedagógica (UNiPe). Docente de Matemática y Análisis Matemático en la Escuela de Educación Secundaria Técnica 8 de La Plata (EEST 8). Jefa del Departamento de Cs. Exactas y Naturales de EEST 8. Ha sido distinguida en varias competencias matemáticas. Jurado en certámenes de la Olimpiada Matemática Argentina. Dirigió y participó en varios proyectos de integración curricular sobre Matemática y Literatura, Uso del GeoGebra en el Aula, Juegos Matemáticos, Matemática y Arqui-

tectura, en la EEST 8. Está encargada del entrenamiento de los alumnos participantes de la olimpiada matemática en dicha escuela. Coautora de: Funciones y sucesiones, una mirada literaria (2009) ISBN978-987-20239-6-6; Reflexiones didácticas a partir de la producción, implementación y análisis de secuencias didácticas (2013) ISSN 2301.0797. Fue JTP de Álgebra de la FCE (U.N.L.P.).

Libros de Cátedra

Ferre, Natalia
Álgebra y Geometría : una manera de pensar / Natalia Ferre ; Adriana Claudia Galli ; Elena Beatriz Guzmán Mattje. - 1a ed . - La Plata : Universidad Nacional de La Plata ; La Plata : EDULP, 2018.
Libro digital, PDF - (Libros de cátedra)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-34-1690-7

1. Números. 2. Ecuaciones. I. Galli, Adriana Claudia II. Guzmán Mattje, Elena Beatriz III. Título
CDD 512

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP

Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata
48 N.º 551-599 / La Plata B1900AMX / Buenos Aires, Argentina
+54 221 644 7150
edulp.editorial@gmail.com
www.editorial.unlp.edu.ar

Edulp integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2019
ISBN 978-950-34-1690-7





